目　　录

第一章　函数与极限

初等数学的研究对象基本上是不变的量，而高等数学则以变量为研究对象．所谓函数关系就是变量之间的依赖关系．极限方法则是研究变量的一种基本方法．本章将介绍变量、函数、极限和函数的连续性等基本概念，以及它们的一些性质．

第一节　函　　数

一、集合　常量与变量

1．集合　集合是数学中的一个基本概念，我们通过例子说明这个概念．比方说，一个书柜中的书构成一个集合，一个教室里的学生构成一个集合，全体实数构成一个集合等等．一般地，所谓集合（或简称集）是指具有某种特定性质的事物的总体．组成这个集合的事物称为该集合的元素．凡事物 a 是集合 M 的元素记作 $a\in M$（读作 a 属于 M）；事物 a 不是集合 M 的元素记作 $a\overline{\in}M$（读作 a 不属于 M）．

一个集合认为已经给定，如果对于任何事物能够判定它是否属于这个集合．由有限个元素组成的集合，可用列举出它的全体元素的方法来表示．例如，由元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的集合 A，可记作

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}.$$

由无穷多个元素组成的集合，通常用如下记号表示：设 M 是具有某种特征的元素 x 的全体所组成的集合，就记作

$$M=\{x\mid x\text{ 所具有的特征}\}.$$

这里所谓 x 所具有的特征，实际上就是 x 作为 M 的元素应适合的充分必要条件：适合这条件的任何事物都是集合 M 的元素；反之，

集合 M 的元素都必须适合这条件.

例如,xOy 平面上坐标适合方程 $x^2+y^2=1$ 的点 (x,y) 的全体组成的集合 M,可记作

$$M=\{(x,y)\mid x,y\text{ 为实数},x^2+y^2=1\}.$$

这个集合 M 实际上就是 xOy 平面上以原点 O 为中心、半径等于 1 的圆周上的点的全体组成的集合.

以后用到的集合主要是数集,即元素都是数的集合. 如果没有特别声明,以后提到的数都是实数.

全体自然数的集合记作 $\mathbb{N}$. 全体整数的集合记作 $\mathbb{Z}$. 全体有理数的集合记作 $\mathbb{Q}$. 全体实数的集合记作 $\mathbb{R}$.

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素,即若 $x\in A$,则必 $x\in B$,就说 A 是 B 的子集,记作 $A\subset B$(读作 A 包含于 B)或 $B\supset A$(读作 B 包含 A). 例如,$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$,$\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$,$\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$.

如果 $A\subset B$,且 $B\subset A$,就称集合 A 与 B 相等,记作 $A=B$. 例如,设

$$A=\{1,2\},\ B=\{2,1\},\ C=\{x\mid x^2-3x+2=0\},$$

则 $A=B=C$.

不含任何元素的集合称为空集. 例如

$$\{x\mid x\in\mathbb{R},x^2+1=0\}$$

是空集,因为适合条件 $x^2+1=0$ 的实数是不存在的. 空集记作 $\emptyset$,且规定空集为任何集合的子集.

区间是用得较多的一类数集. 设 a 和 b 都是实数,且 $a<b$. 数集

$$\{x\mid a<x<b\}$$

称为开区间,记作 (a,b),即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}.$$

a 和 b 称为开区间 (a,b) 的端点,这里 $a\notin(a,b)$,$b\notin(a,b)$. 数集

$$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

称为闭区间,记作 $[a,b]$,即

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}.$$

a 和 b 也称为闭区间$[a,b]$的端点，这里 $a\in[a,b]$，$b\in[a,b]$.

类似地可说明：

$$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\},$$

$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}.$$

$[a,b)$和$(a,b]$都称为半开区间.

以上这些区间都称为有限区间. 数 $b-a$ 称为这些区间的长度. 从数轴上看，这些有限区间是长度为有限的线段. 闭区间$[a,b]$与开区间(a,b)在数轴上表示出来，分别如图 1－1(a)与(b)所示. 此外还有所谓无限区间. 引进记号$+\infty$（读作正无穷大）及$-\infty$（读作负无穷大），则可类似地表示无限区间，例如

$$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x\},$$

$$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}.$$

这两个无限区间在数轴上如图 1－1(c)，(d)所示.

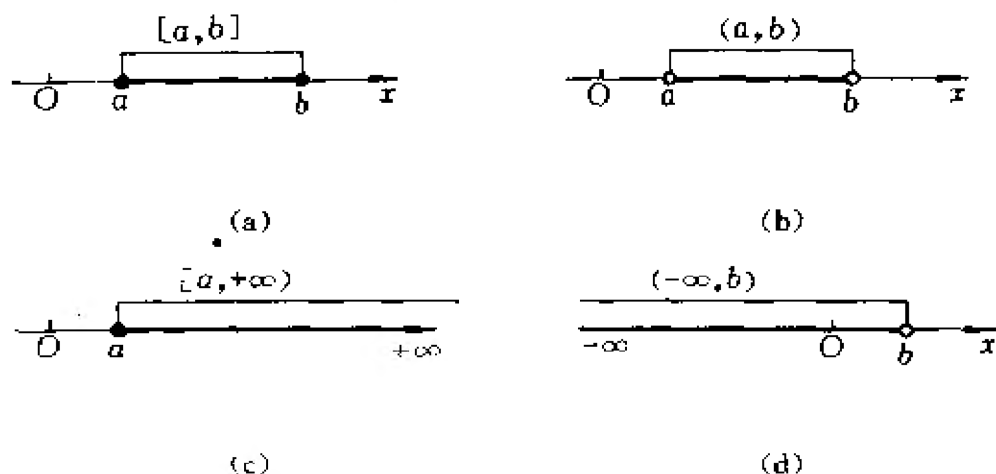


图 1－1

全体实数的集合$\mathbf{R}$也可记作$(-\infty,+\infty)$. 它也是无限区间.

以后在不需要辨明所论区间是否包含端点，以及是有限区间还是无限区间的场合，我们就简单地称它为“区间”，且常用 I 表示.

邻域也是一个经常用到的概念. 以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域，记作 $U(a)$.

设 δ 是任一正数，则开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 就是点 a 的一个邻域，这个邻域称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}.$$

点 a 称为这邻域的中心，δ 称为这邻域的半径(图 1－2).

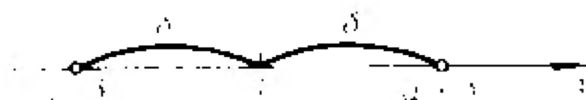


图 1－2

由于 $a-\delta<x<a+\delta$ 相当于 $|x-a|<\delta$，因此

$$U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}.$$

因为 $|x-a|$ 表示点 x 与点 a 间的距离，所以 $U(a,\delta)$ 表示：与点 a 距离小于 δ 的一切点 x 的全体.

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉. 点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，称为点 a 的去心的 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

这里 $0<|x-a|$ 就表示 $x\neq a$.

2. **常量与变量** 在观察自然现象或技术过程时，常常会遇到各种不同的量，其中有的量在过程中不起变化，也就是保持一定的数值，这种量叫做常量；还有一些量在过程中是变化着的，也就是可以取不同的数值，这种量叫做变量.

例如，把一个密闭容器内的气体加热时，气体的体积和气体的分子个数保持一定，它们是常量；而气体的温度和压力在变化，则是变量，它们取得越来越大的数值.

一个量是常量还是变量，要根据具体情况作出具体分析. 例如，就小范围地区来说，重力加速度可以看作常量，但就广大地区来说，重力加速度则是变量.

通常用字母 a、b、c 等表示常量，用字母 x、y、t 等表示变量.

设变量 x 所取数值的全体组成数集 M，那末变量 x 也可看作

表示数集 M 中任何元素的符号.例如,设变量 x 所取数值全体组成开区间 (a,b),那末 x 就表示数集

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$$

中任何元素的符号.如果特殊地,数集 $M=\{x\mid x=a\}$ 只含一个元素,那末表示数集元素的符号 x 就是常量.在这个意义上,常量可看作变量的特殊情形.

二、函数概念

在同一个自然现象或技术过程中,往往同时有几个变量在变化着.这几个变量并不是孤立地在变,而是相互联系并遵循着一定的变化规律.现在我们先就两个变量的情形(多于两个变量的情形以后在第八章再讲)举几个例子.

例 1 考虑圆的面积 A 与它的半径 r 之间的相依关系.大家知道,它们之间的关系由公式

$$A=\pi r^2$$

给定.当半径 r 在区间 $(0,+\infty)$ 内任意取定一个数值时,由上式就可以确定圆面积 A 的相应数值.

例 2 自由落体运动.设物体下落的时间为 t,落下的距离为 s.假定开始下落的时刻为 $t=0$,那末 s 与 t 之间的相依关系由公式

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

给定,其中 g 是重力加速度.假定物体着地的时刻为 $t=T$,那末当时间 t 在闭区间 $[0,T]$ 上任意取定一个数值时,由上式就可以确定下落距离 s 的相应数值.

例 3 设有半径为 r 的圆,考虑内接于该圆的正 n 边形的周长 S_n.由图 1-3 容易看出,$S_n=2nr\sin\alpha_n$,其中 $\alpha_n=\pi/n$.所以内接正 n 边形的周长 S_n 与边数 n 之间的相依关系由公式

$$S_n=2nr\sin\frac{\pi}{n}$$

给定. 当边数 n 在 3,4,5,…等自然数中任意取定一个数值时,由上式就可确定周长 S_n 的相应数值.

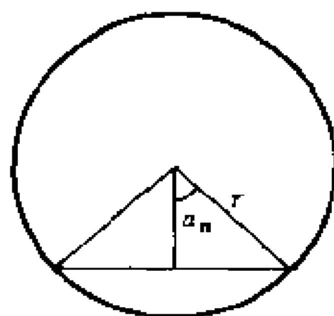


图 1-3

抽去上面几个例子中所考虑的量的实际意义,它们都表达了两个变量之间的相依关系,这种相依关系给出了一种对应法则,根据这一法则,当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时,另一个变量就有确定的值与之对应. 两个变量间的这种对应关系就是函数概念的实质.

定义　设 x 和 y 是两个变量,D 是一个给定的数集. 如果对于每个数 $x\in D$,变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应,则称 y 是 x 的函数,记作 $y=f(x)$. 数集 D 叫做这个函数的定义域,x 叫做自变量,y 叫做因变量.

当 x 取数值 $x_0\in D$ 时,与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值,记作 $f(x_0)$. 当 x 遍取 D 的各个数值时,对应的函数值全体组成的数集

$$W=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数的值域.

函数 $y=f(x)$ 中表示对应关系的记号 f 也可改用其它字母,例如"φ","F",等等. 这时函数就记作 $y=\varphi(x)$,$y=F(x)$,等等.

在实际问题中,函数的定义域是根据问题的实际意义确定的. 如例 1 中,定义域 $D=(0,+\infty)$;在例 2 中,定义域 $D=[0,T]$;在例 3 中,定义域 $D=\{n\mid n\in\mathbb{N},n\geqslant 3\}$.

在数学中,有时不考虑函数的实际意义,而抽象地研究用算式表达的函数. 这时我们约定:函数的定义域就是自变量所能取的使算式有意义的一切实数值. 例如,函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是闭区间 $[-1,1]$. 函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域是开区间 $(-1,1)$.

如果自变量在定义域内任取一个数值时,对应的函数值总是

只有一个，这种函数叫做单值函数，否则叫做多值函数. 例1、例2和例3中的函数都是单值函数. 下面举一个多值函数的例子.

例4 在直角坐标系中，半径为 r、圆心在原点的圆的方程是 $x^2+y^2=r^2$，这方程在闭区间 $[-r,r]$ 上确定一个以 x 为自变量 y 为因变量的函数. 当 x 取 $-r$ 或 r 时，对应的函数值都只有一个. 但当 x 取开区间 $(-r,r)$ 内的任一个数值时，对应的函数值就有两个. 所以这函数是多值函数.

以后凡是没有特别说明时，函数都是指单值函数.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D. 对于任意取定的 $x\in D$，对应的函数值为 $y=f(x)$. 这样，以 x 为横坐标、y 为纵坐标就在 xOy 平面上确定一点 (x,y). 当 x 遍取 D 上的每一个数值时，就得到点 (x,y) 的一个集合 C：

$$C=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}.$$

这个点集 C 称为函数 $y=f(x)$ 的图形(图1—4). 图中的 W 表示函数 $y=f(x)$ 的值域.

下面举几个函数的例子.

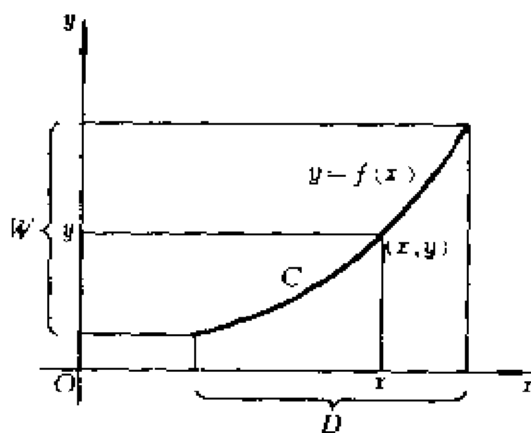


图 1-4

例5 函数

$$y=2$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=\{2\}$，它的图形是一条平行于 x 轴的直线，如图1—5所示.

例6 函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=[0,+\infty)$，它的图形如图1—6所示. 这函数称为绝对值函数.

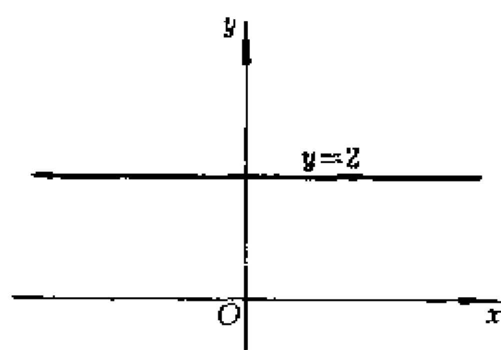


图 1-5

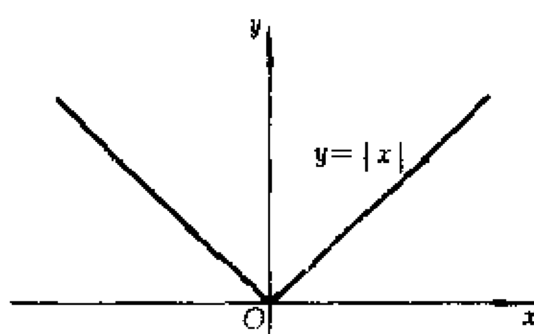


图 1-6

例 7 函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & \text{当 } x>0, \\ 0, & \text{当 } x=0, \\ -1, & \text{当 } x<0\end{cases}$$

称为符号函数，它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=\{-1,0,1\}$，它的图形如图 1—7 所示. 对于任何实数 x，下列关系成立：

$$x=\operatorname{sgn} x\cdot|x|.$$

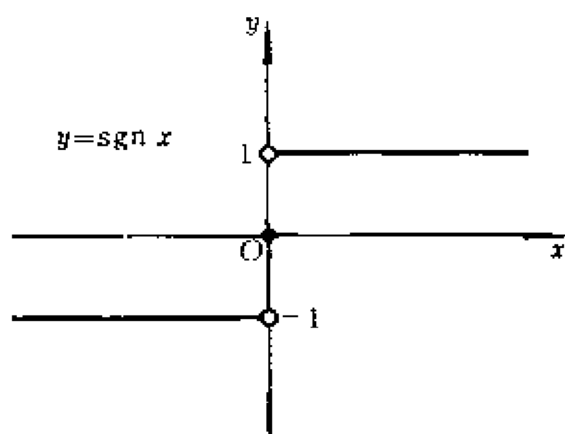


图 1-7

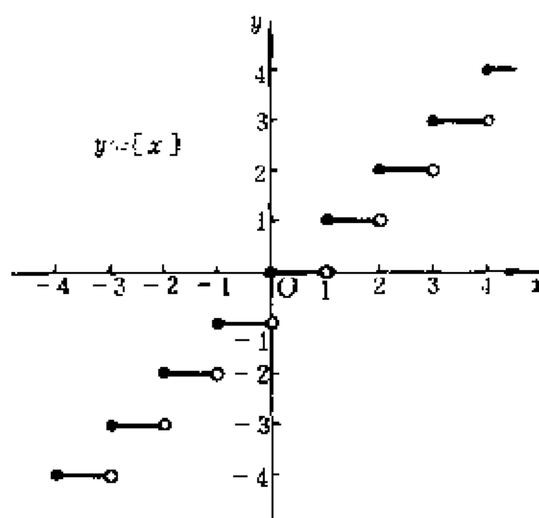


图 1-8

例 8 设 x 为任一实数. 不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分，记作 $[x]$. 例如，$\left[\frac{5}{7}\right]=0$，$[\sqrt{2}]=1$，$[\pi]=3$，$[-1]=-1$，

$[-3.5]=-4$. 把 x 看作变量，则函数

$$y=[x]$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$. 值域 $W=\mathbb{Z}$. 它的图形如图 1－8 所示，这图形称为阶梯曲线. 在 x 为整数值处，图形发生跳跃，跃度为 1. 这函数称为取整函数.

在例 6 和例 7 中看到，有时一个函数要用几个式子表示. 这种在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子来表示的函数，通常称为分段函数.

例 9 函数

$$y=f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1+x, & x>1\end{cases}$$

是一个分段函数. 它的定义域 $D=[0,+\infty)$. 当 $x\in[0,1]$时，对应的函数值 $f(x)=2\sqrt{x}$；当 $x\in(1,+\infty)$时，对应的函数值 $f(x)=1+x$. 例如，$\frac{1}{2}\in[0,1]$，所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$；$1\in[0,1]$，所以 $f(1)=2\sqrt{1}=2$；$3\in(1,+\infty)$，所以 $f(3)=1+3=4$. 这函数的图形如图 1－9 所示.

用几个式子来表示一个(不是几个!)函数，不仅与函数定义并无矛盾，而且有现实意义. 在自然科学和工程技术中，经常会遇到分段函数情形. 例如在等温过程中，气体压强 p 与体积 V 的函数关系，当 V 不太小时依从玻意耳定律；当 V 相当小时，函数关系就要用范德瓦耳斯方程来表示，即

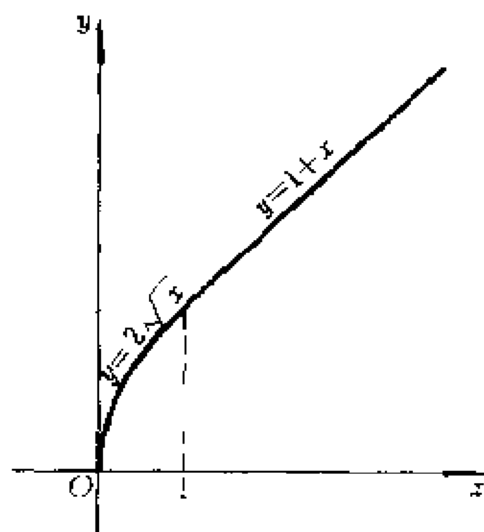


图 1－9

$$p=\begin{cases}\dfrac{k}{V}, & V\geqslant V_0,\\ \dfrac{\gamma}{V-\beta}-\dfrac{\alpha}{V^2}, & V<V_0\end{cases}\quad (k、\alpha、\beta、\gamma \text{ 都是常量}).$$

三、函数的几种特性

1. 函数的有界性 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$. 如果存在数 K_1，使得

$$f(x)\leqslant K_1$$

对任一 $x\in X$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界，而 K_1 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个上界. 如果存在数 K_2，使得

$$f(x)\geqslant K_2$$

对任一 $x\in X$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有下界，而 K_2 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个下界. 如果存在正数 M，使得

$$|f(x)|\leqslant M$$

对任一 $x\in X$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界. 如果这样的 M 不存在，就称函数 $f(x)$ 在 X 上无界；这就是说，如果对于任何正数 M，总存在 $x_1\in X$，使 $|f(x_1)|>M$，那末函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

例如，就函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内来说，数 1 是它的一个上界，数 -1 是它的一个下界（当然，大于 1 的任何数也是它的上界，小于 -1 的任何数也是它的下界）. 又

$$|\sin x|\leqslant 1$$

对任一实数 x 都成立，故函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的. 这里 $M=1$（当然也可取大于 1 的任何数作为 M 而使 $|f(x)|\leqslant M$ 成立）.

又如函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 内没有上界，但有下界，例如 1 就是它的一个下界. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 内是无界

的，因为不存在这样的正数 M，使 $\left|\frac{1}{x}\right| \leqslant M$ 对于 $(0,1)$ 内的一切 x 都成立（x 接近于 0 时，不存在确定的正数 K_1，使 $\frac{1}{x} \leqslant K_1$ 成立. 但是 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 内是有界的，例如可取 $M=1$ 而使 $\left|\frac{1}{x}\right| \leqslant 1$ 对于一切 $x \in (1,2)$ 都成立.

容易证明，函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

2. 函数的单调性 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的（图 1—10）；如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有

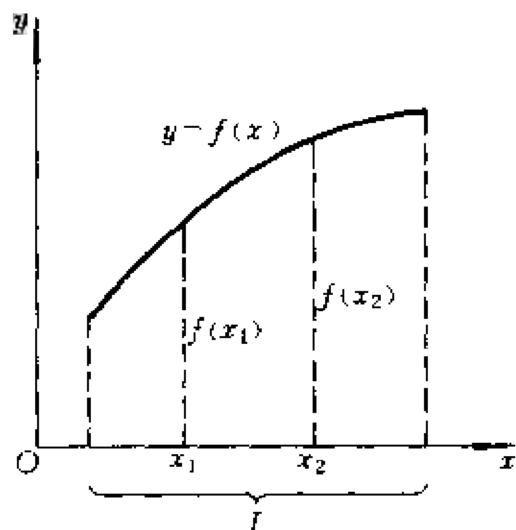


图 1—10

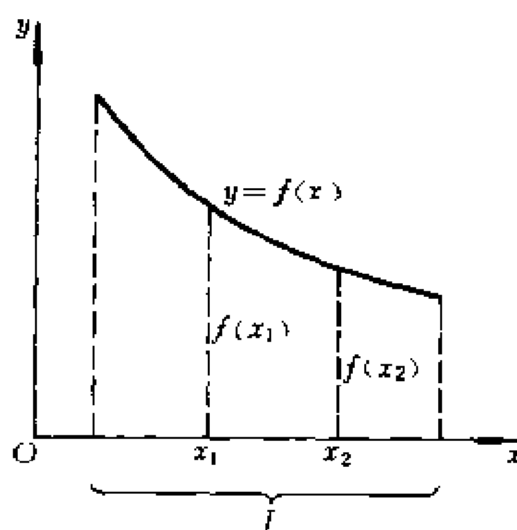


图 1—11

$$f(x_1) > f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的（图 1—11）. 单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

例如，函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的，在区间 $(-\infty,0]$ 上是单调减少的；在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内函数 $f(x)=$

x^2 不是单调的(图 1－12).

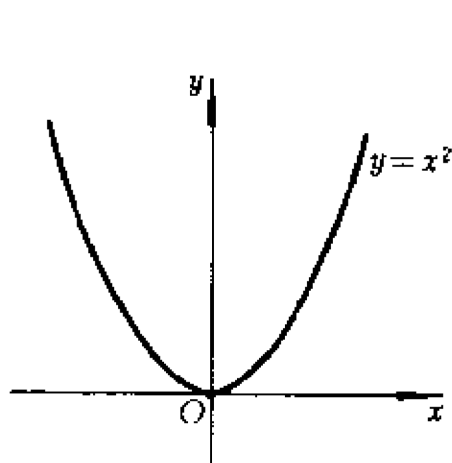


图 1 12

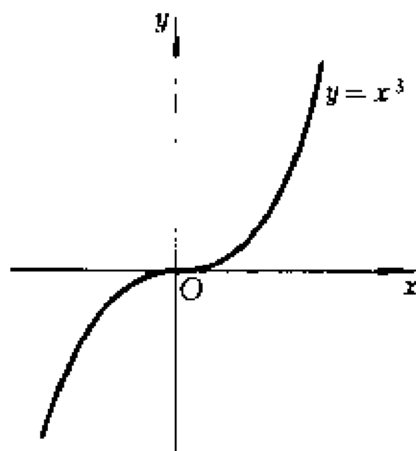


图 1－13

又例如,函数 $f(x)=x^3$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的(图 1－13).

3. 函数的奇偶性 设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称(即若 $x\in D$,则必$-x\in D$). 如果对于任一 $x\in D$,

$$f(-x)=f(x)$$

恒成立,则称 $f(x)$为偶函数. 如果对于任一 $x\in D$,

$$f(-x)=-f(x)$$

恒成立,则称 $f(x)$为奇函数.

例如,$f(x)=x^2$ 是偶函数,因为 $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$. 又例如,$f(x)=x^3$ 是奇函数,因为 $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$.

偶函数的图形关于 y 轴是对称的. 因为若 $f(x)$是偶函数,则 $f(-x)=f(x)$,所以如果 $A(x,f(x))$是图形上的点,则与它关于 y 轴对称的点 $A'(-x,f(x))$也在图形上(图 1－14).

奇函数的图形关于原点是对称的. 因为若 $f(x)$是奇函数,则 $f(-x)=-f(x)$,所以如果 $A(x,f(x))$是图形上的点,则与它关于原点对称的点 $A''(-x,-f(x))$也在图形上(图 1－15).

函数 $y=\sin x$ 是奇函数. 函数 $y=\cos x$ 是偶函数. 函数$y=\sin x$

$+\cos x$ 既非奇函数，也非偶函数.

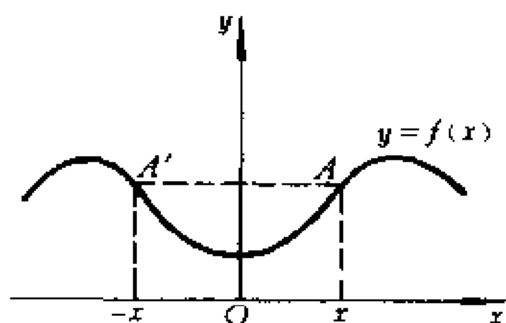


图 1—14

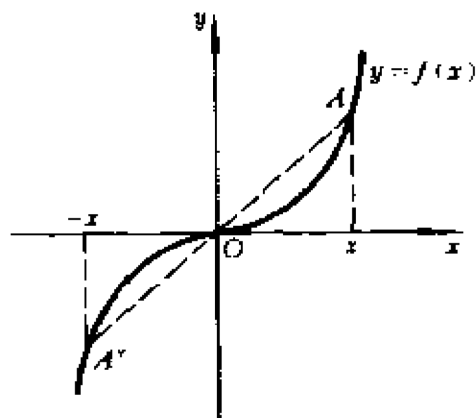


图 1—15

4. 函数的周期性 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 如果存在一个不为零的数 l，使得对于任一 $x\in D$ 有 $(x\pm l)\in D$，且

$$f(x+l)=f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，l 称为 $f(x)$ 的周期，通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

例如，函数 $\sin x$，$\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；函数 $\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

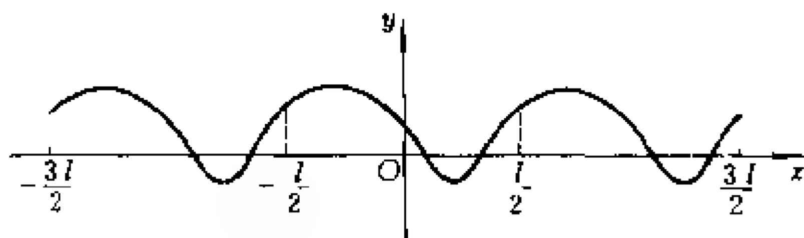


图 1—16

图1－16表示周期为 l 的一个周期函数. 在这函数定义域内每个长度为 l 的区间上，函数图形有相同的形状.

四、反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W. 因为 W 是函数值组成的数集，所以对于任一 $y_0\in W$，必定有 $x_0\in D$ 使

$$f(x_0)=y_0 \tag{1}$$

成立. 这样的 x_0 可能不止一个. 就图形1－17上看, 在 W 上任取

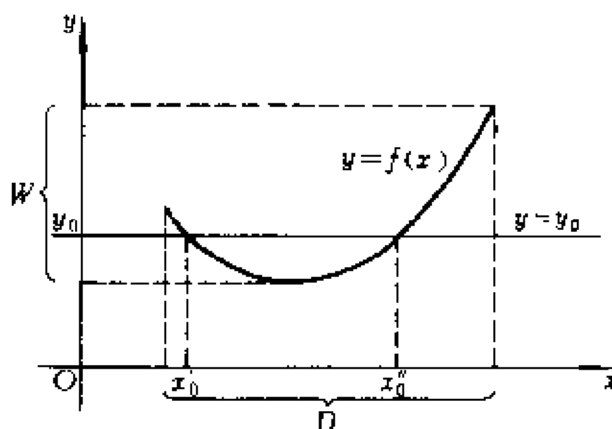


图 1－17

一点 y_0, 作平行于 x 轴的直线 $y=y_0$, 这直线与 $y=f(x)$ 图形的交点的横坐标就是适合(1)式的 x_0. 在图中, 这样的交点有两个, 它们的横坐标分别为 x_0' 及 x_0''. 一般地, 对于任一数值 $y\in W$, D 上至少可以确定一个数值 x 与 y 对应, 这个数值 x 适合关系

$$f(x)=y.$$

这里如果把 y 看作自变量, x 看作因变量, 按照函数概念, 就得到一个新的函数, 这个新的函数称为函数 $y=f(x)$ 的反函数, 记作 $x=\varphi(y)$. 这函数的定义域为 W, 值域为 D. 相对于反函数 $x=\varphi(y)$ 来说, 原来的函数 $y=f(x)$ 称为直接函数.

由上面的说明知道, 虽然 $y=f(x)$ 是单值函数, 反函数 $x=\varphi(y)$ 却不一定是单值的. 但如果在区间 I 上定义的函数 $y=f(x)$ 不仅单值, 而且是单调的, 则其反函数 $x-\varphi(y)$ 在 $W=\{y\mid y=f(x), x\in I\}$ 上是单值的. 这是因为, 若 $y=f(x)$ 是 I 上的单调函数, 则任取 I 上两个不同的数值 $x_1\neq x_2$ 时, 必有 $f(x_1)\neq f(x_2)$. 所以在 W 上任取一个数值 y_0 时, I 上不可能有两个不同的数值 x_1 及 x_2 使 $f(x_1)=y_0$ 及 $f(x_2)=y_0$ 同时成立.

例10 函数 $y=x^2$ 的定义域为 $(-\infty,-\infty)$, 值域为 $[0,+\infty)$. 在 $[0,+\infty)$ 上任取数值 $y\neq0$, 则适合关系

$$x^2=y$$

的数值 x 有两个，一个是 $x=\sqrt{y}$，另一个是 $x=-\sqrt{y}$（图1-18）. 所以 $y=f(x)=x^2$的反函数 $x=\varphi(y)$是多值函数. 即 $x=\pm\sqrt{y}$. 因为函数$y=x^2$在区间$[0,+\infty)$上是单调增加的，所以如果把 x 限制在$[0,+\infty)$上，则 $y=x^2$的反函数是单值的，即 $x=\sqrt{y}$，它称为函数 $y=x^2$的反函数的一个单值分支. 另一个单值分支为 $x=-\sqrt{y}$.

习惯上自变量用 x 表示，因变量用 y 表示. 如果把 $x=\varphi(y)$中的 y 改成 x，x 改成 y，则得 $y=\varphi(x)$. 因为函数的实质是对应

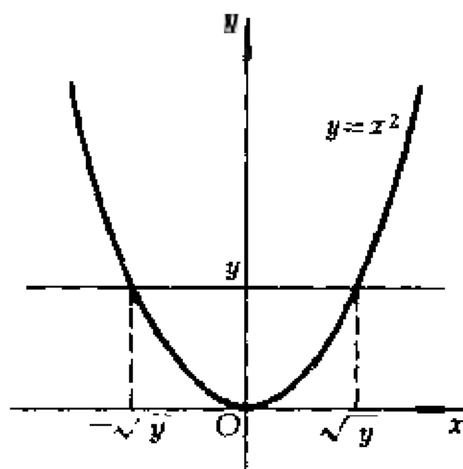


图 1-18

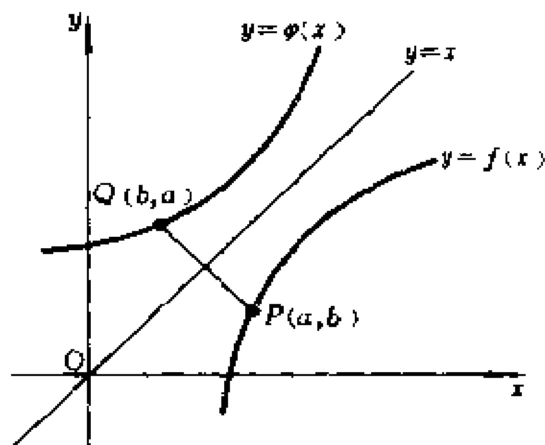


图 1-19

关系，只要对应关系不变，自变量和因变量用什么字母表示是无关紧要的，$x=\varphi(y)$与 $y=\varphi(x)$中表示对应关系的符号 φ 没有改变，这就表示它们是同一个函数. 因此如果函数 $y=f(x)$的反函数为 $x=\varphi(y)$，那末 $y=\varphi(x)$也是 $y=f(x)$的反函数. 例如 $y=x^2$的反函数可写成 $y=\pm\sqrt{x}$.

把直接函数 $y=f(x)$和反函数 $y=\varphi(x)$的图形画在同一个坐标平面上，这两个图形关于直线 $y=x$ 是对称的（图1-19）. 因为如果 $P(a,b)$是 $y=f(x)$图形上的点，则 $Q(b,a)$是 $y=\varphi(x)$图形上的点. 反之，若 $Q(b,a)$是 $y=\varphi(x)$图形上的点，则 $P(a,b)$是 $y=f(x)$图形上的点. 而 $P(a,b)$与 $Q(b,a)$关于直线 $y=x$ 是对称的

（即直线 $y=x$ 垂直且平分线段 PQ）.

习　题　1－1

1. 用区间表示变量的变化范围：

(1) $2<x\leqslant 6$；

(2) $x\geqslant 0$；

(3) $x^2<9$；

(4) $|x-3|\leqslant 1$.

2. 求函数

$$y=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

的定义域和值域.

3. 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\lg x^2$，$g(x)=2\lg x$；

(2) $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$，$g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$.

4. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{1-x}$；　　(2) $y=\sqrt{3x+2}$；

(3) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$；　　(4) $y=\sqrt{x^2-4}$；

(5) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$；　　(6) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$；

(7) $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$；　　(8) $y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$.

5. 用描点法作出函数 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 的图形.

6. 设 $f(x)=\sqrt{4+x^2}$，求下列函数值：

$$f(0),\ f(1),\ f(-1),\ f\left(\frac{1}{a}\right),\ f(x_0),\ f(x_0+h).$$

7. 若 $f(t)=2t^2+\dfrac{2}{t^2}+\dfrac{5}{t}+5t$，证明 $f(t)=f\left(\dfrac{1}{t}\right)$.

8. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3},\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3},\end{cases}$

求 $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)$，$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$，$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)$，$\varphi(-2)$，并作出函数 $y=\varphi(x)$ 的图形．

9．下列函数中哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些既非奇函数又非偶函数？

(1) $y=x^2(1-x^2)$；　　(2) $y=3x^2-x^3$；

(3) $y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$；　　(4) $y=x(x-1)(x+1)$；

(5) $y=\sin x-\cos x+1$；　　(6) $y=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$．

10．设 $f(x)=2x^2+6x-3$，求 $\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$ 及 $\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$，并指出 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 中哪个是奇函数哪个是偶函数？

11．设下面所考虑的函数都是定义在对称区间 $(-l,l)$ 上的．证明：

(1) 两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数；

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数；

(3) 定义在对称区间 $(-l,l)$ 上的任意函数可表示为一个奇函数与一个偶函数的和．

12．试证下列函数在指定区间内的单调性：

(1) $y=x^2$，$(-1,0)$；

(2) $y=\lg x$，$(0,+\infty)$；

(3) $y=\sin x$，$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$．

13．设 $f(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 内的奇函数，若 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加，证明 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加．

14．下列各函数中哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期：

(1) $y=\cos(x-2)$；　　(2) $y=\cos 4x$；

(3) $y=1+\sin \pi x$；　　(4) $y=x\cos x$；

(5) $y=\sin^2 x$．

15．求下列函数的反函数：

(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$；　　(2) $y=\frac{1-x}{1+x}$；

(3) $y=\frac{ax+b}{cx+d}$　$(ad-bc\neq 0)$．又问当 a、b、c、d 满足什么条件时，这反函数与直接函数相同？

16. 对于函数 $f(x)=x^2$，如何选择邻域 $U(0,\delta)$ 的半径 δ，就能使与任一 $x\in U(0,\delta)$ 所对应的函数值 $f(x)$ 都在邻域 $U(0,2)$ 内？

17. 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义，试证：函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

第二节　初等函数

一、幂函数

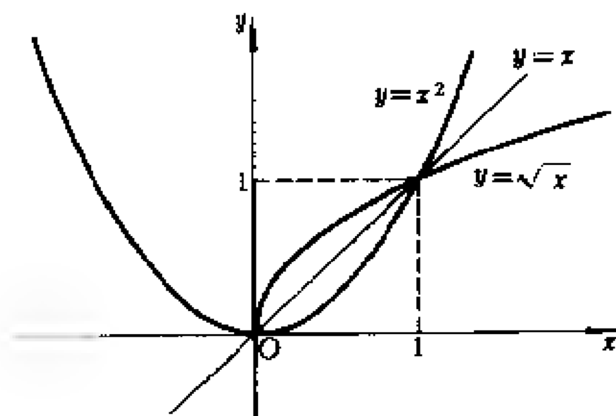
函数

$$y=x^\mu\ (\mu \text{是常数})$$

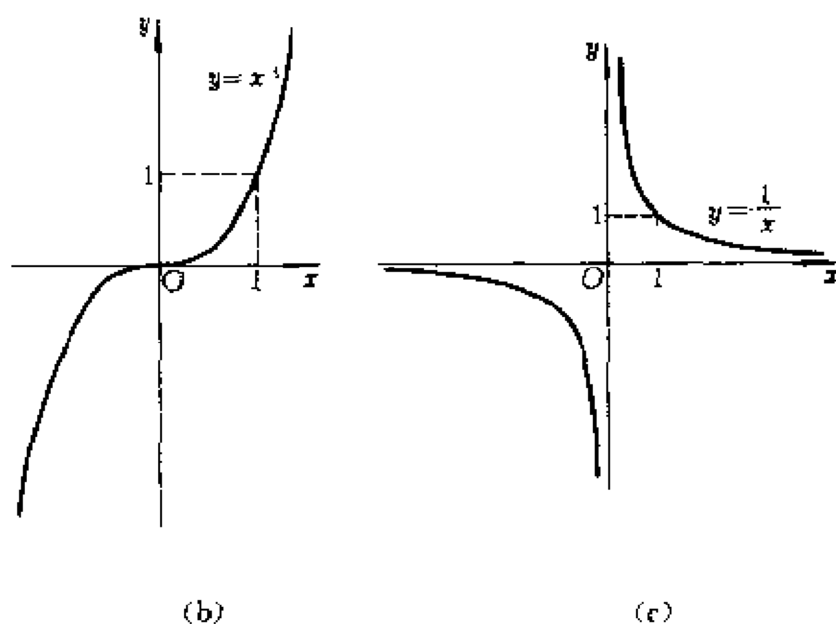
叫做幂函数.

幂函数 $y=x^\mu$ 的定义域，要看 μ 是什么数而定. 例如：当 $\mu=3$ 时，$y=x^3$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$；当 $\mu=\frac{1}{2}$ 时，$y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$ 的定义域是 $[0,+\infty)$；当 $\mu=-\frac{1}{2}$ 时，$y=x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 的定义域是 $(0,+\infty)$. 但不论 μ 取什么值，幂函数在 $(0,+\infty)$ 内总有定义.

$y=x^\mu$ 中，$\mu=1$、2、3、$\frac{1}{2}$、-1 时是最常见的幂函数. 它们的图形如图1—20所示.



(a)



(b) (c)

图 1-20

二、指数函数与对数函数

1. 指数函数

函数

$$y=a^x(a\text{ 是常数且 }a>0,a\neq1)$$

叫做指数函数，它的定义域是区间$(-\infty,+\infty)$.

因为对于任何实数值 x，总有 $a^x>0$，又 $a^0=1$，所以指数函数的图形，总在 x 轴的上方，且通过点(0,1).

若 $a>1$，指数函数 a^x 是单调增加的.

若$0<a<1$，指数函数 a^x 是单调减少的.

由于 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x=a^{-x}$，所以 $y=a^x$ 的图形与 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ 的图形是关于 y 轴对称的(图1—21).

以常数 e=2.7182818…为底的指数函数

$$y=e^x$$

是科技中常用的指数函数. 关于常数 e 的意义将在第七节中说明.

2. 对数函数

指数函数 $y=a^x$ 的反函数，记作

$$y=\log_a x\ (a\text{ 是常数且 }a>0, a\neq 1),$$

叫做对数函数. 它的定义域是区间$(0,+\infty)$.

对数函数的图形,可以从它所对应的指数函数 $y=a^x$ 的图形按反函数作图法的一般规则作出,这就是:关于直线 $y=x$ 作对称于曲线 $y=a^x$ 的图形,就得 $y=\log_a x$ 的图形(图1—22).

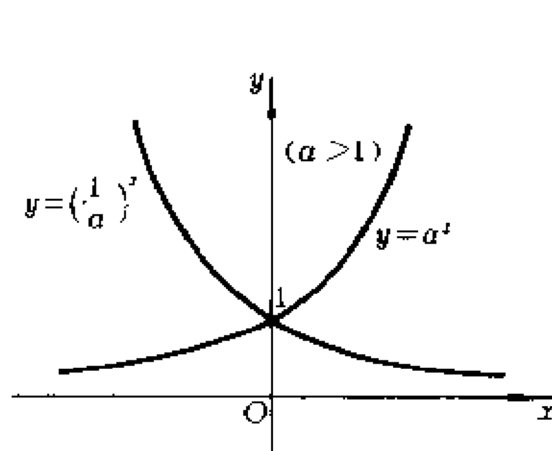


图 1-21

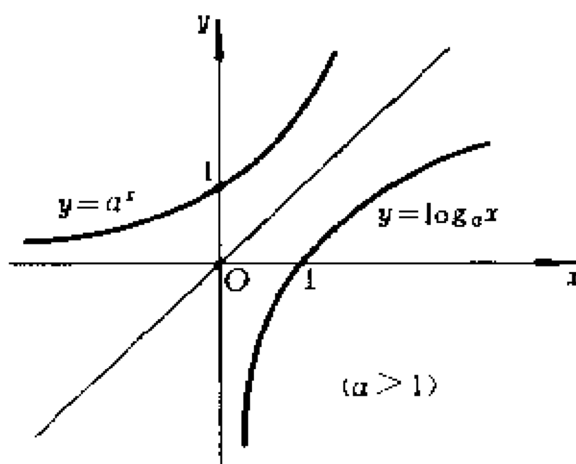


图 1-22

$y=\log_a x$ 的图形总在 y 轴右方,且通过点$(1,0)$.

若 $a>1$,对数函数 $\log_a x$ 是单调增加的,在开区间$(0,1)$内函数值为负,而在区间$(1,+\infty)$内函数值为正.

若$0<a<1$,对数函数 $\log_a x$ 是单调减少的. 在开区间$(0,1)$内函数值为正,而在区间$(1,+\infty)$内函数值为负.

科技中常用以常数 e 为底的对数函数

$$y=\log_e x$$

叫做自然对数函数,简记作

$$y=\ln x.$$

三、三角函数与反三角函数

1. 三角函数

常用的三角函数有

正弦函数 $y=\sin x$ (图 1—23),

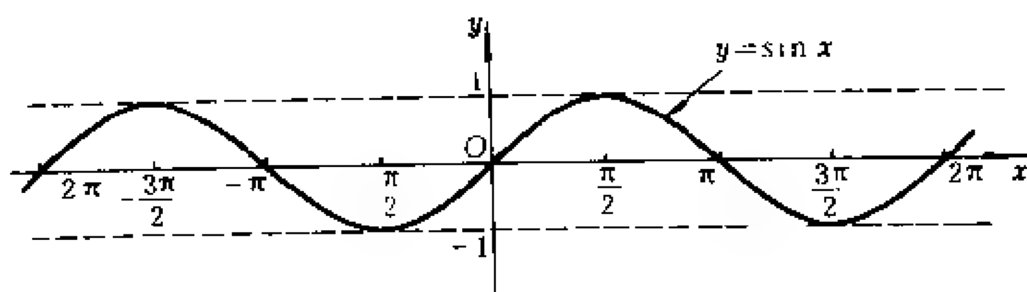


图 1－23

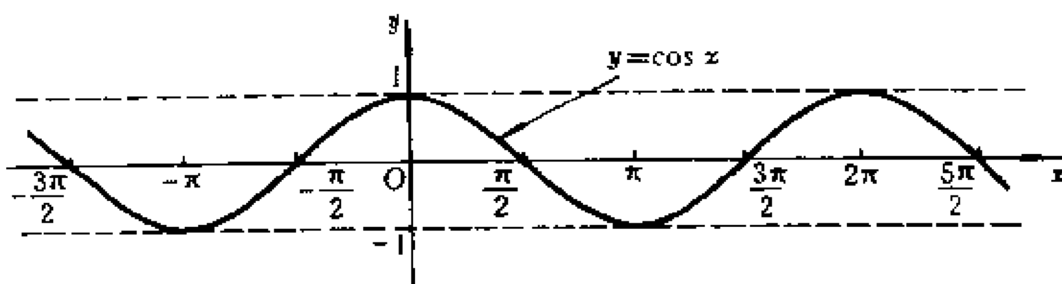


图 1－24

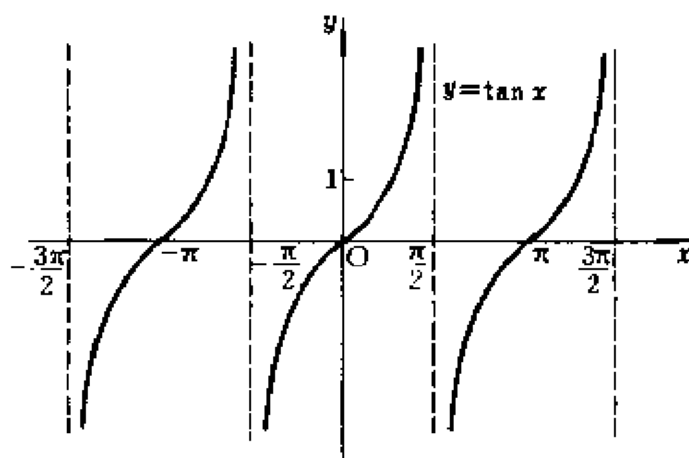


图 1－25

余弦函数 $y=\cos x$（图 1－24），

正切函数 $y=\tan x$ （图1－25），

余切函数 $y=\cot x$ （图1－26），

其中自变量以弧度作单位来表示.

正弦函数和余弦函数都是以 2π 为周期的周期函数，它们的定义域都是区间 $(-\infty,+\infty)$，值域都是闭区间 $[-1,1]$.

正弦函数是奇函数，余弦函数是偶函数.

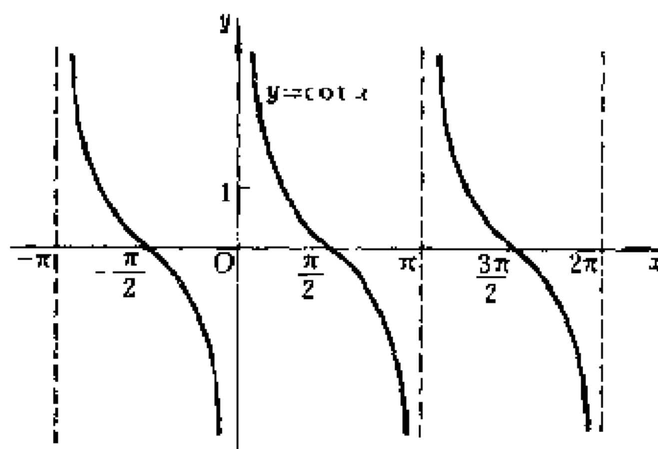


图 1−26

由于 $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$，所以，把正弦曲线 $y=\sin x$ 沿 x 轴向左移动一段距离 $\frac{\pi}{2}$，就获得余弦曲线 $y=\cos x$.

正切函数 $y=\tan x$ 的定义域

$$D=\{x\mid x\in\mathbb{R},x\neq(2n+1)\frac{\pi}{2},n\in\mathbb{Z}\}.$$

余切函数 $y=\cot x$ 的定义域

$$D=\{x\mid x\in\mathbb{R},x\neq n\pi,n\in\mathbb{Z}\}.$$

这两个函数的值域都是区间$(-\infty,+\infty)$.

正切函数和余切函数都是以 π 为周期的周期函数，它们都是奇函数.

此外，尚有另外两个三角函数，它们是

正割函数　$y=\sec x$，

它是余弦函数的倒数，即

$$\sec x=\frac{1}{\cos x};$$

余割函数　$y=\csc x$.

它是正弦函数的倒数，即

$$\csc x=\frac{1}{\sin x}.$$

它们都是以2π为周期的周期函数，并且在开区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内都是无界函数.

2. 反三角函数

反三角函数是三角函数的反函数. 三角函数$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$和$y=\cot x$的反函数依次为

反正弦函数　$y=\mathrm{Arcsin}\ x$（图1—27），

反余弦函数　$y=\mathrm{Arccos}\ x$（图1—28），

反正切函数　$y=\mathrm{Arctan}\ x$（图1—29），

反余切函数　$y=\mathrm{Arccot}\ x$（图1—30）.

反三角函数的图形都可由相应的三角函数的图形按反函数作图法的一般规则作出.

这四个反三角函数都是多值函数. 但是，我们可以选取这些函数的单值支. 例如，把$\mathrm{Arcsin}\ x$的值限制在闭区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上，称为反正弦函数的主值，并记作$\arcsin x$. 这样，函数$y=\arcsin x$就是定义在闭区间$[-1,1]$上的单值函数，且有

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

通常我们也称$y=\arcsin x$为反正弦函数，它在闭区间$[-1,1]$上是单调增加的，它的图形如图1—27中实线部分所示.

类似地，其他三个反三角函数的主值也简称为反余弦函数、反正切函数和反余切函数，它们都是单值函数，它们的定义域、值域、单调性等如下：

反余弦函数$y=\arccos x$的定义域为闭区间$[-1,1]$，值域为闭区间$[0,\pi]$，它在$[-1,1]$上单调减少，图形如图1—28中实线部分所示.

反正切函数$y=\arctan x$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为开区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，它在$(-\infty,+\infty)$内单调增加，图形如图1—29中实线部分所示.

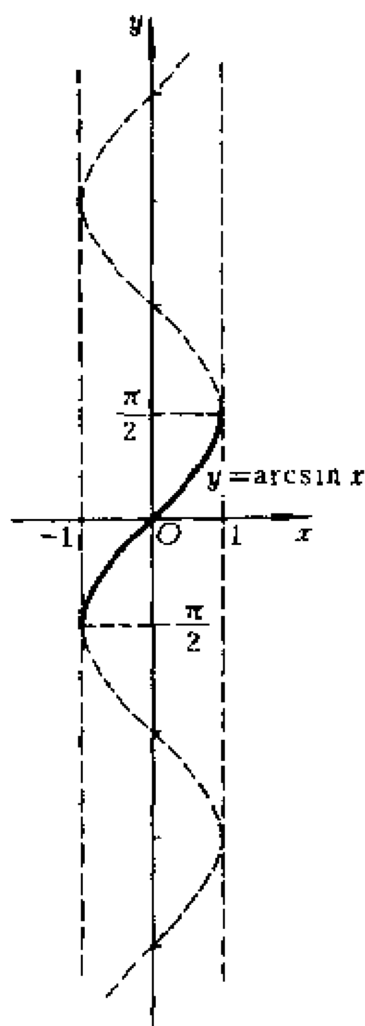


图 1－27

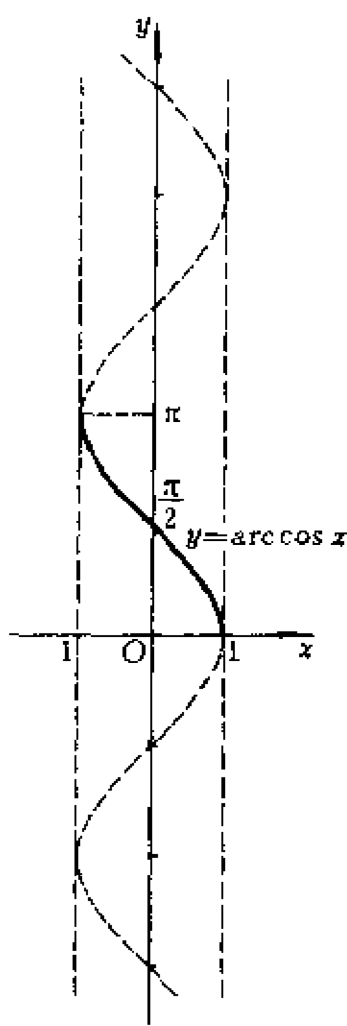


图 1－28

反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为开区间$(0,\pi)$，它在$(-\infty,+\infty)$内单调减少，图形如图1－30中实线部分所示.

四、复合函数　初等函数

1. 复合函数　进行函数研究时，把某些函数看作是由几个函数复合而成的复合函数，这样对函数的研究会带来方便. 下面先举一个具体例子说明什么叫复合函数.

例如，函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 表示 y 是 x 的函数，它的定义域为

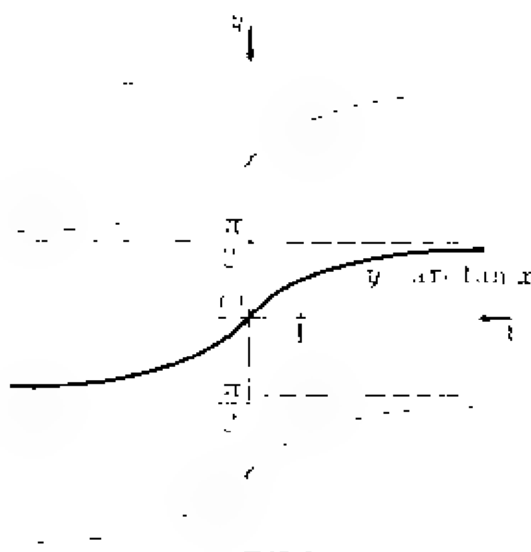


图 1-29

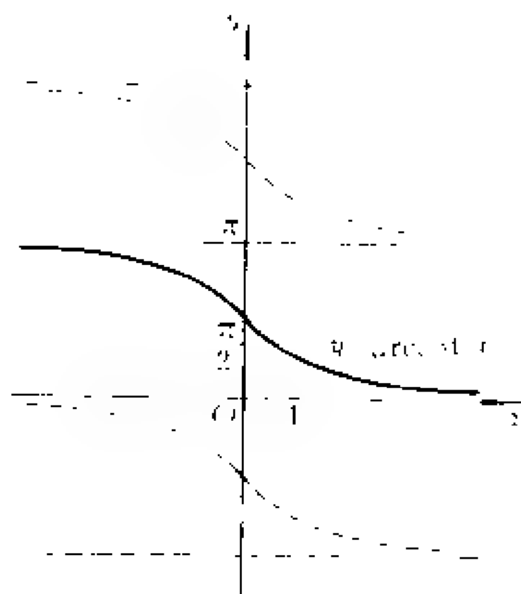


图 1-30

$[-1,1]$. 如果我们引进辅助变量 u，把这函数的对应法则看作是这样的：首先，对于任一 $x\in[-1,1]$，通过函数 $u=1-x^2$ 得到对应的 u 值；然后，对于这个 u 值，通过函数 $y=\sqrt{u}$ 得到对应的 y 值. 这时，我们便说函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 是由函数 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=1-x^2$ 复合而成的复合函数，辅助变量 u 则称为中间变量.

一般地，若函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u=\varphi(x)$ 在 D_2[1] 上有定义，而 $W_2=\{u|u=\varphi(x),x\in D_2\}$，且 $W_2\subset D_1$，那末，对于任一 $x\in D_2$，通过函数 $u=\varphi(x)$ 有确定的 $u\in W_2$ 与之对应. 由于 $W_2\subset D_1$，因此对于这个 u 值，通过函数 $y=f(u)$ 有确定的 y 值与之对应. 这样，对于任一 $x\in D_2$，通过 u 有确定的 y 值与之对应，从而得到一个以 x 为自变量、y 为因变量的函数，这个函数称为由函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，记作

$$y=f[\varphi(x)],$$

而 u 称为中间变量.

由以上说明可知，复合函数是说明函数对应法则的某种表达

[1] D_2 是看作复合函数的那个函数的定义域.

方式的一个概念. 利用这一概念, 有时可以把函数分解成几个函数, 另一方面也可利用它来产生新的函数.

例如, 函数 $y=\arctan(x^2)$ 可看作由 $y=\arctan u$ 和 $u=x^2$ 复合而成的. 又例如, $y=\sqrt{x^2}$ 可看作由 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=x^2$ 复合而成的, 这个函数实际就是函数 $y=|x|$.

必须注意, 不是任何两个函数都能够复合成一个复合函数的. 例如, $y=\arcsin u$ 及 $u=2+x^2$ 就不能复合成一个复合函数. 因为对于 $u=2+x^2$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内任何 x 值所对应的 u 值(都大于或等于2), 都不能使 $y=\arcsin u$ 有意义.

复合函数也可以由两个以上的函数经过复合构成. 例如, 设 $y=\sqrt{u}$, $u=\cot v$, $v=\frac{x}{2}$, 则得复合函数 $y=\sqrt{\cot \frac{x}{2}}$, 这里 u 及 v 都是中间变量.

2. 初等函数 幂函数, 指数函数, 对数函数, 三角函数和反三角函数统称为基本初等函数. 由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数, 称为初等函数. 例如

$$y=\sqrt{1-x^2},\quad y=\sin^2 x,\quad y=\sqrt{\cot \frac{x}{2}}$$

都是初等函数. 在本课程中所讨论的函数绝大多数都是初等函数.

五、双曲函数与反双曲函数

应用上常遇到的双曲函数是

双曲正弦 $\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$,

双曲余弦 $\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$,

双曲正切 $\operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

这三个双曲函数的简单性态如下：

双曲正弦的定义域为$(-\infty,+\infty)$；它是奇函数，它的图形通过原点且关于原点对称.在区间$(-\infty,+\infty)$内它是单调增加的.当x的绝对值很大时，它的图形在第一象限内接近于曲线$y=\frac{1}{2}e^x$；在第三象限内接近于曲线$y=-\frac{1}{2}e^{-x}$(图1-31).

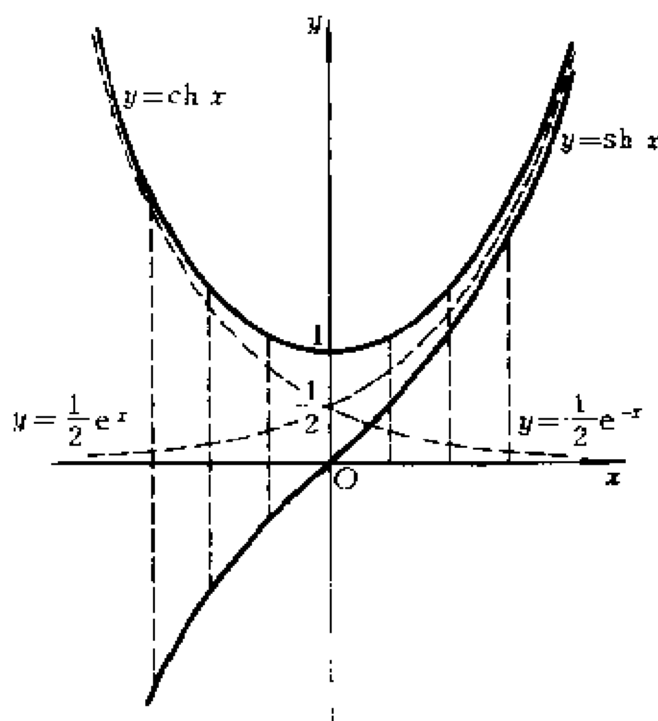


图 1 31

双曲余弦的定义域为$(-\infty,+\infty)$；它是偶函数，它的图形通过点$(0,1)$且关于y轴对称.在区间$(-\infty,0)$内它是单调减少的；在区间$(0,+\infty)$内它是单调增加的.$\operatorname{ch} 0=1$是这函数的最小值.当x的绝对值很大时，它的图形在第一象限内接近于曲线$y=\frac{1}{2}e^x$，在第二象限内接近于曲线$y=\frac{1}{2}e^{-x}$.(图1-31).

双曲正切的定义域为$(-\infty,+\infty)$；它是奇函数，它的图形通过原点且关于原点对称.在区间$(-\infty,+\infty)$内它是单调增加的.它的图形夹在水平直线$y=1$及$y=-1$之间；且当x的绝对值很大

时，它的图形在第一象限内接近于直线 $y=1$，而在第三象限内接近于直线 $y=-1$（图1—32）.

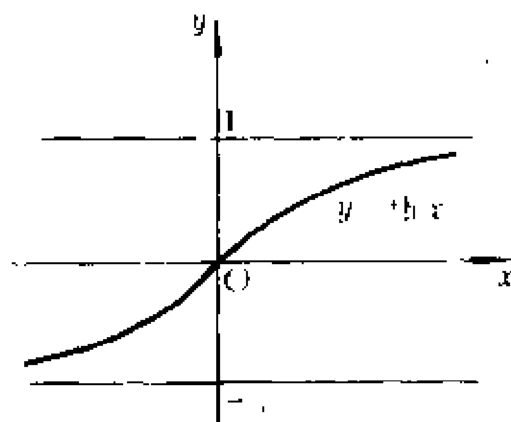


图 1—32

根据双曲函数的定义，可证下列四个公式：

$$\operatorname{sh}(x+y)=\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y+\operatorname{ch} x \operatorname{sh} y; \tag{1}$$

$$\operatorname{sh}(x-y)=\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y-\operatorname{ch} x \operatorname{sh} y; \tag{2}$$

$$\operatorname{ch}(x+y)=\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y+\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y; \tag{3}$$

$$\operatorname{ch}(x-y)=\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y-\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y. \tag{4}$$

我们来证明公式(1)，其它三个公式读者可自行证明. 由定义，得

$$\begin{aligned}\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y+\operatorname{ch} x \operatorname{sh} y &=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y+e^{-y}}{2}+\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y-e^{-y}}{2}\\ &=\frac{e^{x+y}-e^{y-x}+e^{x-y}-e^{-(x+y)}}{4}\\ &\quad+\frac{e^{x+y}+e^{y-x}-e^{x-y}-e^{-(x+y)}}{4}\\ &=\frac{e^{x+y}-e^{-(x+y)}}{2}=\operatorname{sh}(x+y).\end{aligned}$$

由以上几个公式可以导出其它一些公式，例如：

在公式(4)中令 $x=y$，并注意到 $\operatorname{ch} 0=1$，得

$$\text{ch}^2x-\text{sh}^2x=1; \tag{5}$$

在公式(1)中令 $x=y$，得

$$\text{sh}\ 2x=2\text{sh}\ x\text{ch}\ x; \tag{6}$$

在公式(3)中令 $x=y$，得

$$\text{ch}\ 2x=\text{ch}^2x+\text{sh}^2x. \tag{7}$$

以上关于双曲函数的公式(1)至(7)与三角函数的有关公式相类似，把它们对比一下可帮助记忆.

双曲函数 $y=\text{sh}\ x$，$y=\text{ch}x$，$y=\text{th}\ x$ 的反函数依次记为

反双曲正弦　$y=\text{arsh}\ x$，

反双曲余弦　$y=\text{arch}\ x$，

反双曲正切　$y=\text{arth}\ x$.

这些反双曲函数都可通过自然对数函数来表示，分别讨论如下：

$y=\text{arsh}\ x$ 是 $x=\text{sh}\ y$ 的反函数，因此，从

$$x=\frac{e^y-e^{-y}}{2}$$

中解出 y 来便是 $\text{arsh}\ x$. 令 $u=e^y$，则由上式有

$$u^2-2xu-1=0.$$

这是关于 u 的一个二次方程，它的根为

$$u=x\pm\sqrt{x^2+1}.$$

因 $u=e^y>0$，故上式根号前应取正号，于是

$$u=x+\sqrt{x^2+1}.$$

由于 $y=\ln u$，故得

$$y=\text{arsh}\ x=\ln(x+\sqrt{x^2+1}).$$

函数 $y=\text{arsh}\ x$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，它是奇函数，在区间$(-\infty,+\infty)$内为单调增加. 由 $y=\text{sh}\ x$ 的图形，根据反函数的作图法，可得 $y=\text{arsh}\ x$ 的图形如图1－33所示.

下面讨论双曲余弦的反函数. 由 $x=\text{ch}\ y$，有

$$x=\frac{e^y+e^{-y}}{2},$$

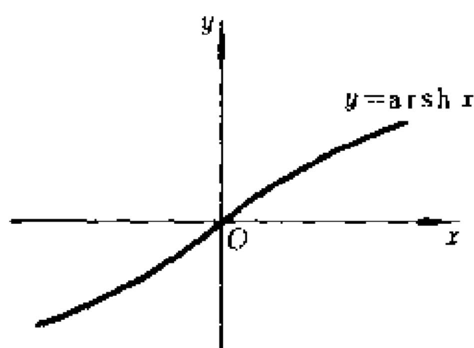


图 1-33

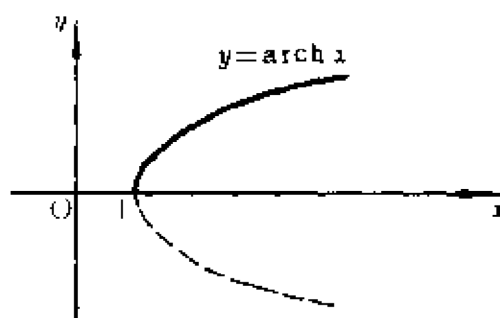


图 1-34

由此得 $e^y=x\pm\sqrt{x^2-1}$，故

$$y=\ln(x\pm\sqrt{x^2-1}).$$

上式中 x 的值必须满足条件 $x\geqslant1$，而其中平方根前的符号可正可负．当 $x=1$ 时，$y=0$；对于大于1的每个 x 值，y 有 $\ln(x+\sqrt{x^2-1})$ 及 $\ln(x-\sqrt{x^2-1})$ 两值与之对应．由于

$$\begin{aligned}\ln(x-\sqrt{x^2-1})&=\ln\frac{(x-\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})}{x+\sqrt{x^2-1}}\\&=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\\&=-\ln(x+\sqrt{x^2-1}),\end{aligned}$$

故

$$y=\pm\ln(x+\sqrt{x^2-1}).$$

由此可见，双曲余弦的反函数是双值的，它的图形是关于 x 轴对称的两支，我们取其正值的一支作为该函数的主值，于是有

$$y=\operatorname{arch}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1}).$$

这样规定的函数 $y=\operatorname{arch}x$ 便成为单值的．它在区间 $[1,+\infty)$ 上是单调增加的(图1－34).

类似地可得

$$y=\operatorname{arth} x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

这函数的定义域为开区间(−1,1),它在开区间(−1,1)内是单调增加的奇函数.它的图形关于原点对称(图1−35).

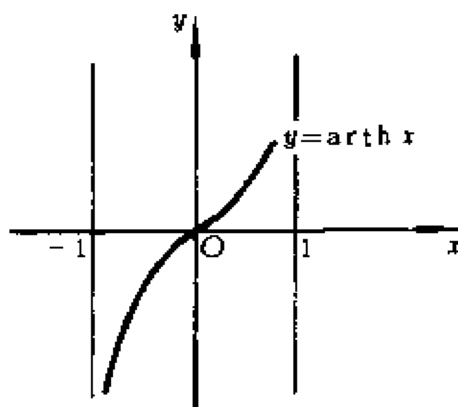


图 1−35

习 题 1 2

1. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\sin\sqrt{x}$;　(2) $y=\tan(x+1)$;

(3) $y=\arcsin(x-3)$;　(4) $y=\sqrt{3-x}-\arctan\frac{1}{x}$;

(5) $y=\ln(x+1)$;　(6) $y=e^{\frac{1}{x}}$.

2. 设 $f(x)=\arcsin x$,求下列函数值:

$$f(0),\ f(-1),\ f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ f(1).$$

3. 设 $G(x)=\frac{1}{2}\arccos\frac{x}{2}$,求下列函数值:

$$G(0),\ G(1),\ G(\sqrt{2}),\ G(-\sqrt{3}),\ G(-2).$$

4. 设 $F(x)=e^x$.证明:

(1) $F(x)\cdot F(y)=F(x+y)$;

(2) $\frac{F(x)}{F(y)}=F(x-y)$.

5. 设 $G(x)=\ln x$.证明:当 $x>0,y>0$,下列等式成立:

(1) $G(x)+G(y)=G(xy)$;

(2) $G(x)-G(y)=G\left(\frac{x}{y}\right)$.

6. 利用 $y=\sin x$ 的图形,作出下列函数的图形:

(1) $y=\frac{1}{2}+\sin x$；　　(2) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$；

(3) $y=3\sin x$；　　(4) $y=\sin 2x$；

(5) $y=3\sin\left(2x+\frac{2}{3}\pi\right)$.

7. 利用图形的"叠加"，作下列函数的图形：

(1) $y=x+\frac{1}{x}$；　　(2) $y=x+\sin x$；

(3) $y=\sin x+\cos x$.

8. 求下列函数的反函数：

(1) $y=2\sin 3x$；　　(2) $y=1+\ln(x+2)$；

(3) $y=\frac{2^x}{2^x+1}$.

9. 在下列各题中，求由所给函数复合而成的函数，并求这函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值：

(1) $y=u^2, u=\sin x$，$x_1=\frac{\pi}{6}$，$x_2=\frac{\pi}{3}$；

(2) $y=\sin u$，$u=2x$，$x_1=\frac{\pi}{8}$，$x_2=\frac{\pi}{4}$；

(3) $y=\sqrt{u}$，$u=1+x^2$，$x_1=1$，$x_2=2$；

(4) $y=e^u, u=x^2, x_1=0, x_2=1$；

(5) $y=u^2, u=e^x$，$x_1=1, x_2=-1$.

10. 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，问 (1) $f(x^2)$，(2) $f(\sin x)$，(3) $f(x+a)$，$(a>0)$，(4) $f(x+a)+f(x-a)(a>0)$ 的定义域各是什么？

11. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1,\end{cases}$　　$g(x)=e^x$，

求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$，并作出这两个函数的图形.

12. 证明本节公式(2)、(3)、(4).

13. 证明：

(1) $\operatorname{sh} x+\operatorname{sh} y=2\operatorname{sh}\frac{x+y}{2}\operatorname{ch}\frac{x-y}{2}$；

(2) $\operatorname{ch} x-\operatorname{ch} y=2\operatorname{sh}\frac{x+y}{2}\operatorname{sh}\frac{x-y}{2}$.

14. 已知一物体与地面的摩擦系数是 μ，重量是 P. 设有一与水平方向成 α 角的拉力 F，使物体从静止开始移动(图1-36). 求物体开始移动时拉力 F 与角 α 之间的函数关系式.

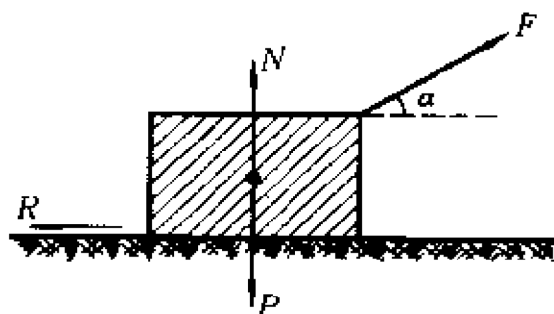


图 1—36

15. 已知水渠的横断面为等腰梯形，斜角 $\varphi=40°$(图1—37). 当过水断面 $ABCD$ 的面积为定值 S_0 时，求湿周 $L(L=AB+BC+CD)$ 与水深 h 之间的函数关系式，并说明定义域.

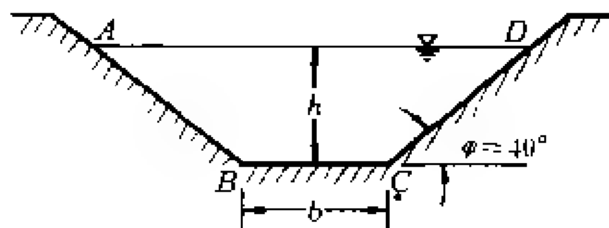


图 1—37

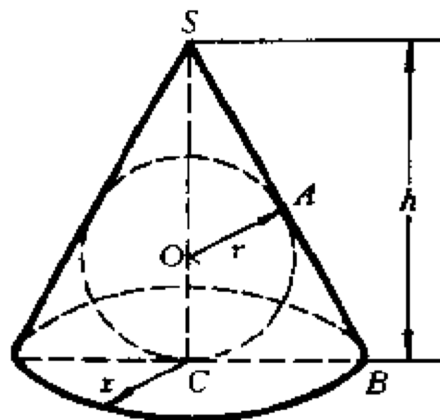


图 1—38

16. 一球的半径为 r，作外切于球的圆锥(图1—38)，试将其体积表示为高的函数，并说明定义域.

17. 火车站收取行李费的规定如下：当行李不超过50kg 时，按基本运费计算. 如从上海到某地每 kg 收0.15元. 当超过50kg 时，超重部分按每千克0.25元收费. 试求上海到该地的行李费 y(元)与重量 x(kg)之间的函数关系式，并画出这函数的图形.

第三节　数列的极限

极限概念是由于求某些实际问题的精确解答而产生的. 例如，我国古代数学家刘徽(公元3世纪)利用圆内接正多边形来推算圆

面积的方法——割圆术，就是极限思想在几何学上的应用.

设有一圆，首先作内接正六边形，把它的面积记为 A_1；再作内接正十二边形，其面积记为 A_2；再作内接正二十四边形，其面积记为 A_3；循此下去，每次边数加倍，一般地把内接正$6\times 2^{n-1}$边形的面积记为 $A_n(n\in\mathbb{N})$. 这样，就得到一系列内接正多边形的面积：

$$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots,$$

它们构成一列有次序的数. 当 n 越大，内接正多边形与圆的差别就越小，从而以 A_n 作为圆面积的近似值也越精确. 但是无论 n 取得如何大，只要 n 取定了，A_n 终究只是多边形的面积，而还不是圆的面积. 因此，设想 n 无限增大（记为 $n\to\infty$，读作 n 趋于无穷大），即内接正多边形的边数无限增加，在这个过程中，内接正多边形无限接近于圆，同时 A_n 也无限接近于某一确定的数值，这个确定的数值就理解为圆的面积. 这个确定的数值在数学上称为上面这列有次序的数（所谓数列）$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots$ 当 $n\to\infty$时的极限. 在圆面积问题中我们看到，正是这个数列的极限才精确地表达了圆的面积.

在解决实际问题中逐渐形成的这种极限方法，已成为高等数学中的一种基本方法，因此有必要作进一步的阐明.

先说明数列的概念. 如果按照某一法则，有第一个数 x_1，第二个数 x_2，…这样依次序排列着，使得对应着任何一个正整数 n 有一个确定的数 x_n，那末，这列有次序的数

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

就叫做数列.

数列中的每一个数叫做数列的项，第 n 项 x_n 叫做数列的一般项. 例如：

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots;$$

$$2, 4, 8, \cdots, 2^n, \cdots;$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots;$$

$$1, -1, 1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots;$$

$$2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \cdots, \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}, \cdots$$

都是数列的例子，它们的一般项依次为

$$\frac{n}{n+1},\ 2^n,\ \frac{1}{2^n},\ (-1)^{n+1},\ \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}.$$

以后，数列

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

也简记为数列$\{x_n\}$.

在几何上，数列$\{x_n\}$可看作数轴上的一个动点，它依次取数轴上的点$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$(图1－39).

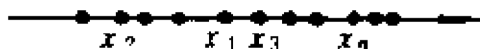


图　1－39

数列$\{x_n\}$可看作自变量为正整数n的函数：

$$x_n = f(n),$$

它的定义域是全体正整数，当自变量n依次取1，2，3，…等一切正整数时，对应的函数值就排列成数列$\{x_n\}$.

对于我们要讨论的问题来说，重要的是：当n无限增大时（即$n\to\infty$时），对应的$x_n = f(n)$是否能无限接近于某个确定的数值？如果能够的话，这个数值等于多少？

我们对数列

$$2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \cdots, \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}, \cdots \tag{1}$$

来分析. 在这数列中，

$$x_n = \frac{n+(-1)^{n-1}}{n} = 1 + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

我们知道，两个数a与b之间的接近程度可以用这两个数之差的绝对值$|b-a|$来度量（在数轴上$|b-a|$表示点a与点b之间的距离）. $|b-a|$越小，a与b就越接近.

就数列(1)来说，因为

$$|x_n-1|=\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right|=\frac{1}{n},$$

由此可见，当 n 越来越大时，$\frac{1}{n}$ 越来越小，从而 x_n 就越来越接近于 1. 因为只要 n 足够大，$|x_n-1|$ 即 $\frac{1}{n}$ 可以小于任意给定的正数，所以说，当 n 无限增大时，x_n 无限接近于1. 例如，给定 $\frac{1}{100}$，欲使 $\frac{1}{n}<\frac{1}{100}$，只要 $n>100$，即只要把数列(1)开始的100项除外，从第101项 x_{101} 起，后面的一切项

$$x_{101},x_{102},x_{103},\cdots,x_n,\cdots$$

就都能使不等式

$$|x_n-1|<\frac{1}{100}$$

成立. 同样地，如果给定 $\frac{1}{10000}$，则从第10001项 x_{10001} 起，后面的一切项

$$x_{10001},x_{10002},x_{10003},\cdots,x_n,\cdots$$

就都能使不等式

$$|x_n-1|<\frac{1}{10000}$$

成立. 一般地，不论给定的正数 ε 多么小，总存在着一个正整数 N，使得对于 $n>N$ 时的一切 x_n，不等式

$$|x_n-1|<\varepsilon$$

都成立. 这就是数列 $x_n=\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}$ $(n=1,2,\cdots)$ 当 $n\to\infty$ 时无限接近于1这件事的实质. 这样的一个数1，叫做数列 $x_n=\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}$ $(n=1,2,\cdots)$ 当 $n\to\infty$ 时的极限.

一般地，对于数列

$$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$$

来说，有下列定义：

定义 如果数列$\{x_n\}$与常数a有下列关系：对于任意给定的正数ε(不论它多么小)，总存在正整数N，使得对于$n>N$时的一切x_n，不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

都成立，则称常数a是数列$\{x_n\}$的极限，或者称数列$\{x_n\}$收敛于a，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

或
$$x_n\to a \quad (n\to\infty).$$

如果数列没有极限，就说数列是发散的.

上面定义中正数ε可以任意给定是很重要的，因为只有这样，不等式$|x_n-a|<\varepsilon$才能表达出x_n与a无限接近的意思. 此外还应注意到：定义中的正整数N是与任意给定的正数ε有关的，它随着ε的给定而选定.

我们给"数列$\{x_n\}$的极限为a"一个几何解释：

将常数a及数列$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$在数轴上用它们的对应点表示出来，再在数轴上作点$a$的$\varepsilon$邻域即开区间$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$(图1－40).

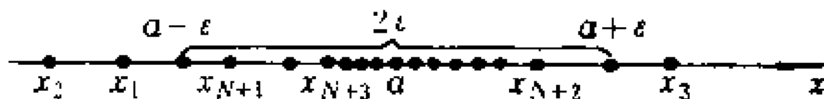


图 1－10

因不等式
$$|x_n-a|<\varepsilon$$
与不等式
$$a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$$
等价，所以当$n>N$时，所有的点x_n都落在开区间$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$内，而只有有限个(至多只有$N$个)在这区间以外.

数列极限的定义并未直接提供如何去求数列的极限. 以后要讲极限的求法，而现在只先举几个说明极限概念的例子.

例1 证明数列

$$2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots$$

的极限是1.

证 $|x_n-a|=\left|\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|=\frac{1}{n}$,
为了使$|x_n-a|$小于任意给定的正数ε,只要

$$\frac{1}{n}<\varepsilon \quad 或 \quad n>\frac{1}{\varepsilon}.$$

所以,对于任意给定的正数ε,取正整数$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,则当$n>N$时,就有

$$\left|\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|<\varepsilon,$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1.$$

例2 已知$x_n=\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$,证明数列$\{x_n\}$的极限是0.

证 $|x_n-a|=\left|\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}-0\right|=\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{n+1}$.

对于任意给定的正数ε(设$\varepsilon<1$),只要

$$\frac{1}{n+1}<\varepsilon \quad 或 \quad n>\frac{1}{\varepsilon}-1,$$

不等式$|x_n-a|<\varepsilon$必定成立.所以,取正整数$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]$,则当$n>N$时就有

$$\left|\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}-0\right|<\varepsilon,$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}=0.$$

注意 在利用数列极限的定义来论证某个数a是数列$\{x_n\}$的极限时,重要的是对于任意给定的正数ε,要能够指出定义中所说的这种正整数N确实存在,但没有必要去求最小的N.如果知道$|x_n-a|$小于某个量(这个量是n的一个函数),那末当这个量小于ε时,$|x_n-a|<\varepsilon$当然也成立.若令这个量小于ε来定出N比较方便的话,就可采用这种方法.例2便是这样做的.

例3 设$|q|<1$，证明等比数列

$$1, q, q^2, \cdots, q^{n-1}, \cdots$$

的极限是0.

证 任意给定$\varepsilon>0$（设$\varepsilon<1$）.

因为 $$|x_n-0|=|q^{n-1}-0|=|q|^{n-1},$$

要使$|x_n-0|<\varepsilon$，只要

$$|q|^{n-1}<\varepsilon.$$

取自然对数，得$(n-1)\ln|q|<\ln\varepsilon$. 因$|q|<1$，$\ln|q|<0$，

故 $$n>1+\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}.$$

取$N=\left[1+\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]$，则当$n>N$时，就有

$$|q^{n-1}-0|<\varepsilon，即 \lim_{n\to\infty}q^{n-1}=0.$$

下面三个定理说明有关收敛数列的性质.

定理1（极限的唯一性） **数列$\{x_n\}$不能收敛于两个不同的极限.**

证 用反证法. 假设同时有$x_n\to a$及$x_n\to b$，且$a<b$. 取$\varepsilon=\frac{b-a}{2}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，故存在正整数$N_1$，使得对于$n>N_1$的一切$x_n$，不等式

$$|x_n-a|<\frac{b-a}{2} \tag{2}$$

都成立. 同理，因为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$，故存在正整数$N_2$，使得对于$n>N_2$的一切$x_n$，不等式

$$|x_n-b|<\frac{b-a}{2} \tag{3}$$

都成立. 取$N=\max\{N_1,N_2\}$（这式子表示N是N_1和N_2中较大的那个数），则当$n>N$时，(2)式及(3)式会同时成立. 但由(2)式有$x_n<\frac{a+b}{2}$，由(3)式有$x_n>\frac{a+b}{2}$，这是不可能的. 这矛盾证明了本定理的断言.

例4 证明数列 $x_n=(-1)^{n+1}(n=1,2,\cdots)$是发散的.

证 如果这数列收敛,根据定理1它有唯一的极限,设极限为 a,即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 按数列极限的定义,对于 $\varepsilon=\frac{1}{2}$存在着正整数 N,当 $n>N$ 时,$|x_n-a|<\frac{1}{2}$成立;即当 $n>N$ 时,x_n 都在开区间 $\left(a-\frac{1}{2},a+\frac{1}{2}\right)$内. 但这是不可能的,因为 $n\to\infty$时,x_n 无休止地一再重复取得1和-1这两个数,而这两个数不可能同时属于长度为1的开区间 $\left(a-\frac{1}{2},a+\frac{1}{2}\right)$内. 因此这数列发散.

下面先介绍数列的有界性概念,然后证明收敛数列的有界性.

对于数列$\{x_n\}$,如果存在着正数 M,使得对于一切 x_n 都满足不等式

$$|x_n|\leqslant M,$$

则称数列$\{x_n\}$是有界的;如果这样的正数 M 不存在,就说数列$\{x_n\}$是无界的.

例如,数列 $x_n=\frac{n}{n+1}\ (n=1,2,\cdots)$是有界的,因为可取 $M=1$,而使

$$\left|\frac{n}{n+1}\right|\leqslant 1$$

对于一切正整数 n 都成立.

数列 $x_n=2^n(n=1,2,\cdots)$是无界的,因为当 n 无限增加时,2^n可超过任何正数.

数轴上对应于有界数列的点 x_n 都落在闭区间$[-M,M]$上.

定理2(收敛数列的有界性) 如果数列$\{x_n\}$收敛,那末数列$\{x_n\}$一定有界.

证 因为数列$\{x_n\}$收敛,设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 根据数列极限的定义,对于 $\varepsilon=1$存在着正整数 N,使得对于 $n>N$ 时的一切 x_n,不等式

$$|x_n-a|<1$$

都成立. 于是,当 $n>N$ 时,

$$|x_n|=|(x_n-a)+a|\leqslant|x_n-a|+|a|<1+|a|.$$

取 $M=\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_N|,1+|a|\}$,那末数列 $\{x_n\}$ 中的一切 x_n 都满足不等式

$$|x_n|\leqslant M.$$

这就证明了数列 $\{x_n\}$ 是有界的.

根据上述定理,如果数列 $\{x_n\}$ 无界,那末数列 $\{x_n\}$ 一定发散. 但是,如果数列 $\{x_n\}$ 有界,却不能断定数列 $\{x_n\}$ 一定收敛,例如数列

$$1,-1,1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$$

有界,但例4证明了这数列是发散的. 所以数列有界是数列收敛的必要条件,但不是充分条件.

最后,介绍子数列的概念以及关于收敛的数列与其子数列间关系的一个定理.

在数列 $\{x_n\}$ 中任意抽取无限多项并保持这些项在原数列 $\{x_n\}$ 中的先后次序,这样得到的一个数列称为原数列 $\{x_n\}$ 的子数列(或子列).

设在数列 $\{x_n\}$ 中,第一次抽取 x_{n_1},第二次在 x_{n_1} 后抽取 x_{n_2},第三次在 x_{n_2} 后抽取 x_{n_3}……,这样无休止地抽取下去,得到一个数列

$$x_{n_1},x_{n_2},\cdots,x_{n_k},\cdots,$$

这个数列 $\{x_{n_k}\}$ 就是数列 $\{x_n\}$ 的一个子数列.

注意 在子数列 $\{x_{n_k}\}$ 中,一般项 x_{n_k} 是第 k 项,而 x_{n_k} 在原数列 $\{x_n\}$ 中却是第 n_k 项. 显然,$n_k\geqslant k$.

定理3(收敛数列与其子数列间的关系) 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a,那末它的任一子数列也收敛,且极限也是 a.

证 设数列 $\{x_{n_k}\}$ 是数列 $\{x_n\}$ 的任一子数列.

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,故对于任意给定的正数 ε,存在着正整数 N,当 $n>N$ 时,$|x_n-a|<\varepsilon$ 成立.

取 $K=N$，则当 $k>K$ 时，$n_k>n_K=n_N\geqslant N$. 于是 $|x_{n_k}-a|<\varepsilon$. 这就证明了 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$. 证毕.

由定理3可知，如果数列 $\{x_n\}$ 有两个子数列收敛于不同的极限，那末数列 $\{x_n\}$ 是发散的. 例如，例4中的数列

$$1,-1,1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$$

的子数列 $\{x_{2k-1}\}$ 收敛于1，而子数列 $\{x_{2k}\}$ 收敛于 -1，因此数列 $x_n=(-1)^{n+1}(n=1,2,\cdots)$ 是发散的. 同时这个例子也说明，一个发散的数列也可能有收敛的子数列.

习　题　1—3

1. 观察一般项 x_n 如下的数列 $\{x_n\}$ 的变化趋势，写出它们的极限：

(1) $x_n=\frac{1}{2^n}$；　　(2) $x_n=(-1)^n\frac{1}{n}$；

(3) $x_n=2+\frac{1}{n^2}$；　　(4) $x_n=\frac{n-1}{n+1}$；

(5) $x_n=n(-1)^n$.

2. 设数列 $\{x_n\}$ 的一般项 $x_n=\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}$. 问 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$？求出 N，使当 $n>N$ 时，x_n 与其极限之差的绝对值小于正数 ε. 当 $\varepsilon=0.001$ 时，求出数 N.

3. 根据数列极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}=\frac{3}{2}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}0.\underbrace{999\cdots9}_{n\text{个}}=1$.

4. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$. 并举例说明反过来未必成立.

5. 设数列 $\{x_n\}$ 有界，又 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

6. 对于数列 $\{x_n\}$ 若 $x_{2k-1}\to a\,(k\to\infty)$，$x_{2k}\to a\,(k\to\infty)$，证明：$x_n\to a$ $(n\to\infty)$.

第四节　函数的极限

上节讲了数列的极限. 如果把数列看作自变量为 n 的函数 x_n

$=f(n)$，那末数列 $x_n=f(n)$ 的极限为 a，就是：当自变量 n 取正整数而无限增大（即 $n\to\infty$）时，对应的函数值 $f(n)$ 无限接近于确定的数 a. 把数列极限概念中的函数为 $f(n)$ 而自变量的变化过程为 $n\to\infty$ 等特殊性撇开，这样可以引出函数极限的一般概念：在自变量的某个变化过程中，如果对应的函数值无限接近于某个确定的数，那末这个确定的数就叫做在这一变化过程中函数的极限. 这个极限是与自变量的变化过程密切相关的，由于自变量的变化过程不同，函数的极限就表现为不同的形式. 数列极限看作函数 $f(n)$ 当 $n\to\infty$ 时的极限，这里自变量的变化过程是 $n\to\infty$. 下面讲述自变量的变化过程为其它情形时函数 $f(x)$ 的极限，主要研究两种情形：

1. 自变量 x 任意地接近于有限值 x_0 或者说趋于有限值 x_0（记作 $x\to x_0$）时，对应的函数值 $f(x)$ 的变化情形；

2. 自变量 x 的绝对值 $|x|$ 无限增大即趋于无穷大（记作 $x\to\infty$）时，对应的函数值 $f(x)$ 的变化情形.

一、自变量趋于有限值时函数的极限

现在考虑自变量 x 的变化过程为 $x\to x_0$. 如果在 $x\to x_0$ 的过程中，对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于确定的数值 A，那末就说 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限. 当然，这里我们首先假定函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内是有定义的.

在 $x\to x_0$ 的过程中，对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于 A，就是 $|f(x)-A|$ 能任意小. 就如数列极限概念中那样，$|f(x)-A|$ 能任意小这件事可以用 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 来表达，其中 ε 是任意给定的正数. 因为函数值 $f(x)$ 无限接近于 A 是在 $x\to x_0$ 的过程中实现的，所以对于任意给定的正数 ε，只要求充分接近于 x_0 的 x 所对应的函数值 $f(x)$ 满足不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$；而充分接近于 x_0 的 x 可表达为 $0<|x-x_0|<\delta$，其中 δ 是某个正数. 从几何上看，适合不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 的 x 的全体，就是点 x_0 的去心的 δ 邻域，而邻域

半径 δ 则体现了 x 接近 x_0 的程度.

通过以上分析,我们给出 $x \to x_0$ 时函数的极限的定义如下.

定义1　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义. 如果对于任意给定的正数 ε(不论它多么小),总存在正数 δ,使得对于适合不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 的一切 x,对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

那末常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限,记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x)=A \text{ 或 } f(x) \to A(\text{当 } x \to x_0).$$

我们指出,定义中 $0<|x-x_0|$ 表示 $x \neq x_0$,所以 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 有没有极限,与 $f(x)$ 在点 x_0 是否有定义并无关系.

函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限为 A 的几何解释如下:任意给定一正数 ε,作平行于 x 轴的两条直线 $y=A+\varepsilon$ 和 $y=A-\varepsilon$,介于这两条直线之间是一横条区域. 根据定义,对于给定的 ε,存在着点 x_0 的一个 δ 邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$,当 $y=f(x)$ 的图形上的点的横坐标 x 在邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内,但 $x \neq x_0$ 时,这些点的纵坐标 $f(x)$ 满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

或　　$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon.$

亦即这些点落在上面所作的横条区域内(图1—41).

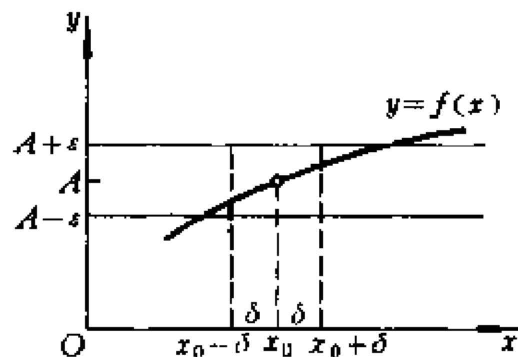


图　1—41

例1　证明 $\lim_{x \to x_0} c=c$,此处 c 为一常数.

证　这里 $|f(x)-A|=|c-c|=0$,因此对于任意给定的正数 ε,可任取一正数 δ,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,能使不等式

$$|f(x)-A|=|c-c|=0<\varepsilon$$

成立. 所以 $\lim\limits_{x\to x_0} c=c$.

例2 证明 $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$.

证 这里 $|f(x)-A|=|x-x_0|$,因此对于任意给定的正数 ε,总可取 $\delta=\varepsilon$,当 $0<|x-x_0|<\delta=\varepsilon$ 时,能使不等式 $|f(x)-A|=|x-x_0|<\varepsilon$ 成立. 所以 $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$.

例3 证明

$$\lim_{x\to 1}(2x-1)=1.$$

证 由于

$$|f(x)-A|=|(2x-1)-1|=2|x-1|,$$

为了使 $|f(x)-A|<\varepsilon$,只要

$$|x-1|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

所以,对于任意给定的正数 ε,可取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$,则当 x 适合不等式

$$0<|x-1|<\delta$$

时,对应的函数值 $f(x)$ 就满足不等式

$$|f(x)-1|=|(2x-1)-1|<\varepsilon.$$

从而
$$\lim_{x\to 1}(2x-1)=1.$$

例4 证明

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2.$$

证 这里,函数在点 $x=1$ 是没有定义的,但是函数当 $x\to 1$ 时的极限存在或不存在与它并无关系. 事实上,对于任意给定的正数 ε,不等式

$$\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon$$

约去非零因子 $x-1$ 后,就化为

$$|x+1-2|=|x-1|<\varepsilon.$$

因此,只要取 $\delta=\varepsilon$,那末当 $0<|x-1|<\delta$ 时,就有

$$\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon.$$

所以 $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2.$$

例5 证明：当 $x_0>0$时，$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$.

证 任意给定正数 ε. 因为

$$|f(x)-A|=|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|=\left|\frac{x-x_0}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{x_0}}|x-x_0|.$$

要使$|f(x)-A|<\varepsilon$，只要$|x-x_0|<\sqrt{x_0}\varepsilon$且$x\geqslant 0$，而$x\geqslant 0$可用$|x-x_0|\leqslant x_0$保证，因此取$\delta=\min\{x_0,\sqrt{x_0}\varepsilon\}$（这式子表示，$\delta$是$x_0$和$\sqrt{x_0}\varepsilon$两个数中较小的那个数），则当$x$适合不等式$0<|x-x_0|<\delta$时，对应的函数值$\sqrt{x}$就满足不等式

$$|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|<\varepsilon.$$

所以 $$\lim_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}.$$

利用函数极限的定义，可证明下列定理.

定理1 **（极限的局部保号性）如果** $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$**，而且** $A>0$ **（或** $A<0$**），那末就存在着点** x_0**的某一去心邻域，当** x **在该邻域内时，就有** $f(x)>0$**（或** $f(x)<0$**）.**

证 设$A>0$. 取正数$\varepsilon\leqslant A$，根据$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$的定义，对于这个取定的正数$\varepsilon$，必存在着一个正数$\delta$，当$x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$时，不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

或 $$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$$

能成立. 因$A-\varepsilon\geqslant 0$，故$f(x)>0$.

类似地可以证明$A<0$的情形.

这里指出，在上述定理的证明中，不论$A>0$或$A<0$，只要取ε

$=\frac{|A|}{2}$，便可得到更强的结论：

定理1′　如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A(A\neq 0)$，那末就存在着 x_0 的某一去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$，当 $x\in\mathring{U}(x_0)$ 时，就有 $|f(x)|>\frac{|A|}{2}$.

定理2　如果在 x_0 的某一去心邻域内 $f(x)\geqslant 0$（或 $f(x)\leqslant 0$），而且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，那末 $A\geqslant 0$（或 $A\leqslant 0$）.

证　设 $f(x)\geqslant 0$. 假设上述论断不成立，即设 $A<0$，那末由定理1就有 x_0 的某一去心邻域，在该邻域内 $f(x)<0$，这与 $f(x)\geqslant 0$ 的假定矛盾. 所以 $A\geqslant 0$.

类似地可证明 $f(x)\leqslant 0$ 的情形.

上述 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限概念中，x 是既从 x_0 的左侧也从 x_0 的右侧趋于 x_0 的. 但有时只能或只需考虑 x 仅从 x_0 的左侧趋于 x_0（记作 $x\to x_0-0$）的情形，或 x 仅从 x_0 的右侧趋于 x_0（记作 $x\to x_0+0$）的情形. 在 $x\to x_0-0$ 的情形，x 在 x_0 的左侧，$x<x_0$. 在 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的定义中，把 $0<|x-x_0|<\delta$ 改为 $x_0-\delta<x<x_0$，那末 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限，记作

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=A \quad 或 \quad f(x_0-0)=A.$$

类似地，在 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的定义中，把 $0<|x-x_0|<\delta$ 改为 $x_0<x<x_0+\delta$，那末 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的右极限，记作

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=A \quad 或 \quad f(x_0+0)=A.$$

根据 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限的定义，以及左极限和右极限的定义，容易证明：函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在的充分必要条件是左极限及右极限各自存在并且相等，即

$$f(x_0-0)=f(x_0+0).$$

因此，即使 $f(x_0-0)$ 和 $f(x_0+0)$ 都存在，但若不相等，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在.

例6 函数

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ x+1 & x>0. \end{cases}$$

当 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 的极限不存在.

仿例3可证当 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 的左极限

$$\lim_{x\to -0} f(x)=\lim_{x\to -0}(x-1)=-1,$$

而右极限

$$\lim_{x\to +0} f(x)=\lim_{x\to +0}(x+1)=1,$$

因为左极限和右极限存在但不相等，所以

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

不存在(图1—42).

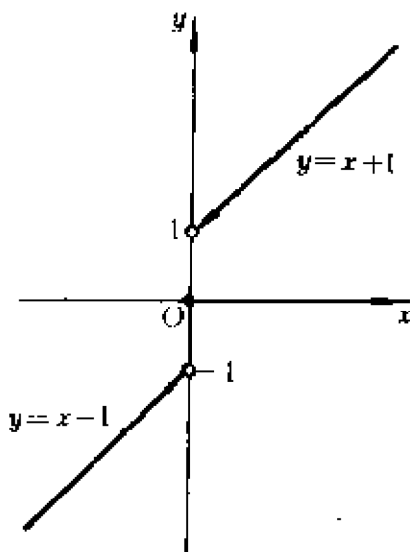


图 1—42

二、自变量趋于无穷大时函数的极限

如果在 $x\to\infty$ 的过程中，对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于确定的数值 A，那末 A 叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限. 精确地说，就是

定义2 **设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义. 如果对于任意给定的正数 ε(不论它多么小)，总存在着正数 X，使得对于适合不等式 $|x|>X$ 的一切 x，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式**

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

那末常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(当\ x\to\infty).$$

如果 $x>0$ 且无限增大(记作 $x\to+\infty$)，那末只要把上面定义中的 $|x|>X$ 改为 $x>X$，就可得 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 的定义. 同样，$x<0$ 而 $|x|$ 无限增大(记作 $x\to-\infty$)，那末只要把 $|x|>X$ 改为 $x<$

$-X$，使得 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$ 的定义.

从几何上来说，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 的意义是：作直线 $y=A-\varepsilon$ 和 $y=A+\varepsilon$，则总有一个正数 X 存在，使得当 $x<-X$ 或 $x>X$ 时，函数 $y=f(x)$ 的图形位于这两直线之间(图1－43).

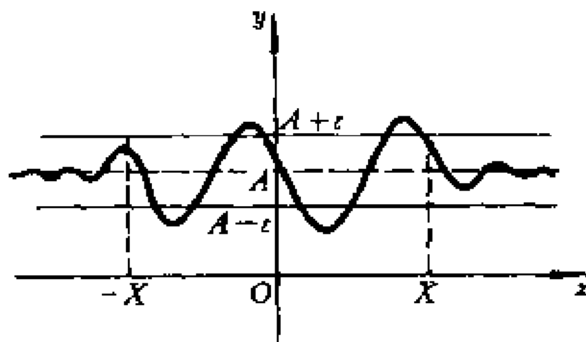


图 1－43

例7 证明

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

证 设 ε 是任意给定的正数. 要证存在着正数 X，当 $|x|>X$ 时，不等式

$$\left|\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$$

成立. 因这个不等式相当于

$$\frac{1}{|x|}<\varepsilon$$

或
$$|x|>\frac{1}{\varepsilon}.$$

由此可知，如果取 $X=\frac{1}{\varepsilon}$，那末对于适合 $|x|>X=\frac{1}{\varepsilon}$ 的一切 x，不等式 $\left|\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$ 成立，这就证明了

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

直线 $y=0$ 是函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图形的水平渐近线.

一般地说，如果 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=c$，则直线 $y=c$ 是函数 $y=f(x)$ 的图形的水平渐近线.

习　题　1－4

1. 根据函数极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-1)=8$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 2}(5x+2)=12$；

(3) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=-4$；　　(4) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{1-4x^2}{2x+1}=2$.

2. 根据函数极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$.

3. 当 $x\to 2$ 时，$y=x^2\to 4$. 问 δ 等于多少，则当 $|x-2|<\delta$ 时 $|y-4|<0.001$？

4. 当 $x\to\infty$ 时，$y=\dfrac{x^2-1}{x^2+3}\to 1$. 问 X 等于多少，使当 $|x|>X$ 时，$|y-1|<0.01$？

5. 证明函数 $f(x)=|x|$ 当 $x\to 0$ 时极限为零.

6. 求 $f(x)=\dfrac{x}{x}$，$\varphi(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 当 $x\to 0$ 时的左、右极限，并说明它们在 $x\to 0$ 时的极限是否存在.

7. 证明：如果函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限存在，则函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域内有界.

8. 证明：若 $x\to+\infty$ 及 $x\to-\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限都存在且都等于 A，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

9. 根据极限定义证明：函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在的充分必要条件是左极限、右极限各自存在并且相等.

第五节　无穷小与无穷大

一、无穷小

如果函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的极限为零，那末函数 $f(x)$ 叫做 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷小. 因此，只要在上一节函数

极限的两个定义中令 $A=0$，就可得无穷小的定义. 但由于无穷小在理论上和应用上的重要性，所以把它的定义写在下面.

定义1 **设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义（或 $|x|$ 大于某一正数时有定义）. 如果对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在正数 δ（或正数 X），使得对于适合不等式 $0<|x-x_0|<\delta$（或 $|x|>X$）的一切 x，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式**

$$|f(x)|<\varepsilon,$$

那末称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时为无穷小，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=0 \quad (\text{或} \lim_{x\to\infty}f(x)=0).$$

例1 因为 $\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$，所以函数 $x-1$ 当 $x\to1$ 时为无穷小.

因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，所以函数 $\dfrac{1}{x}$ 当 $x\to\infty$ 时为无穷小.

注意 不要把无穷小与很小的数（例如百万分之一）混为一谈，因为无穷小是这样的函数，在 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）的过程中，这函数的绝对值能小于任意给定的正数 ε，而很小的数如百万分之一，就不能小于任意给定的正数 ε，例如取 ε 等于千万分之一，则百万分之一就不能小于这个给定的 ε. 但零是可以作为无穷小的唯一的常数，因为如果 $f(x)=0$，那末对于任意给定的 $\varepsilon>0$ 总有 $|f(x)|<\varepsilon$.

下列定理说明无穷小与函数极限的关系.

定理1 **在自变量的同一变化过程 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）中，具有极限的函数等于它的极限与一个无穷小之和；反之，如果函数可表示为常数与无穷小之和，那末该常数就是这函数的极限.**

证 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则对于任意给定的正数 ε，存在着正数 δ，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

令 $\alpha=f(x)-A$，则 α 是 $x\to x_0$ 时的无穷小，且

$$f(x)=A+\alpha.$$

这就证明了 $f(x)$ 等于它的极限 A 与一个无穷小 α 之和.

反之,设 $f(x)=A+\alpha$,其中 A 是常数,α 是 $x\to x_0$ 时的无穷小,于是

$$|f(x)-A|=|\alpha|.$$

因 α 是 $x\to x_0$ 时的无穷小,所以对于任意给定的正数 ε,存在着正数 δ,使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有

$$|\alpha|<\varepsilon,$$

即
$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

这就证明了 A 是 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限.

类似地可证明 $x\to\infty$ 时的情形.

二、无穷大

如果当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时,对应的函数值的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大,就说函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时为无穷大.精确地说,就是

定义2　设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义(或 $|x|$ 大于某一正数时有定义).如果对于任意给定的正数 M(不论它多么大),总存在正数 δ(或正数 X),使得对于适合不等式 $0<|x-x_0|<\delta$(或 $|x|>X$)的一切 x,对应的函数值 $f(x)$ 总满足不等式

$$|f(x)|>M,$$

则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时为无穷大.

当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时为无穷大的函数 $f(x)$,按函数极限定义来说,极限是不存在的.但为了便于叙述函数的这一性态,我们也说"函数的极限是无穷大",并记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$$

$$(\text{或} \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty).$$

如果在无穷大的定义中,把 $|f(x)|>M$ 换成 $f(x)>M$(或

$f(x)<-M$)，就记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} f(x)=+\infty \quad \left(\text{或} \lim_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} f(x)=-\infty\right).$$

必须注意，无穷大(∞)不是数，不可与很大的数(如一千万、一亿等)混为一谈.

例2 证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$(图1—44).

证 设 M 是任意给定的正数.

要使
$$\left|\frac{1}{x-1}\right|>M,$$
只要
$$|x-1|<\frac{1}{M}.$$
所以，取 $\delta=\dfrac{1}{M}$，则对于适合不等式 $0<|x-1|<\delta=\dfrac{1}{M}$ 的一切 x，就有

$$\left|\frac{1}{x-1}\right|>M.$$

这就证明了 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$.

直线 $x=1$ 是函数 $y=\dfrac{1}{x-1}$ 的图形的铅直渐近线.

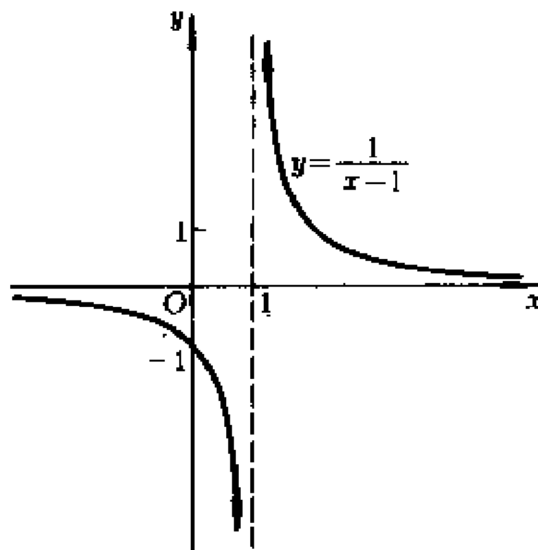


图 1—44

一般地说，如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，则直线 $x=x_0$ 是函数 $y=f(x)$ 的图形的铅直渐近线.

无穷大与无穷小之间有一种简单的关系，即：

定理2 在自变量的同一变化过程中，如果 $f(x)$ 为无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小；反之，如果 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

证 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$.

任意给定 $\varepsilon>0$. 根据无穷大的定义，对于 $M=\frac{1}{\varepsilon}$，存在着 $\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)|>M=\frac{1}{\varepsilon},$$

即

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right|<\varepsilon,$$

所以$\frac{1}{f(x)}$当 $x\to x_0$时为无穷小.

反之，设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，且 $f(x)\neq 0$.

任意给定 $M>0$. 根据无穷小的定义，对于 $\varepsilon=\frac{1}{M}$，存在着 $\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)|<\varepsilon=\frac{1}{M},$$

由于当$0<|x-x_0|<\delta$ 时 $f(x)\neq 0$，从而

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right|>M,$$

所以$\frac{1}{f(x)}$当 $x\to x_0$时为无穷大.

类似地可证 $x\to\infty$时的情形.

习　题　1－5

1. 两个无穷小的商是否一定是无穷小？举例说明之.

2. 根据定义证明：

(1) $y=\frac{x^2-9}{x+3}$当 $x\to 3$时为无穷小；

(2) $y=x\sin\frac{1}{x}$当 $x\to 0$时为无穷小.

3. 根据定义证明：当 $x\to 0$时，函数 $y=\frac{1+2x}{x}$是无穷大. 问 x 应满足什么条件，能使$|y|>10^4$？

4. 求下列极限并说明理由：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x}$；　　　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-x^2}{1-x}$.

5. 根据函数极限或无穷大定义，填写下表：

	$f(x)\to A$	$f(x)\to\infty$	$f(x)\to+\infty$	$f(x)\to-\infty$
$x\to x_0$	任给 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使当 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 时，即有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$.			
$x\to x_0+0$				
$x\to x_0-0$				
$x\to\infty$		任给 $M>0$，总存在 $X>0$，使当 $\|x\|>X$ 时，即有 $\|f(x)\|>M$.		
$x\to+\infty$				
$x\to-\infty$				

6. 函数 $y=x\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是否有界？又当 $x\to+\infty$时，这个函数是否为无穷大？为什么？

7. 证明：函数 $y=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 在区间$(0,1]$上无界，但当 $x\to+0$时，这函数不是无穷大.

第六节　极限运算法则

本节讨论极限的求法，主要是建立极限的四则运算法则和复合函数的极限运算法则，利用这些法则，可以求某些函数的极限. 以后我们还将介绍求极限的其它方法.

在下面的讨论中，记号“lim”下面没有标明自变量的变化过程，实际上，下面的定理对 $x\to x_0$及 $x\to\infty$都是成立的. 在论证时，我们只证明了 $x\to x_0$的情形，只要把 δ 改成 X，把$0<|x-x_0|<\delta$ 改成$|x|>X$，就可得 $x\to\infty$情形的证明.

定理1　有限个无穷小的和也是无穷小.

证　考虑两个无穷小的和.

设 α 及 β 是当 $x\to x_0$时的两个无穷小，而

$$\gamma=\alpha+\beta.$$

任意给定 $\varepsilon>0$. 因为 α 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小，对于 $\frac{\varepsilon}{2}>0$ 存在着 $\delta_1>0$. 当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时，不等式

$$|\alpha|<\frac{\varepsilon}{2}$$

成立. 又因 β 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小，对于 $\frac{\varepsilon}{2}>0$ 存在着 $\delta_2>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时，不等式

$$|\beta|<\frac{\varepsilon}{2}$$

成立. 取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，

$$|\alpha|<\frac{\varepsilon}{2} \quad 及 \quad |\beta|<\frac{\varepsilon}{2}$$

同时成立，从而 $|\gamma|=|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. 这就证明了 γ 也是当 $x\to x_0$ 时的无穷小.

有限个无穷小之和的情形可以同样证明.

定理2　有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

证　设函数 u 在 x_0 的某一去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta_1)$ 内是有界的，即存在正数 M 使 $|u|\leqslant M$ 对一切 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_1)$ 成立. 又设 α 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小，即对于任意给定的正数 ε，存在着 δ_2，当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_2)$ 时，有

$$|\alpha|<\frac{\varepsilon}{M}.$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，

$$|u|\leqslant M \quad 及 \quad |\alpha|<\frac{\varepsilon}{M}$$

同时成立. 从而

$$|u\alpha|=|u|\,|\alpha|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon,$$

这就证明了 $u\alpha$ 是当 $x \to x_0$ 时的无穷小.

推论1　常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论2　有限个无穷小的乘积也是无穷小.

定理3　如果 $\lim f(x) = A$, $\lim g(x) = B$, 则 $\lim[f(x) \pm g(x)]$ 存在,且

$$\lim[f(x) \pm g(x)] = A \pm B = \lim f(x) \pm \lim g(x).$$

证　因 $\lim f(x) = A$, $\lim g(x) = B$, 由第五节定理1有

$$f(x) = A + \alpha, \quad g(x) = B + \beta,$$

其中 α 及 β 为无穷小. 于是

$$f(x) \pm g(x) = (A + \alpha) \pm (B + \beta) = (A \pm B) + (\alpha \pm \beta).$$

由本节定理1, $\alpha \pm \beta$ 是无穷小($\alpha - \beta$ 可看作 $\alpha + (-1)\beta$, 由本节定理2的推论1, $(-1)\beta$ 是无穷小, 因此 $\alpha - \beta$ 也可看作两个无穷小的和). 再由第五节定理1, 得

$$\lim[f(x) \pm g(x)] = A \pm B = \lim f(x) \pm \lim g(x).$$

定理3可推广到有限个函数的情形, 例如, 如果 $\lim f(x)$, $\lim g(x)$, $\lim h(x)$ 都存在, 则由定理3有

$$\begin{aligned}\lim[f(x) + g(x) - h(x)] &= \lim\{f(x) + [g(x) - h(x)]\} \\ &= \lim f(x) + \lim[g(x) - h(x)] \\ &= \lim f(x) + \lim g(x) - \lim h(x).\end{aligned}$$

定理4　如果 $\lim f(x) = A$, $\lim g(x) = B$, 则 $\lim[f(x) \cdot g(x)]$ 存在,且

$$\lim[f(x) \cdot g(x)] = AB = \lim f(x) \cdot \lim g(x).$$

这个定理的证明,建议读者作为练习.

定理4可以推广到有限个函数相乘的情形, 例如, 如果 $\lim f(x)$、$\lim g(x)$、$\lim h(x)$ 都存在, 则由定理4有

$$\begin{aligned}\lim[f(x)g(x)h(x)] &= \lim\{[f(x)g(x)]h(x)\} \\ &= \lim[f(x)g(x)] \cdot \lim h(x) \\ &= \lim f(x) \cdot \lim g(x) \cdot \lim h(x).\end{aligned}$$

推论1　如果 $\lim f(x)$ 存在, 而 c 为常数, 则

$$\lim[cf(x)]=c\lim f(x).$$

就是说，求极限时，常数因子可以提到极限记号外面. 这是因为 $\lim c=c$.

推论2 **如果** $\lim f(x)$ **存在，而** n **是正整数，则**

$$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n.$$

这是因为

$$\lim[f(x)]^n=\lim[f(x)\cdot f(x)\cdots f(x)]$$
$$=\lim f(x)\cdot\lim f(x)\cdots\lim f(x)=[\lim f(x)]^n.$$

定理5 **如果** $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，**且** $B\neq 0$，**则** $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$ **存在，且**

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}.$$

证 由 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，有

$$f(x)=A+\alpha,g(x)=B+\beta,$$

其中 α 及 β 为无穷小. 设

$$\gamma=\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B},$$

则
$$\gamma=\frac{A+\alpha}{B+\beta}-\frac{A}{B}=\frac{1}{B(B+\beta)}(B\alpha-A\beta).$$

上式表示，γ 可看作两个函数的乘积，其中函数 $B\alpha-A\beta$ 是无穷小. 下面我们证明另一个函数 $\frac{1}{B(B+\beta)}$ 在点 x_0 的某一邻域内有界.

根据第四节定理1′，由于 $\lim g(x)=B\neq 0$，存在着点 x_0 的某一去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$，当 $x\in\mathring{U}(x_0)$ 时，$|g(x)|>\frac{|B|}{2}$，从而 $\left|\frac{1}{g(x)}\right|<\frac{2}{|B|}$. 于是

$$\left|\frac{1}{B(B+\beta)}\right|=\frac{1}{|B|}\cdot\left|\frac{1}{g(x)}\right|<\frac{1}{|B|}\cdot\frac{2}{|B|}=\frac{2}{|B|^2}.$$

这就证明了$\dfrac{1}{B(B+\beta)}$在点x_0的去心邻域$\mathring{U}(x_0)$内有界.

因此,根据本节定理2,γ是无穷小.但

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}+\gamma,$$

所以由上节定理1,得

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}.$$

关于数列,也有类似的极限四则运算法则,这就是下面的定理.

定理6　设有数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$.如果

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A,\qquad \lim_{n\to\infty}y_n=B,$$

那末

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=A\pm B$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot y_n=A\cdot B$,

(3) 当$y_n\neq 0\ (n=1,2,\cdots)$**且**$B\neq 0$**时**,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{A}{B}$.**证明从略.**

定理7　如果$\varphi(x)\geqslant\psi(x)$,**而**$\lim\varphi(x)=a$,$\lim\psi(x)=b$,**那末**$a\geqslant b$.

证　令$f(x)=\varphi(x)-\psi(x)$,则$f(x)\geqslant 0$.由本节定理3有

$$\begin{aligned}\lim f(x)&=\lim[\varphi(x)-\psi(x)]\\&=\lim\varphi(x)-\lim\psi(x)=a-b.\end{aligned}$$

由第四节定理2,有$\lim f(x)\geqslant 0$,即$a-b\geqslant 0$,故$a\geqslant b$.

例1　求$\lim\limits_{x\to1}(2x-1)$.

解　$\lim\limits_{x\to1}(2x-1)=\lim\limits_{x\to1}2x-\lim\limits_{x\to1}1=2\lim\limits_{x\to1}x-1=2\cdot1-1=1.$

例2　求$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-1}{x^2-5x+3}$.

解　这里分母的极限不为零,故

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3-1}{x^2-5x+3}=\frac{\lim\limits_{x\to2}(x^3-1)}{\lim\limits_{x\to2}(x^2-5x+3)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x^3-\lim\limits_{x\to 2}1}{\lim\limits_{x\to 2}x^2-5\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}3}=\frac{(\lim\limits_{x\to 2}x)^3-1}{(\lim\limits_{x\to 2}x)^2-5\cdot 2+3}$$

$$=\frac{2^3-1}{2^2-10+3}=\frac{7}{-3}=-\frac{7}{3}.$$

从上面两个例子可以看出，求有理整函数（多项式）或有理分式函数当 $x\to x_0$ 的极限时，只要把 x_0 代替函数中的 x 就行了；但是对于有理分式函数，这样代入后如果分母等于零，则没有意义.

事实上，设多项式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n,$$

则
$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n)$$
$$=a_0(\lim_{x\to x_0}x)^n+a_1(\lim_{x\to x_0}x)^{n-1}+\cdots+\lim_{x\to x_0}a_n$$
$$=a_0x_0^n+a_1x_0^{n-1}+\cdots+a_n=f(x_0);$$

又设有理分式函数

$$F(x)=\frac{P(x)}{Q(x)},$$

其中 $P(x)$，$Q(x)$ 都是多项式，于是

$$\lim_{x\to x_0}P(x)=P(x_0),\quad \lim_{x\to x_0}Q(x)=Q(x_0);$$

如果 $Q(x_0)\neq 0$，则

$$\lim_{x\to x_0}F(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}=F(x_0).$$

但必须注意：若 $Q(x_0)=0$，则关于商的极限的运算法则不能应用，那就需要特别考虑. 下面我们举两个属于这种情形的例题.

例3 求 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}$.

解 当 $x\to 3$ 时，分子及分母的极限都是零，于是分子、分母不能分别取极限. 因分子及分母有公因子 $x-3$，而 $x\to 3$ 时，$x\neq 3$，$x-3\neq 0$，可约去这个不为零的公因子. 所以

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+3}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}1}{\lim\limits_{x\to 3}(x+3)}=\frac{1}{6}.$$

例4 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-3}{x^2-5x+4}$.

解 因为分母的极限 $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-5x+4)=1^2-5\cdot 1+4=0$，不能应用商的极限的运算法则. 但因

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x+4}{2x-3}=\frac{1^2-5\cdot 1+4}{2\cdot 1-3}=0,$$

故由第五节定理2得

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x-3}{x^2-5x+4}=\infty.$$

例5 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}$.

解 先用 x^3 去除分母及分子，然后取极限：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^3}}{7+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^3}}=\frac{3}{7},$$

这是因为 $\qquad \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a}{x^n}=a\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^n}=a\left(\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\right)^n=0,$

其中 a 为常数，n 为正整数，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$（见第四节例7）.

例6 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}$.

解 先用 x^3 除分母和分子，然后求极限，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{2-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3}}=\frac{0}{2}=0.$$

例7 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x^2+5}{3x^2-2x-1}$.

解 应用例6的结果并根据上节定理2，即得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2+5}{3x^2-2x-1}=\infty.$$

例5、6、7是下列一般情形的特例，即当 $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, m$ 和 n 为非负整数时，有

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & \text{当 } n = m, \\ 0, & \text{当 } n > m, \\ \infty, & \text{当 } n < m. \end{cases}$$

例8 求 $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x}$.

解 当 $x \to \infty$ 时，分子及分母的极限都不存在，故关于商的极限的运算法则不能应用. 如果把 $\frac{\sin x}{x}$ 看作 $\sin x$ 与 $\frac{1}{x}$ 的乘积，由于 $\frac{1}{x}$ 当 $x \to \infty$ 时为无穷小，而 $\sin x$ 是有界函数，则根据本节定理2，有

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

定理8 （**复合函数的极限运算法则**） **设函数** $u = \varphi(x)$ **当** $x \to x_0$ **时的极限存在且等于** a，**即** $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = a$，**但在点** x_0 **的某去心邻域内** $\varphi(x) \neq a$，**又** $\lim\limits_{u \to a} f(u) = A$，**则复合函数** $f[\varphi(x)]$ **当** $x \to x_0$ **时的极限也存在，且**

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{u \to a} f(u) = A.$$

证 按函数极限的定义，要证：对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在着 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，

$$|f[\varphi(x)] - A| = |f(u) - A| < \varepsilon$$

成立.

由于 $\lim\limits_{u \to a} f(u) = A$，对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在着 $\eta > 0$，当 $0 < |u - a| < \eta$ 时，$|f(u) - A| < \varepsilon$ 成立.

又由于 $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = a$，对于上面得到的 $\eta > 0$，存在着 $\delta_1 > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时，$|\varphi(x) - a| < \eta$ 成立.

设在 x_0 的去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta_2)$ 内 $\varphi(x)\neq a$. 取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, $|\varphi(x)-a|<\eta$ 及 $|\varphi(x)-a|\neq 0$ 同时成立, 即 $0<|\varphi(x)-a|=|u-a|<\eta$ 成立. 从而

$$|f[\varphi(x)]-A|=|f(u)-A|<\varepsilon$$

成立. 证毕.

在定理8中, 把 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$ 换成 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=\infty$, 而把 $\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$ 换成 $\lim\limits_{u\to\infty}f(u)=A$, 可得类似的定理.

定理8表示, 如果函数 $f(u)$ 和 $\varphi(x)$ 满足该定理的条件, 那末作代换 $u=\varphi(x)$ 可把求 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]$ 化为求 $\lim\limits_{u\to a}f(u)$, 这里 $a=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$.

习 题 1—6

1. 计算下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x-3}$; (2) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^2+1}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$; (4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$;

(5) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$; (6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$;

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; (8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^4-3x^2+1}$;

(9) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$; (10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)$;

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$; (12) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}$;

(13) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}$; (14) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

2. 计算下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+2x^2}{(x-2)^2}$; (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2x+1}$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3-x-1)$.

3. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x}$；　　　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x}$.

4. 证明本节定理4.

第七节　极限存在准则　两个重要极限

下面讲判定极限存在的两个准则，以及作为应用准则的例子，讨论两个重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$及$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

准则Ⅰ　如果数列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$及$\{z_n\}$满足下列条件：

(1) $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n\quad(n=1,2,3,\cdots)$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a,\quad\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$,

那末数列$\{x_n\}$的极限存在，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

证　因$y_n\to a$，$z_n\to a$，所以根据数列极限的定义，对于任意给定的正数ε，存在正整数N_1，当$n>N_1$时，有$|y_n-a|<\varepsilon$；又存在正整数N_2，当$n>N_2$时，有$|z_n-a|<\varepsilon$. 现在取$N=\max\{N_1,N_2\}$，则当$n>N$时，有

$$|y_n-a|<\varepsilon,\quad|z_n-a|<\varepsilon$$

同时成立，即

$$a-\varepsilon<y_n<a+\varepsilon,\quad a-\varepsilon<z_n<a+\varepsilon$$

同时成立. 又因x_n介于y_n和z_n之间，所以当$n>N$时，有

$$a-\varepsilon<y_n\leqslant x_n\leqslant z_n<a+\varepsilon,$$

即

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

成立. 这就证明了$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

上述数列极限存在准则可以推广到函数的极限：

准则Ⅰ′　如果

(1) 当$x\in\mathring{U}(x_0,r)$(或$|x|>M$)时，有

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$$

成立；

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=A,\quad\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}h(x)=A$,

那末 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x)$存在，且等于 A.

准则 I 及准则 I′称为夹逼准则.

作为准则 I′的应用，下面证明一个重要的极限：

$$\lim_{x \to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

首先注意到，函数$\frac{\sin x}{x}$对于一切 $x \neq 0$都有定义.

在图 1－45 所示的单位圆中，设圆心角 $\angle AOB = x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$，点 A 处的切线与 OB 的延长线相交于 D，又 $BC \perp OA$，则

$$\sin x = CB,\ x=\overset{\frown}{AB},\ \tan x = AD.$$

因为

△AOB 的面积<圆扇形 AOB 的面积<△AOD 的面积，

所以 $$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x,$$

即 $$\sin x<x<\tan x.$$

不等号各边都除以 $\sin x$，就有

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x},$$

或 $$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1. \tag{1}$$

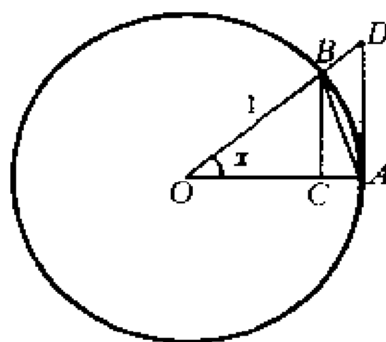


图 1－45

因为当 x 用 $-x$ 代替时，$\cos x$ 与$\frac{\sin x}{x}$都不变，所以上面的不等式对于开区间$\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$内的一切 x 也是成立的.

为了对(1)式应用准则 I′，下面来证 $\lim\limits_{x \to 0}\cos x=1$.

事实上，当$0<|x|<\frac{\pi}{2}$时，

$$0<|\cos x-1|=1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}<2\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{x^2}{2},$$

即
$$0<1-\cos x<\frac{x^2}{2}.$$
当 $x\to 0$时，$\frac{x^2}{2}\to 0$，由准则 I′有 $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)=0$，所以
$$\lim_{x\to 0}\cos x=1.$$
由于 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$，$\lim\limits_{x\to 0}1=1$，由不等式(1)及准则 I′，即得
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

例1 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1.$$

例2 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}.$$

这里倒数第二个等号用到了复合函数的极限运算法则. 实际上，$\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$可看作由$\frac{\sin u}{u}$及$u=\frac{x}{2}$复合而成. 因 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2}=0$，而 $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1$，故
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1.$$

准则Ⅱ　单调有界数列必有极限.

如果数列$\{x_n\}$满足条件

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant \cdots,$$

就称数列$\{x_n\}$是单调增加的；如果数列$\{x_n\}$满足条件

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant x_{n+1} \geqslant \cdots,$$

就称数列$\{x_n\}$是单调减少的. 单调增加和单调减少的数列统称为单调数列[1].

在第二节中曾证明：收敛的数列一定有界. 但那时也曾指出：有界的数列不一定收敛. 现在准则Ⅱ表明：如果数列不仅有界，并且是单调的，那末这数列的极限必定存在，也就是这数列一定收敛.

对准则Ⅱ我们不作证明，而给出如下的几何解释.

从数轴上看，对应于单调数列的点x_n只可能向一个方向移动，所以只有两种可能情形：或者点x_n沿数轴移向无穷远($x_n \to +\infty$或$x_n \to -\infty$)；或者点x_n无限趋近于某一个定点A(图1-46)，也就是数列$\{x_n\}$趋于一个极限. 但现在假定数列是有界的，而有界数列的点x_n都落在数轴上某一个区间$[-M, M]$内，那末上述第一种情形就不可能发生了. 这就表示这个数列趋于一个极限，并且这个极限的绝对值不超过M.

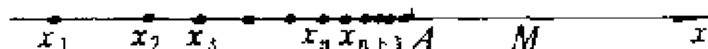


图 1-46

作为准则Ⅱ的应用，我们讨论另一个重要极限

$$\lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

下面考虑x取正整数n而趋于$+\infty$的情形.

---

[1] 这里的单调数列是广义的，就是说，在条件中也包括相等的情形. 以后称单调数列都是指这种广义的单调数列.

设 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，我们来证数列$\{x_n\}$单调增加并且有界. 按牛顿二项公式，有

$$
\begin{aligned}
x_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
&= 1+\frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots \\
&\quad +\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} \\
&= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots \\
&\quad +\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right),
\end{aligned}
$$

类似地，

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\cdots \\
&\quad +\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) \\
&\quad +\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).
\end{aligned}
$$

比较 x_n、x_{n+1}的展开式，可以看到除前两项外，x_n 的每一项都小于x_{n+1}的对应项，并且 x_{n+1}还多了最后的一项，其值大于0，因此

$$x_n<x_{n+1},$$

这就说明数列$\{x_n\}$是单调增加的. 这个数列同时还是有界的. 因为，如果 x_n 的展开式中各项括号内的数用较大的数1代替，得

$$
\begin{aligned}
x_n &< 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} \\
&= 1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3,
\end{aligned}
$$

这就说明数列$\{x_n\}$是有界的. 根据极限存在准则 I，这个数列$\{x_n\}$的极限存在，通常用字母 e 来表示它，即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

可以证明，当 x 取实数而趋于 $+\infty$ 或 $-\infty$ 时，函数 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 的极限都存在且都等于 e①. 因此②，

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}. \tag{2}$$

这个数 e 是无理数，它的值是

$$\mathrm{e}=2.718281828459045\cdots.$$

在第二节中讲到的指数函数 $y=\mathrm{e}^x$ 以及自然对数 $y=\ln x$ 中的底 e 就是这个常数.

利用复合函数的极限运算法则，可把(2)式写成另一形式. 在 $(1+z)^{\frac{1}{z}}$ 中作代换 $x=\frac{1}{z}$，得 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$. 又 $z\to 0$ 时 $x\to\infty$. 因此由复合函数的极限运算法则得

$$\lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

下面的例3也是用代换方法来做的，实质上还是用到了复合函数的极限运算法则.

---

① 设 $n\leqslant x<n+1$，则

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

且 n 与 x 同时趋于 $+\infty$. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}}=\mathrm{e},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]=\mathrm{e},$$

应用夹逼准则，即得

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

令 $x=-(t+1)$，则 $x\to-\infty$ 时，$t\to+\infty$. 从而

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-(t+1)}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-(t+1)}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1}=\lim_{t\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)\right]=\mathrm{e}.$$

② 参阅习题1－4第8题.

例3 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}$.

解 令 $t=-x$，则 $x\to\infty$ 时，$t\to\infty$. 于是

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-t}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}}=\frac{1}{e}.$$

*** 柯西(Cauchy)极限存在准则**

在第二节例1及例2中，我们看到收敛数列不一定是单调的. 因此，准则Ⅱ所给出的单调有界这条件，是数列收敛的充分条件，而不是必要的. 当然，其中有界这一条件对数列的收敛性来说是必要的. 下面叙述的柯西极限存在准则，它给出了数列收敛的充分必要条件.

柯西极限存在准则　数列 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是：对于任意给定的正数 ε，存在着这样的正整数 N，使得当 $m>N$，$n>N$ 时，就有

$$|x_n-x_m|<\varepsilon.$$

必要性的证明　设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 若任意给定正数 ε，则 $\frac{\varepsilon}{2}$ 也是正数，于是由数列极限的定义，存在着正整数 N，当 $n>N$ 时，有

$$|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2};$$

同样，当 $m>N$ 时，也有

$$|x_m-a|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因此，当 $m>N$，$n>N$ 时，有

$$\begin{aligned}|x_n-x_m|&=|(x_n-a)-(x_m-a)|\\&\leqslant|x_n-a|+|x_m-a|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

所以条件是必要的.

充分性的证明从略.

这准则的几何意义表示，数列 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是：对

于任意给定的正数 ε，在数轴上一切具有足够大号码的点 x_n 中，任意两点间的距离小于 ε.

柯西极限存在准则有时也叫做柯西审敛原理.

习 题 1－7

1. 计算下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin \omega x}{x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}$；　(4) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot x$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$；

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}$（$x$ 为不等于零的常数）.

2. 计算下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{2x}$；　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{kx}$（$k$ 为正整数）.

3. 根据函数极限的定义，证明极限存在的准则 I′.

4. 利用极限存在准则证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}=1$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{n^2+\pi}+\dfrac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$；

(3) 数列 $\sqrt{2}$，$\sqrt{2+\sqrt{2}}$，$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$，…的极限存在.

第八节　无穷小的比较

在第六节中我们已经知道，两个无穷小的和、差及乘积仍旧是无穷小. 但是，关于两个无穷小的商，却会出现不同的情况，例如，当 $x\to 0$ 时，$3x$、x^2、$\sin x$ 都是无穷小，而

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x}=0,\ \lim_{x\to 0}\frac{3x}{x^2}=\infty,\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

两个无穷小之比的极限的各种不同情况，反映了不同的无穷小趋

于零的“快慢”程度. 就上面几个例子来说，在 $x\to0$ 的过程中，$x^2\to0$ 比 $3x\to0$ “快些”，反过来 $3x\to0$ 比 $x^2\to0$ “慢些”，而 $\sin x\to0$ 与 $x\to0$ “快慢相仿”.

下面，我们就无穷小之比的极限存在或为无穷大时，来说明两个无穷小之间的比较. 应当注意，下面的 α 及 β 都是在同一个自变量的变化过程中的无穷小，且 $\alpha\neq0$，而 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}$ 也是在这个变化过程中的极限.

定义：

如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，就说 β 是比 α 高阶的无穷小，记作 $\beta=o(\alpha)$；

如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$，就说 β 是比 α 低阶的无穷小.

如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq0$，就说 β 与 α 是同阶无穷小；

如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=c\neq0,k>0$，就说 β 是关于 α 的 k 阶无穷小.

如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，就说 β 与 α 是等价无穷小，记作 $\alpha\sim\beta$.

显然，等价无穷小是同阶无穷小的特殊情形，即 $c=1$ 的情形.

下面举一些例子：

因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^2}{x}=0$，所以当 $x\to0$ 时，$3x^2$ 是比 x 高阶的无穷小，即 $3x^2=o(x)\ (x\to0)$.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}=\infty$，所以当 $n\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{n}$ 是比 $\dfrac{1}{n^2}$ 低阶的无穷小.

因为 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$，所以当 $x\to3$ 时，x^2-9 与 $x-3$ 是同阶无穷小.

因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$，所以当 $x\to0$ 时，$1-\cos x$ 是关于 x 的二阶无穷小.

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，所以当 $x\to 0$ 时，$\sin x$ 与 x 是等价无穷小，即 $\sin x\sim x\ (x\to 0)$.

关于等价无穷小，有下面两个定理.

定理1 **β 与 α 是等价无穷小的充分必要条件为 $\beta=\alpha+o(\alpha)$.**

证 必要性 设 $\alpha\sim\beta$，则

$$\lim\frac{\beta-\alpha}{\alpha}=\lim\left(\frac{\beta}{\alpha}-1\right)=\lim\frac{\beta}{\alpha}-1=0,$$

因此 $\beta-\alpha=o(\alpha)$，即 $\beta=\alpha+o(\alpha)$.

充分性 设 $\beta=\alpha+o(\alpha)$，则

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\alpha+o(\alpha)}{\alpha}=\lim\left(1+\frac{o(\alpha)}{\alpha}\right)=1,$$

因此 $\alpha\sim\beta$.

例1 因为当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，所以当 $x\to 0$ 时有

$$\sin x=x+o(x),\tan x=x+o(x),1-\cos x=\frac{1}{2}x^2+o(x^2).$$

定理2 **设 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且 $\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则**

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}.$$

证
$$\begin{aligned}\lim\frac{\beta}{\alpha}&=\lim\left(\frac{\beta}{\beta'}\cdot\frac{\beta'}{\alpha'}\cdot\frac{\alpha'}{\alpha}\right)\\&=\lim\frac{\beta}{\beta'}\cdot\lim\frac{\beta'}{\alpha'}\cdot\lim\frac{\alpha'}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}.\end{aligned}$$

定理2表明，求两个无穷小之比的极限时，分子及分母都可用等价无穷小来代替. 因此，如果用来代替的无穷小选得适当的话，可以使计算简化.

例2 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 5x}$.

解 当 $x\to 0$ 时，$\tan 2x\sim 2x$，$\sin 5x\sim 5x$，所以

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan 2x}{\sin 5x}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{5x}=\frac{2}{5}.$$

例3 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x^3+3x}$.

解 当 $x\to0$时，$\sin x\sim x$，无穷小 x^3+3x 与它本身显然是等价的，所以

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x^3+3x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x(x^2+3)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2+3}=\frac{1}{3}.$$

习 题 1-8

1. 当 $x\to0$时，$2x-x^2$与 x^2-x^3相比，哪一个是高阶无穷小？

2. 当 $x\to1$时，无穷小$1-x$ 和(1) $1-x^3$，(2) $\frac{1}{2}(1-x^2)$是否同阶？是否等价？

3. 证明：当 $x\to0$时，有：

(1) $\arctan x\sim x$；　　　(2) $\sec x-1\sim\frac{x^2}{2}$.

4. 利用等价无穷小的性质，求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan 3x}{2x}$；　　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m}$ (n、m 为正整数)；

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$.

5. 证明无穷小的等价关系具有下列性质：

(1) $\alpha\sim\alpha$(自反性)；

(2) 若 $\alpha\sim\beta$，则 $\beta\sim\alpha$(对称性)；

(3) 若 $\alpha\sim\beta$，$\beta\sim\gamma$，则 $\alpha\sim\gamma$(传递性).

第九节　函数的连续性与间断点

一、函数的连续性

自然界中有许多现象，如气温的变化，河水的流动，植物的生长等等，都是连续地变化着的. 这种现象在函数关系上的反映，就是函数的连续性. 例如就气温的变化来看，当时间变动很微小时，

气温的变化也很微小，这种特点就是所谓连续性．下面我们先引入增量的概念，然后来描述连续性，并引出函数的连续性的定义．

设变量 u 从它的一个初值 u_1 变到终值 u_2，终值与初值的差 u_2-u_1 就叫做变量 u 的增量，记作 Δu，即

$$\Delta u=u_2-u_1.$$

增量 Δu 可以是正的，也可以是负的．在 Δu 为正的情形，变量 u 从 u_1 变到 $u_2=u_1+\Delta u$ 时是增大的；当 Δu 为负时，变量 u 是减小的．

应该注意到：记号 Δu 并不表示某个量 Δ 与变量 u 的乘积，而是一个整体不可分割的记号．

现在假定函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一个邻域内是有定义的．当自变量 x 在这邻域内从 x_0 变到 $x_0+\Delta x$ 时，函数 y 相应地从 $f(x_0)$ 变到 $f(x_0+\Delta x)$，因此函数 y 的对应增量为

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

这个关系式的几何解释如图1－47所示．

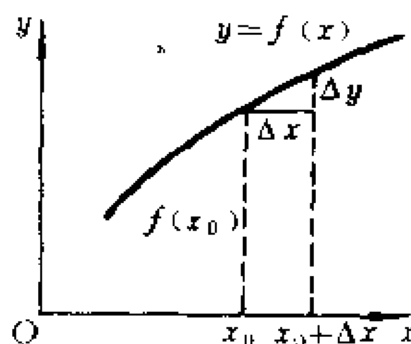


图 1－47

假如保持 x_0 不变而让自变量的增量 Δx 变动，一般说来，函数 y 的增量 Δy 也要随着变动．现在我们对连续性的概念可以这样描述：如果当 Δx 趋于零时，函数 y 的对应增量 Δy 也趋于零，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0, \tag{1}$$

或

$$\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

那末就称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处是连续的，即有下述定义：

定义　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，如果当自变量的增量 $\Delta x=x-x_0$ 趋于零时，对应的函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 也趋于零，那末就称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续．

为了应用方便起见，下面把函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续的定义用不同的方式来叙述.

设 $x=x_0+\Delta x$，则 $\Delta x\to 0$ 就是 $x\to x_0$. 又由于

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(x)-f(x_0)$$

即
$$f(x)=f(x_0)+\Delta y,$$

可见 $\Delta y\to 0$ 就是 $f(x)\to f(x_0)$，因此(1)式与

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

相当. 所以，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续的定义又可叙述如下：

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，如果函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限存在，且等于它在点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$，即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0), \tag{2}$$

那末就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

由函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限的定义可知，上述定义也可用"$\varepsilon-\delta$"语言表达如下：

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，如果对于任意给定的正数 ε，总存在着正数 δ，使得对于适合不等式 $|x-x_0|<\delta$ 的一切 x，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

那末就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

下面说明左连续及右连续的概念.

如果 $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0-0)$ 存在且等于 $f(x_0)$，即

$$f(x_0-0)=f(x_0),$$

就说函数 $f(x)$ 在点 x_0 左连续. 如果 $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0+0)$ 存在且等于 $f(x_0)$，即

$$f(x_0+0)=f(x_0),$$

就说函数 $f(x)$ 在点 x_0 右连续.

在区间上每一点都连续的函数，叫做在该区间上的连续函数，或者说函数在该区间上连续．如果区间包括端点，那末函数在右端点连续是指左连续，在左端点连续是指右连续．

连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线．

在第六节中，我们曾经证明：如果 $f(x)$ 是有理整函数（多项式），则对于任意的实数 x_0，都有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，因此有理整函数在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是连续的．对于有理分式函数 $F(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，只要 $Q(x_0)\neq 0$，就有 $\lim\limits_{x\to x_0} F(x)=F(x_0)$，因此有理分式函数在其定义域内的每一点都是连续的．

由第四节例5可知，函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内是连续的．

作为例子，我们来证明，函数 $y=\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是连续的．

设 x 是区间 $(-\infty,+\infty)$ 内任意取定的一点．当 x 有增量 Δx 时，对应的函数的增量为

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x,$$

由三角公式有

$$\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right),$$

注意到

$$\left|\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right|\leqslant 1,$$

就推得

$$|\Delta y|=|\sin(x+\Delta x)-\sin x|\leqslant 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|.$$

因为对于任意的角度 α，当 $\alpha\neq 0$ 时有 $|\sin\alpha|<|\alpha|$，所以

$$0\leqslant|\Delta y|=|\sin(x+\Delta x)-\sin x|<|\Delta x|.$$

因此，当 $\Delta x\to 0$ 时，由夹逼准则得 $|\Delta y|\to 0$，这就证明了 $y=\sin x$ 对于任一 $x\in(-\infty,+\infty)$ 是连续的．

类似地可以证明，函数 $y=\cos x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是连续的．

二、函数的间断点

设函数 $f(x)$在点 x_0的某去心邻域内有定义.在此前提下,如果函数 $f(x)$有下列三种情形之一:

(1) 在 $x=x_0$没有定义;

(2) 虽在 $x=x_0$有定义,但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在;

(3) 虽在 $x=x_0$有定义,且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$;

则函数 $f(x)$在点 x_0为不连续,而点 x_0称为函数 $f(x)$的不连续点或间断点.

下面举例来说明函数间断点的几种常见类型.

例1 正切函数 $y=\tan x$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$处没有定义,所以点 $x=\frac{\pi}{2}$是函数 $\tan x$ 的间断点.因

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x=\infty,$$

我们称 $x=\frac{\pi}{2}$为函数 $\tan x$ 的无穷间断点(图1－48).

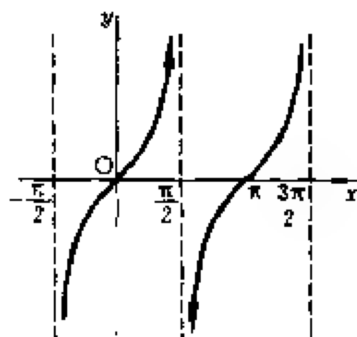


图 1－48

例2 函数 $y=\sin\frac{1}{x}$在点 $x=0$没有定义;当 $x\to0$时,函数值在－1与＋1之间变动无限多次(图1－49),所以点 $x=0$称为函数 $\sin\frac{1}{x}$的振荡间断点.

例3 函数 $y=\frac{x^2-1}{x-1}$在点 $x=1$没有定义,所以函数在点 $x=1$为不连续(图1－50).但这里

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+1)=2.$$

如果补充定义:令 $x=1$时 $y=2$,则所给函数在 $x=1$成为连续.所

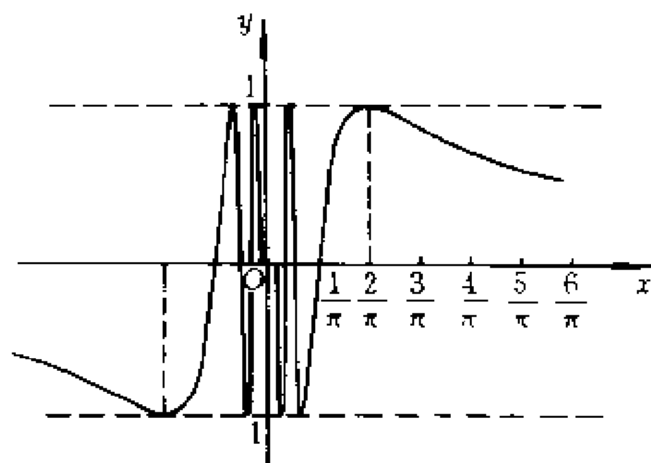


图 1-49

以 $x=1$ 称为该函数的可去间断点.

例4 函数

$$y=f(x)=\begin{cases} x, & x\neq 1, \\ \frac{1}{2}, & x=1. \end{cases}$$

这里 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}x=1$，但 $f(1)=\frac{1}{2}$，所以

$$\lim_{x\to 1}f(x)\neq f(1).$$

图 1-50

因此，点 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的间断点（图1－51）. 但如果改变函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的定义：令 $f(1)=1$，则 $f(x)$ 在 $x=1$ 成为连续. 所以 $x=1$ 也称为该函数的可去间断点.

例5 函数

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ x+1, & x>0. \end{cases}$$

这里，当 $x\to 0$ 时，

$$\lim_{x\to -0}f(x)=\lim_{x\to -0}(x-1)=-1,$$

$$\lim_{x\to +0}f(x)=\lim_{x\to +0}(x+1)=1.$$

左极限与右极限虽都存在，但不相等，故极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在，所

以点 $x=0$是函数 $f(x)$的间断点（图1—52）. 因 $y=f(x)$的图形在 $x=0$处产生跳跃现象，我们称 $x=0$为函数 $f(x)$的跳跃间断点.

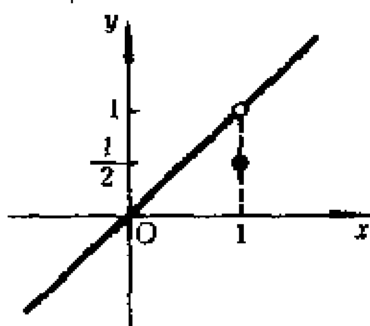


图 1—51

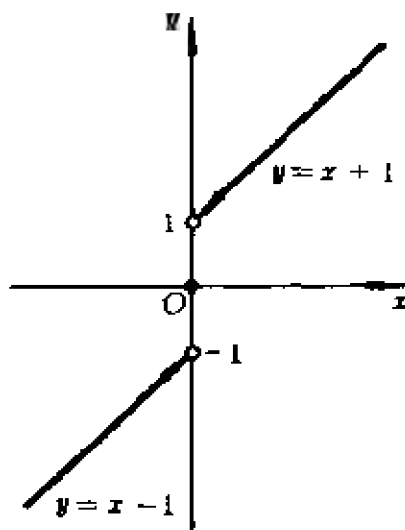


图 1—52

上面举了一些间断点的例子. 通常把间断点分成两类：如果 x_0是函数 $f(x)$的间断点，但左极限 $f(x_0-0)$及右极限 $f(x_0+0)$都存在，那末 x_0称为函数 $f(x)$的第一类间断点. 不是第一类间断点的任何间断点，称为第二类间断点. 在第一类间断点中，左、右极限相等者称为可去间断点，不相等者称为跳跃间断点. 无穷间断点和振荡间断点显然是第二类间断点.

习 题 1—9

1. 研究下列函数的连续性，并画出函数的图形：

(1) $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 2-x, & 1<x\leqslant 2; \end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases} x, & -1\leqslant x\leqslant 1, \\ 1, & x<-1 \text{或} x>1. \end{cases}$

2. 下列函数在指出的点处间断，说明这些间断点属于哪一类. 如果是可去间断点，则补充或改变函数的定义使它连续：

(1) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x-2}$，$x=1$，$x=2$；

(2) $y=\dfrac{x}{\tan x}$，$x=k\pi$，$x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $\quad(k=0,\pm1,\pm2\cdots)$；

(3) $y=\cos^2\dfrac{1}{x}$，$x=0$；

(4) $y=\begin{cases} x-1, & x\leqslant 1, \\ 3-x, & x>1, \end{cases}$ $\quad x=1$.

3. 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ 的连续性，若有间断点，判别其类型.

4. 证明：若函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续且 $f(x_0)\neq 0$，则存在 x_0 的某一邻域 $U(x_0)$，当 $x\in U(x_0)$ 时，$f(x)\neq 0$.

第十节　连续函数的运算与初等函数的连续性

一、连续函数的和、积及商的连续性

由函数在某点连续的定义和极限的四则运算法则，立即可得出下列定理.

定理1　有限个在某点连续的函数的和是一个在该点连续的函数.

证　考虑两个在点 x_0 连续的函数 $f(x)$、$g(x)$ 的和：

$$F(x)=f(x)+g(x).$$

由第六节定理3及函数在点 x_0 连续的定义，有

$$\lim_{x\to x_0}F(x)=\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to x_0}f(x)+\lim_{x\to x_0}g(x)$$
$$=f(x_0)+g(x_0)=F(x_0),$$

这就证明了两个在点 x_0 连续的函数之和在点 x_0 连续. 类似地可证有限个函数之和的情形.

仿此，由读者自己证明下面两个定理：

定理2　有限个在某点连续的函数的乘积是一个在该点连续的函数.

定理3　两个在某点连续的函数的商是一个在该点连续的函数，只要分母在该点不为零.

例1　因 $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$，$\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$，而 $\sin x$ 和 $\cos x$ 都在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内连续（第九节），故由定理3知 $\tan x$ 和 $\cot x$ 在它

们的定义域内是连续的.

二、反函数与复合函数的连续性

反函数的概念和复合函数的概念已经在第一节及第二节中讲过，这一节来讨论它们的连续性.

定理4　如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I_x 上单调增加(或单调减少)且连续，那末它的反函数 $x=\varphi(y)$ 也在对应的区间 $I_y=\{y|y=f(x),x\in I_x\}$ 上单调增加(或单调减少)且连续.

证明从略.

例2　由于 $y=\sin x$ 在闭区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加且连续，所以它的反函数 $y=\arcsin x$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上也是单调增加且连续的.

同样，应用定理4可证：$y=\arccos x$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上单调减少且连续；$y=\arctan x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加且连续；$y=\operatorname{arccot} x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内单调减少且连续.

总之，反三角函数 $\arcsin x,\arccos x,\arctan x,\operatorname{arccot} x$ 在它们的定义域内都是连续的.

定理5　设函数 $u=\varphi(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限存在且等于 a，即

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=a,$$

而函数 $y=f(u)$ 在点 $u=a$ 连续，那末复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 当 $x\to x_0$ 时的极限也存在且等于 $f(a)$，即

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f(a). \tag{1}$$

证　在第六节定理8中，令 $A=f(a)$(这时 $f(u)$ 在点 a 连续)，并取消"在点 x_0 的某去心邻域内 $\varphi(x)\neq a$"这条件，便得上面的定理. 这里 $\varphi(x)\neq a$ 这条件可以取消的理由是：对于任意给定的正数 ε，使 $\varphi(x)=a$ 成立的那些点 x，显然也使 $|f[\varphi(x)]-f(a)|<\varepsilon$ 成立. 因此附加 $\varphi(x)\neq a$ 这条件就没有必要了.

因为在定理5中有

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = a \text{ 及 } \lim_{u \to a} f(u) = f(a),$$

故(1)式又可写成

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = f[\lim_{x \to x_0} \varphi(x)], \tag{2}$$

或

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{u \to a} f(u). \tag{3}$$

(2) 式表示,在定理5的条件下,求复合函数 $f[\varphi(x)]$的极限时,函数符号 f 与极限号可以交换次序.

(3) 式表示,在定理5的条件下,如果作代换 $u=\varphi(x)$,那末求 $\lim\limits_{x \to x_0} f[\varphi(x)]$就化为求 $\lim\limits_{u \to a} f(u)$,这里 $a=\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$.

把定理5中的 $x \to x_0$换成 $x \to \infty$,可得类似的定理.

例3 求 $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{\dfrac{x-3}{x^2-9}}$

解 $y=\sqrt{\dfrac{x-3}{x^2-9}}$可看作由 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=\dfrac{x-3}{x^2-9}$复合而成. 因为 $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-3}{x^2-9}=\dfrac{1}{6}$,而函数 $y=\sqrt{u}$ 在点 $u=\dfrac{1}{6}$连续,所以

$$\lim_{x \to 3} \sqrt{\frac{x-3}{x^2-9}} = \sqrt{\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2-9}} = \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

定理6 **设函数 $u=\varphi(x)$在点 $x=x_0$连续,且 $\varphi(x_0)=u_0$,而函数 $y=f(u)$在点 $u=u_0$连续,那末复合函数 $y=f[\varphi(x)]$在点 $x=x_0$也是连续的.**

证 只要在定理5中令 $a=u_0=\varphi(x_0)$,这就表示 $\varphi(x)$在点 x_0连续,于是由(1)式得

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = f(u_0) = f[\varphi(x_0)],$$

这就证明了复合函数 $f[\varphi(x)]$在点 x_0连续.

例4 讨论函数 $y=\sin\dfrac{1}{x}$的连续性.

解 函数 $y=\sin\dfrac{1}{x}$可看作是由 $y=\sin u$ 及 $u=\dfrac{1}{x}$复合而成

的. $\sin u$ 当 $-\infty<u<+\infty$ 时是连续的，$\frac{1}{x}$ 当 $-\infty<x<0$ 和 $0<x<+\infty$ 时是连续的. 根据定理6，函数 $\sin\frac{1}{x}$ 在无限区间 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 内是连续的.

三、初等函数的连续性

前面证明了三角函数及反三角函数在它们的定义域内是连续的.

我们指出(但不详细讨论)，指数函数 $a^x(a>0,a\neq1)$ 对于一切实数 x 都有定义，且在区间 $(-\infty,-\infty)$ 内是单调的和连续的，它的值域为 $(0,+\infty)$.

由指数函数的单调性和连续性，引用定理4可得：对数函数 $\log_a x(a>0,a\neq1)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内单调且连续.

幂函数 $y=x^\mu$ 的定义域随 μ 的值而异，但无论 μ 为何值，在区间 $(0,+\infty)$ 内幂函数总是有定义的. 下面我们来证明，在 $(0,+\infty)$ 内幂函数是连续的. 事实上，设 $x>0$，则

$$y=x^\mu=a^{\mu\log_a x},$$

因此，幂函数 x^μ 可看作是由 $y=a^u$，$u=\mu\log_a x$ 复合而成的，由此，根据定理6，它在 $(0,+\infty)$ 内连续. 如果对于 μ 取各种不同值加以分别讨论，可以证明(我们不证)幂函数在它的定义域内是连续的.

综合起来得到：**基本初等函数在它们的定义域内都是连续的.**

最后，根据第二节中关于初等函数的定义，由基本初等函数的连续性以及本节定理1、2、3、6可得下列重要结论：**一切初等函数在其定义区间内都是连续的.** 所谓定义区间，就是包含在定义域内的区间.

根据函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的定义，如果已知 $f(x)$ 在点 x_0 连续，那末求 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 的极限时，只要求 $f(x)$ 在点 x_0 的函数值就行了. 因此，上述关于初等函数连续性的结论提供了求极限的一个方法，这就是：如果 $f(x)$ 是初等函数，且 x_0 是 $f(x)$ 的定义区间

内的点，则

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

例如，点 $x_0=0$是初等函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$的定义区间[$-1,1$]上的点，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1}=1$；又如点 $x_0=\frac{\pi}{2}$是初等函数 $f(x)=\ln\sin x$ 的一个定义区间$(0,\pi)$内的点.所以

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \ln\sin x = \ln \sin \frac{\pi}{2} = 0.$$

例5 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}$.

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}=\frac{0}{2}=0.$$

例6 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}$.

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\log_a e=\frac{1}{\ln a}.$$

例7 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$.

解 令 $a^x-1=t$，则 $x=\log_a(1+t)$，$x\to 0$时 $t\to 0$，于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)}=\ln a.$$

习 题 1—10

1. 求函数 $f(x)=\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}$ 的连续区间，并求极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to -3}f(x)$及 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

2. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2-2x+5}$；　　(2) $\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2\alpha)^3$；

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\ln(2\cos 2x)$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{\sin x-\sin\alpha}{x-\alpha}$；

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$.

3. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\ln\frac{\sin x}{x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\tan^2 x)^{\cot^2 x}$.

4. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0,\\ a+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

应当怎样选择数 a，使得 $f(x)$ 成为在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数.

第十一节　闭区间上连续函数的性质

第九节中已说明了函数在区间上连续的概念，如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续，在右端点 b 左连续，在左端点 a 右连续，那末函数 $f(x)$ 就是在闭区间 $[a,b]$ 上连续的. 在闭区间上连续的函数有几个重要的性质，今以定理的形式叙述它们.

一、最大值和最小值定理

先说明最大值和最小值的概念. 对于在区间 I 上有定义的函数 $f(x)$，如果有 $x_0\in I$，使得对于任一 $x\in I$ 都有

$$f(x)\leqslant f(x_0)\quad (f(x)\geqslant f(x_0)),$$

则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的最大值（最小值）.

例如，函数 $f(x)=1+\sin x$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上有最大值2和最小值0. 又例如，函数 $f(x)=\operatorname{sgn} x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内有最大值1和最小值 -1. 在开区间 $(0,+\infty)$ 内，$\operatorname{sgn} x$ 的最大值和最小值都

等于1.(注意,最大值和最小值可以相等!)但函数 $f(x)=x$ 在开区间 (a,b) 内既无最大值又无最小值. 下列定理给出最大值和最小值存在的充分条件.

定理1(最大值和最小值定理)　在闭区间上连续的函数在该区间上一定有最大值和最小值.

这就是说,如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,那末至少有一点 $\xi_1\in[a,b]$,使 $f(\xi_1)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值;又至少有一点 $\xi_2\in[a,b]$,使 $f(\xi_2)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值(图1—53).

证明从略.

注意　如果函数在开区间内连续,或函数在闭区间上有间断点,那末函数在该区间上就不一定有最大值或最小值. 前面提到的函数 $y=x$ 在开区间 (a,b) 内是连续的,但在开区间 (a,b) 内既无最大值又无最小值. 又例如,函数

$$y=f(x)=\begin{cases}-x+1, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x=1,\\ -x+3, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$$

在闭区间 $[0,2]$ 上有间断点 $x=1$,这函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,2]$ 上既无最大值又无最小值(图1—54).

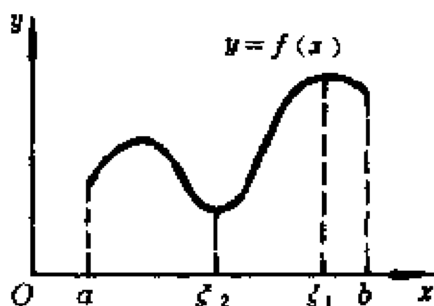


图　1—53

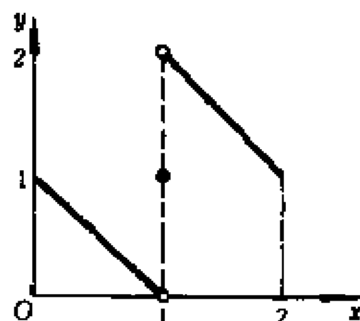


图　1—54

由定理1可得下列定理.

定理2(有界性定理)　在闭区间上连续的函数一定在该区间

上有界.

证 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续. 由定理1,存在 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值 M 及最小值 m,使任一 $x\in[a,b]$ 满足

$$m\leqslant f(x)\leqslant M.$$

上式表明,$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有上界 M 和下界 m,因此函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

二、介值定理

如果 x_0 使 $f(x_0)=0$,则 x_0 称为函数 $f(x)$ 的零点.

定理3(零点定理)　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号(即 $f(a)\cdot f(b)<0$),那末在开区间 (a,b) 内至少有函数 $f(x)$ 的一个零点,即至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$ 使

$$f(\xi)=0.$$

证明从略.

从几何上看,定理3表示:如果连续曲线弧 $y=f(x)$ 的两个端点位于 x 轴的不同侧,那末这段曲线弧与 x 轴至少有一个交点(图1－55).

由定理3立即可推得下列较一般性的定理.

定理4(介值定理)　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且在这区间的端点取不同的函数值

$$f(a)=A \quad \text{及} \quad f(b)=B,$$

那末,对于 A 与 B 之间的任意一个数 C,在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ,使得

$$f(\xi)=C \quad (a<\xi<b).$$

证 证 $\varphi(x)=f(x)-C$,则 $\varphi(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且 $\varphi(a)=A\quad C$ 与 $\varphi(b)=B-C$ 异号. 根据零点定理,开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ 使得

$$\varphi(\xi)=0 \quad (a<\xi<b).$$

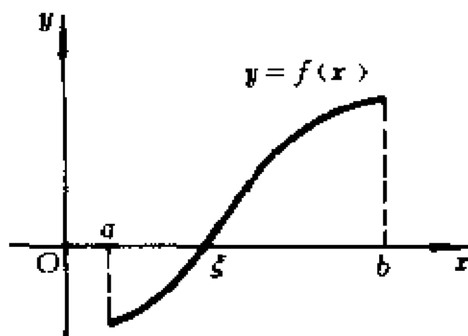


图 1－55

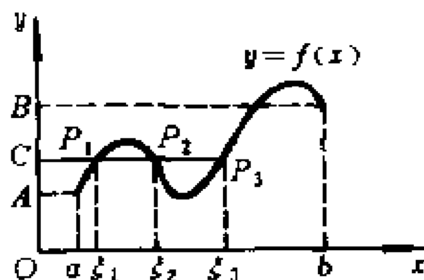


图 1－56

但 $\varphi(\xi)=f(\xi)-C$，因此由上式即得

$$f(\xi)=C \quad (a<\xi<b).$$

这定理的几何意义是：连续曲线弧 $y=f(x)$ 与水平直线 $y=C$ 至少相交于一点（图1－56）.

推论　在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.

设 $m=f(x_1)$，$M=f(x_2)$，而 $m\neq M$，在闭区间 $[x_1,x_2]$（或 $[x_2,x_1]$）上应用介值定理，即得上述推论.

例1　证明方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个根.

证　函数 $f(x)=x^3-4x^2+1$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，又

$$f(0)=1>0, \qquad f(1)=-2<0.$$

根据零点定理，在 $(0,1)$ 内至少有一点 ξ，使得

$$f(\xi)=0,$$

即

$$\xi^3-4\xi^2+1=0 \qquad (0<\xi<1).$$

这等式说明方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个根是 ξ.

*三、一致连续性

我们先介绍函数的一致连续性概念.

设函数在区间 I 上连续，x_0 是在 I 上任意取定的一个点. 由于

$f(x)$在点x_0连续，因此对于任意给定的正数ε，存在着正数δ，使得当$|x-x_0|<\delta$时，就有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 通常这个$\delta$不仅与$\varepsilon$有关，而且与所取定的$x_0$有关，即使$\varepsilon$不变，但选取区间$I$上的其它点作为$x_0$时，这个$\delta$就不一定适用了. 可是对于某些函数，却有这样一种重要情形：存在着只与ε有关，而对区间I上任何点x_0都能适用的正数δ，即对任何$x_0\in I$，只要$|x-x_0|<\delta$时，就有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 如果函数$f(x)$在区间$I$上能使这种情形发生，就说函数$f(x)$在区间$I$上是一致连续的.

定义　设函数$f(x)$在区间I上有定义. 如果对于任意给定的正数ε，总存在着正数δ，使得对于区间I上的任意两点x_1、x_2，当$|x_1-x_2|<\delta$时，就有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon,$$

那末称函数$f(x)$在区间I上是一致连续的.

一致连续性表示，不论在区间I的任何部分，只要自变量的两个数值接近到一定程度，就可使对应的函数值达到所指定的接近程度.

由上述定义可知，如果函数$f(x)$在区间I上一致连续，那末$f(x)$在区间I上也是连续的. 但反过来不一定成立，举例说明如下：

例2　函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$在区间$(0,1]$上是连续的，但不是一致连续的.

因为函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$是初等函数，它在区间$(0,1]$上有定义，所以在$(0,1]$上是连续的.

任意给定小于1的正数$\varepsilon(0<\varepsilon<1)$. 假定$f(x)=\dfrac{1}{x}$在$(0,1]$上一致连续，应该存在着正数$\delta$，使得对于$(0,1]$上的任意两个值$x_1$、$x_2$，当$|x_1-x_2|<\delta$时，就有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

现在取原点附近的两点

$$x_1=\frac{1}{n}, \qquad x_2=\frac{1}{n+1},$$

其中 n 为正整数，这样的 x_1、x_2 显然在 $(0,1]$ 上. 因

$$|x_1-x_2|=\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right|=\frac{1}{n(n+1)},$$

故只要 n 取得足够大，总能使 $|x_1-x_2|<\delta$. 但这时有

$$|f(x_1)-f(x_2)|=\left|\frac{1}{\frac{1}{n}}-\frac{1}{\frac{1}{n+1}}\right|=|n-(n+1)|=1>\varepsilon,$$

不符合一致连续的定义，所以 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 上不是一致连续的.

上例说明，在半开区间上连续的函数不一定在该区间上一致连续. 但是，有下面的定理：

定理5（一致连续性定理）　如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，那末它在该区间上一致连续.

证明从略.

习　题　1－11

1. 证明方程 $x^5-3x=1$ 至少有一个根介于1和2之间.

2. 证明方程 $x=a\sin x+b$，其中 $a>0,b>0$，至少有一个正根，并且它不超过 $a+b$.

3. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$，则在 $[x_1,x_n]$ 上必有 ξ，使 $f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$.

4. 证明：若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 必在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

5*. 在什么条件下，(a,b) 内的连续函数 $f(x)$ 为一致连续？

总 习 题 一

1. 在"充分"、"必要"和"充分必要"三者中选择一个正确的填入下列空

格内：

(1) 数列$\{x_n\}$有界是数列$\{x_n\}$收敛的________条件. 数列$\{x_n\}$收敛是数列$\{x_n\}$有界的________条件.

(2) $f(x)$在x_0的某一去心邻域内有界是$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在的________条件. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在是$f(x)$在$x_0$的某一去心邻域内有界的________条件.

(3) $f(x)$在x_0的某一去心邻域内无界是$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=\infty$的________条件. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=\infty$是$f(x)$在$x_0$的某一去心邻域内无界的________条件.

(4) $f(x)$当$x \to x_0$时的右极限$f(x_0+0)$及左极限$f(x_0-0)$都存在且相等是$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在的________条件.

2. 说明函数

$$y=\begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x & x<0 \end{cases} \quad 与 \quad y=\sqrt{x^2}$$

表示同一个函数的理由. 这函数是初等函数吗?

3. 举例说明"分段函数一定不是初等函数"这种说法是不对的.

4. 说明符号函数 $y=\operatorname{sgn} x$ 不是初等函数的理由.

5. 设 $f(x)$的定义域是$[0,1]$,求下列函数的定义域:

(1) $f(e^x)$; (2) $f(\ln x)$;

(3) $f(\arctan x)$; (4) $f(\cos x)$.

6. 设

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ x, & x>0, \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ -x^2, & x>0. \end{cases}$$

求 $f[f(x)]$, $g[g(x)]$, $f[g(x)]$, $g[f(x)]$.

7. 利用 $y=\sin x$ 的图形作出下列函数的图形:

(1) $y=|\sin x|$;

(2) $y=\sin|x|$;

(3) $y=2\sin\dfrac{x}{2}$.

8. 把半径为 R 的一圆形铁片,自中心处剪去中心角为 α 的一扇形后围成一无底圆锥. 试将这圆锥的体积表为 α 的函数.

9. 根据函数极限的定义证明 $\lim\limits_{x \to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x-3}=5$.

10. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-x+1}{(x-1)^2}$；

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$；

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

11. 设

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ a+x^2 & x\leqslant0.\end{cases}$$

要使 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，应当怎样选择数 a?

12. 设

$$f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x-1}}, & x>0,\\ \ln(1+x), & -1<x\leqslant0,\end{cases}$$

求 $f(x)$的间断点，并说明间断点所属类型.

13. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

14. 证明方程 $\sin x+x+1=0$在开区间$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$内至少有一个根.

第二章　导数与微分

微分学是微积分的重要组成部分，它的基本概念是导数与微分，其中导数反映出函数相对于自变量的变化快慢的程度，而微分则指明当自变量有微小变化时，函数大体上变化多少.

在这一章中，我们主要讨论导数和微分的概念以及它们的计算方法. 至于导数的应用，将在第三章讨论.

第一节　导数概念

一、引例

为了说明微分学的基本概念——导数，我们先讨论两个问题：速度问题和切线问题. 这两个问题在历史上都与导数概念的形成有密切的关系.

1. 直线运动的速度

设某点沿直线运动. 在直线上引入原点和单位点（即表示实数 1 的点），使直线成为数轴. 此外，再取定一个时刻作为测量时间的零点. 设动点于时刻 t 在直线上的位置的坐标为 s（简称位置 s）. 这样，运动完全由某个函数

$$s=f(t)$$

所确定. 这函数对运动过程中所出现的 t 值有定义，称为位置函数. 在最简单的情形，该动点所经过的路程与所花的时间成正比. 就是说，无论取哪一段时间间隔，比值

$$\frac{\text{经过的路程}}{\text{所花的时间}} \tag{1}$$

总是相同的. 这个比值就称为该动点的速度，并说该点作匀速运

动. 如果运动不是匀速的，那末在运动的不同时间间隔内，比值(1)会有不同的值. 这样，把比值(1)笼统地称为该动点的速度就不合适了，而需要按不同时刻来考虑. 那末，这种非匀速运动的动点在某一时刻(设为 t_0)的速度应如何理解而又如何求得呢?

首先取从时刻 t_0 到 t 这样一个时间间隔，在这段时间内，动点从位置 $s_0=f(t_0)$ 移动到 $s=f(t)$. 这时由(1)式算得的比值

$$\frac{s-s_0}{t-t_0}=\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} \tag{2}$$

可认为是动点在上述时间间隔内的平均速度. 如果时间间隔选得较短，这个比值(2)在实践中也可用来说明动点在时刻 t_0 的速度. 但对于动点在时刻 t_0 的速度的精确概念来说，这样做是不够的，而更确切地应当这样：令 $t\to t_0$，取(2)式的极限，如果这个极限存在，设为 v，即

$$v=\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0},$$

这时就把这个极限值 v 称为动点在时刻 t_0 的(瞬时)速度.

2. 切线问题

圆的切线可定义为“与曲线只有一个交点的直线”. 但是对于其它曲线，用“与曲线只有一个交点的直线”作为切线的定义就不一定合适. 例如，对于抛物线 $y=x^2$，在原点 O 处两个坐标轴都符合上述定义，但实际上只有 x 轴是该抛物线在点 O 处的切线. 下面给出切线的定义.

设有曲线 C 及 C 上的一点 M(图 2—1)，在点 M 外另取 C 上一点 N，作割线 MN. 当点 N 沿曲线 C 趋于点 M 时，如果割线 MN 绕点 M 旋转而趋于极限位置 MT，直线 MT 就称为曲线 C 在点 M 处的切线. 这里极限位置的含义是：只要弦长 $|MN|$ 趋于零，$\angle NMT$ 也趋于零.

现在就曲线 C 为函数 $y=f(x)$ 的图形的情形来讨论切线问题. 设 $M(x_0,y_0)$ 是曲线 C 上的一个点(图 2—2)，则 $y_0=f(x_0)$. 根

据上述定义要定出曲线 C 在点 M 处的切线，只要定出切线的斜率就行了. 为此，在点 M 外另取 C 上的一点 $N(x,y)$，于是割线 MN 的斜率为

$$\tan\varphi=\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

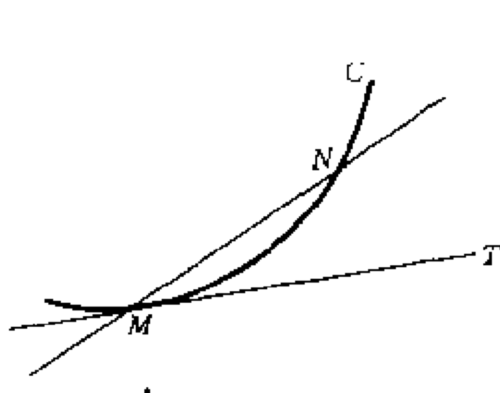


图 2－1

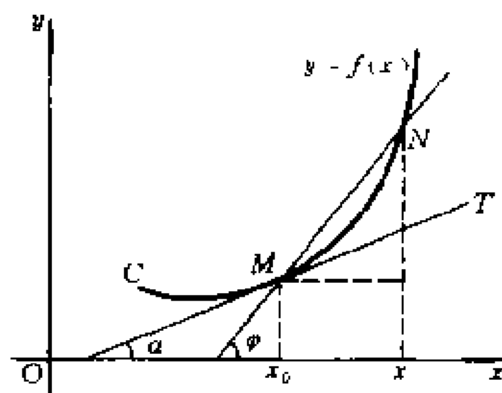


图 2－2

其中 φ 为割线 MN 的倾角. 当点 N 沿曲线 C 趋于点 M 时，$x\to x_0$. 如果当 $x\to x_0$ 时，上式的极限存在，设为 k，即

$$k=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在，则此极限 k 是割线斜率的极限，也就是切线的斜率. 这里 $k=\tan\alpha$，其中 α 是切线 MT 的倾角. 于是，通过点 $M(x_0,f(x_0))$ 且以 k 为斜率的直线 MT 便是曲线 C 在点 M 处的切线. 事实上，由 $\angle NMT=\varphi-\alpha$ 以及 $x\to x_0$ 时 $\varphi\to\alpha$，可见 $x\to x_0$ 时（这时 $|MN|\to 0$），$\angle NMT\to 0$. 因此直线 MT 确为曲线 C 在点 M 处的切线.

二、导数的定义

从上面所讨论的两个问题看出，非匀速直线运动的速度和切线的斜率都归结为如下的极限：

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \tag{3}$$

这里 $x-x_0$ 和 $f(x)-f(x_0)$ 分别是函数 $y=f(x)$ 的自变量的增量 Δx 和函数的增量 Δy：

$$\Delta x=x-x_0,$$

$$\Delta y=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

因 $x\to x_0$ 相当于 $\Delta x\to 0$，故(3)式也可写成

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\quad 或\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

在自然科学和工程技术领域内，还有许多概念，例如电流强度、角速度、线密度等等，都可归结为形如(3)式的数学形式. 我们撇开这些量的具体意义，抓住它们在数量关系上的共性，就得出函数的导数概念.

定义　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，当自变量 x 在 x_0 处取得增量 Δx（点 $x_0+\Delta x$ 仍在该邻域内）时，相应地函数 y 取得增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；如果 Δy 与 Δx 之比当 $\Delta x\to 0$ 时的极限存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，并称这个极限为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数，记为 $y'|_{x=x_0}$，即

$$y'|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},\tag{4}$$

也可记作 $f'(x_0)$，$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$ 或 $\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$.

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导有时也说成 $f(x)$ 在点 x_0 具有导数或导数存在.

导数的定义式(4)也可取不同的形式，常见的有

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\tag{5}$$

和

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.\tag{6}$$

(5)式中的 h 即自变量的增量 Δx.

在实际中，需要讨论各种具有不同意义的变量的变化“快慢”

问题，在数学上就是所谓函数的变化率问题．导数概念就是函数变化率这一概念的精确描述．它撇开了自变量和因变量所代表的几何或物理等方面的特殊意义，纯粹从数量方面来刻划变化率的本质：因变量增量与自变量增量之比$\frac{\Delta y}{\Delta x}$是因变量 y 在以 x_0 和 $x_0+\Delta x$ 为端点的区间上的平均变化率，而导数 $y'|_{x=x_0}$则是因变量在点 x_0 处的变化率，它反映了因变量随自变量的变化而变化的快慢程度．

如果极限(4)不存在，就说函数 $y=f(x)$在点 x_0 处不可导．如果不可导的原因是由于 $\Delta x\to 0$ 时，比式$\frac{\Delta y}{\Delta x}\to\infty$，为了方便起见，也往往说函数 $y=f(x)$在点 x_0 处的导数为无穷大．

上面讲的是函数在一点处可导．如果函数 $y=f(x)$在开区间 I 内的每点处都可导，就称函数 $f(x)$在开区间 I 内可导．这时，对于任一 $x\in I$，都对应着 $f(x)$的一个确定的导数值．这样就构成了一个新的函数，这个函数叫做原来函数 $y=f(x)$的导函数，记作

y'，$f'(x)$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 或 $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$.

在(4)式或(5)式中把 x_0 换成 x，即得导函数的定义式

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

或

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

注意　在以上两式中，虽然 x 可以取区间 I 内的任何数值，但在极限过程中，x 是常量，Δx 或 h 是变量．

显然，函数 $f(x)$在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$就是导函数 $f'(x)$在点 $x=x_0$ 处的函数值，即

$$f'(x_0)=f'(x)|_{x=x_0}.$$

导函数 $f'(x)$简称导数，而 $f'(x_0)$是 $f(x)$在 x_0 处的导数或导数 $f'(x)$在 x_0 处的值．

三、求导数举例

下面根据导数定义求一些简单函数的导数.

例 1 求函数 $f(x)=C$（C 为常数）的导数.

解 $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{C-C}{h}=0$,

即
$$(C)'=0.$$
这就是说，常数的导数等于零.

例 2 求函数 $f(x)=x^n$（n 为正整数）在 $x=a$ 处的导数.

解 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{x-a}$

$$=\lim_{x\to a}(x^{n-1}+ax^{n-2}+\cdots+a^{n-1})=na^{n-1}.$$

把以上结果中的 a 换成 x 得 $f'(x)=nx^{n-1}$，即
$$(x^n)'=nx^{n-1}.$$
更一般地，对于幂函数 $y=x^\mu$（μ 为常数），有
$$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}.$$
这就是幂函数的导数公式. 这公式的证明将在以后讨论. 利用这公式，可以很方便地求出幂函数的导数，例如：

当 $\mu=\dfrac{1}{2}$ 时，$y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}\ (x>0)$ 的导数为
$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}},$$
即
$$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}};$$
当 $\mu=-1$ 时，$y=x^{-1}=\dfrac{1}{x}\ (x\neq 0)$ 的导数为
$$(x^{-1})'=(-1)x^{-1-1}=-x^{-2},$$
即
$$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}.$$

例 3 求函数 $f(x)=\sin x$ 的导数.

解 $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot 2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=\cos x,$$

即
$$(\sin x)'=\cos x.$$

这就是说，正弦函数的导数是余弦函数.

用类似的方法，可求得

$$(\cos x)'=-\sin x,$$

就是说，余弦函数的导数是负的正弦函数.

例 4 求函数 $f(x)=a^x(a>0,\ a\neq 1)$的导数.

解 $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^{x+h}-a^x}{h}$

$$=a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}.$$

利用第一章第十节例 7 的结果得

$$f'(x)=a^x\ln a,$$

即
$$(a^x)'=a^x\ln a.$$

这就是指数函数的导数公式. 特殊地，当 $a=\mathrm{e}$ 时，因 $\ln \mathrm{e}=1$，故有

$$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x.$$

上式表明，以 e 为底的指数函数的导数就是它自己. 这是以 e 为底的指数函数的一个重要特性.

例 5 求函数 $f(x)=\log_a x\quad(a>0,\ a\neq 1)$的导数.

解 $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\frac{x+h}{x}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}.$$

作代换 $u=\frac{h}{x}$ 并利用第一章第十节例 6 的结果得

$$f'(x)=\frac{1}{x\ln a},$$

即
$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}.$$

这就是对数函数的导数公式. 特殊地, 当 $a=\mathrm{e}$ 时, 由上式得自然对数函数的导数公式:

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}.$$

例 6 求函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处的导数.

解 $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{|h|-0}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{|h|}{h}$.

当 $h<0$ 时, $\frac{|h|}{h}=-1$, 故 $\lim\limits_{h\to-0}\frac{|h|}{h}=-1$;

当 $h>0$ 时, $\frac{|h|}{h}=1$, 故 $\lim\limits_{h\to+0}\frac{|h|}{h}=1$.

所以, $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ 不存在, 即函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导.

这里顺便指出, 根据函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 的定义,

$$f'(x_0)=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

是一个极限, 而极限存在的充分必要条件是左、右极限都存在且相等, 因此 $f'(x_0)$ 存在即 $f(x)$ 在点 x_0 处可导的充分必要条件是左、右极限

$$\lim_{h\to-0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{及} \quad \lim_{h\to+0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

都存在且相等. 这两个极限分别称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左导数和右导数, 记作 $f'_-(x_0)$ 及 $f'_+(x_0)$, 即

$$f'_-(x_0)=\lim_{h\to-0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

$$f'_+(x_0)=\lim_{h\to +0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

现在可以说，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导的充分必要条件是左导数 $f'_-(x_0)$ 和右导数 $f'_+(x_0)$ 都存在且相等.

函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处的左导数 $f'_-(0)=-1$ 及右导数 $f'_+(0)=+1$ 虽然都存在，但不相等，故 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导.

如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导，且 $f'_+(a)$ 及 $f'_-(b)$ 都存在，就说 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导.

四、导数的几何意义

由第一目中切线问题的讨论以及第二目中导数的定义可知：函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 在几何上表示曲线 $y=f(x)$

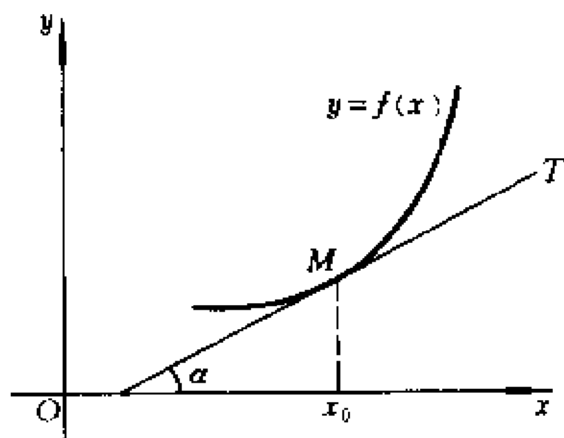


图 2—3

在点 $M(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率，即

$$f'(x_0)=\tan\alpha,$$

其中 α 是切线的倾角（图 2—3）.

如果 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数为无穷大，这时曲线 $y=f(x)$ 的割线以垂直于 x 轴的直线 $x=x_0$ 为极限位置，即曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,f(x_0))$ 处具有垂直于 x 轴的切线 $x=x_0$（参看后面例 9）.

根据导数的几何意义并应用直线的点斜式方程，可知曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处的切线方程为

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$$

过切点 $M(x_0,y_0)$ 且与切线垂直的直线叫做曲线 $y=f(x)$ 在点 M 处的法线. 如果 $f'(x_0)\neq 0$，法线的斜率为 $-\frac{1}{f'(x_0)}$，从而法线方程为

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

例 7 求等边双曲线 $y=\frac{1}{x}$ 在点 $\left(\frac{1}{2},2\right)$ 处的切线的斜率，并写出在该点处的切线方程和法线方程.

解 根据导数的几何意义知道，所求切线的斜率为

$$k_1=y'\big|_{x=\frac{1}{2}}.$$

由于 $y'=\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$，于是

$$k_1=-\frac{1}{x^2}\bigg|_{x=\frac{1}{2}}=-4.$$

从而所求切线方程为

$$y-2=-4\left(x-\frac{1}{2}\right),$$

即 $$4x+y-4=0.$$

所求法线的斜率为

$$k_2=-\frac{1}{k_1}=\frac{1}{4},$$

于是所求法线方程为

$$y-2=\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right),$$

即 $$2x-8y+15=0.$$

例 8 求曲线 $y=x^{\frac{3}{2}}$ 的通过点 $(5,11)$ 的切线方程.

解 设切点为 (x_0,y_0)，则切线的斜率为

$$y'\Big|_{x=x_0}=\frac{3}{2}\sqrt{x}\Big|_{x=x_0}=\frac{3}{2}\sqrt{x_0}.$$

于是所求切线方程可设为

$$y-y_0=\frac{3}{2}\sqrt{x_0}(x-x_0). \tag{7}$$

切点(x_0,y_0)在曲线 $y=x^{\frac{3}{2}}$上,故有

$$y_0=x_0^{\frac{3}{2}}. \tag{8}$$

切线(7)通过点(5,11),故有

$$11-y_0=\frac{3}{2}\sqrt{x_0}(5-x_0). \tag{9}$$

求得方程(8)及(9)组成的方程组的解为 $x_0=4$,$y_0=8$,代入(7)式并化简,即得所求切线方程为

$$3x-y-4=0.$$

五、函数的可导性与连续性的关系

设函数 $y=f(x)$在点 x 处可导,即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$$

存在. 由具有极限的函数与无穷小的关系知道,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha,$$

其中 α 当 $\Delta x\to 0$ 时为无穷小. 上式两边同乘以 Δx,得

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha\Delta x.$$

由此可见,当 $\Delta x\to 0$ 时,$\Delta y\to 0$. 这就是说,函数 $y=f(x)$在点 x 处是连续的. 所以,如果函数 $y=f(x)$在点 x 处可导,则函数在该点必连续.

另一方面,一个函数在某点连续却不一定在该点处可导. 举例说明如下:

例 9 函数 $y=f(x)=\sqrt[3]{x}$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内连续,但在

点 $x=0$ 处不可导. 这是因为在点 $x=0$ 处有

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{\sqrt[3]{h}-0}{h}=\frac{1}{h^{2/3}},$$

因而，$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^{2/3}}=+\infty$，即导数为无穷大（注意，导数不存在）. 这事实在图形中表现为曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 在原点 O 具有垂直于 x 轴的切线 $x=0$（图 2—4）.

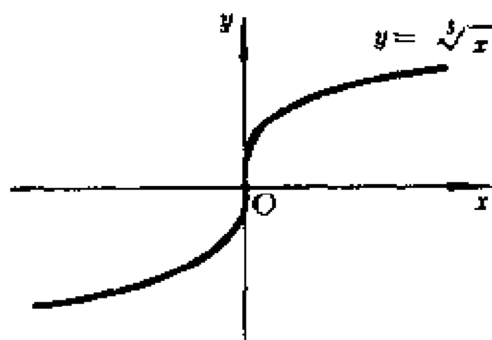


图 2—4

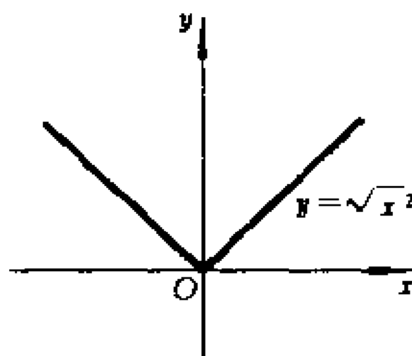


图 2—5

例 10 函数 $y=\sqrt{x^2}$（即 $y=|x|$）在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，但在例 6 中已经看到，这函数在 $x=0$ 处不可导. 曲线 $y=\sqrt{x^2}$ 在原点 O 没有切线（图 2—5）.

由以上讨论可知，函数在某点连续是函数在该点可导的必要条件，但不是充分条件.

习 题 2—1

1. 设 $f(x)=10x^2$，试按定义求 $f'(-1)$.

2. 设 $f(x)=ax+b$（a、b 都是常数），试按定义求 $f'(x)$.

3. 证明 $(\cos x)'=-\sin x$.

4. 下列各题中均假定 $f'(x_0)$ 存在，按照导数定义观察下列极限，指出 A 表示什么：

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$，其中 $f(0)=0$，且 $f'(0)$ 存在；

[illegible] $\lim\limits_{h\to [illegible]}\frac{f([illegible]+h)-f(x_0-h)}{h}=[illegible]1.$

5. 求下列函数的导数：

(1) $y=x^{[illegible]}$；　(2) $y=\sqrt{x^{[illegible]}}$；　(3) $y=x^{[illegible]}$；

(4) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$；　(5) $y=\frac{1}{x^2}$；　(6) $y=x^{[illegible]}\sqrt[3]{x}$；

(7) $y=\frac{x^2\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^5}}$.

6. 已知物体的运动规律为 $s=t^3$(m)，求这物体在 $t=2$ 秒(s)时的速度.

7. 如果 $f(x)$ 为偶函数，且 $f'(0)$ 存在，证明 $f'(0)=0$.

8. 求曲线 $y=\sin x$ 在具有下列横坐标的各点处切线的斜率：

$$x=\frac{2}{3}\pi;\qquad x=\pi.$$

9. 求曲线 $y=\cos x$ 上点 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2}\right)$ 处的切线方程和法线方程.

10. 求曲线 $y=e^x$ 在点(0,1)处的切线方程.

11. 在抛物线 $y=x^2$ 上取横坐标为 $x_1=1$ 及 $x_2=3$ 的两点，作过这两点的割线. 问该抛物线上哪一点的切线平行于这条割线？

12. 讨论下列函数在 $x=0$ 处的连续性与可导性：

(1) $y=|\sin x|$；

(2) $y=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

13. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1,\\ ax+b, & x>1.\end{cases}$$

为了使函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续且可导，a、b 应取什么值？

14. 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$ 求 $f'_+(0)$ 及 $f'_-(0)$，又 $f'(0)$ 是否存在？

15. 已知 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f'(x)$.

16. 设物体绕定轴旋转，在时间间隔$[0,t]$内转过角度 θ，从而转角 θ 是 t 的函数：$\theta=\theta(t)$. 如果旋转是匀速的，那末称 $\omega=\frac{\theta}{t}$ 为该物体旋转的角速度.

如果旋转是非匀速的，应怎样确定该物体在时刻 t_0 的角速度？

17. 当物体的温度高于周围介质的温度时，物体就不断冷却．若物体的温度 T 与时间 t 的函数关系为 $T=T(t)$，应怎样确定该物体在时刻 t 的冷却速度？

18. 证明：双曲线 $xy=a^2$ 上任一点处的切线与两坐标轴构成的三角形的面积都等于 $2a^2$.

第二节　函数的和、差、积、商的求导法则

前面我们根据导数的定义，求出了一些简单函数的导数．但是，对于比较复杂的函数，直接根据定义来求它们的导数往往很困难．在本节和下节中，将介绍求导数的几个基本法则和基本初等函数的导数公式．借助于这些法则和公式，就能比较方便地求出常见的函数——初等函数的导数．

本节探索函数的和、差、积、商的求导法则．为此，设函数 $u=u(x)$ 及 $v=v(x)$ 在点 x 具有导数 $u'=u'(x)$ 及 $v'=v'(x)$，并分别考虑这两个函数的和、差、积、商在点 x 的导数．

1．设 $f(x)=u(x)+v(x)$，则由导数定义有

$$
\begin{aligned}
f'(x)&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&=\lim_{h\to0}\frac{[u(x+h)+v(x+h)]-[u(x)+v(x)]}{h}\\
&=\lim_{h\to0}\left[\frac{u(x+h)-u(x)}{h}+\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right]\\
&=u'(x)+v'(x).
\end{aligned}
$$

这表示，函数 $f(x)$ 在点 x 处也可导，且

$$f'(x)=u'(x)+v'(x).$$

以上结果简单地写成

$$(u+v)'=u'+v'.$$

类似地可得

$$(u-v)'=u'-v'.$$

由此得函数和、差的求导法则：两个可导函数之和（差）的导数

等于这两个函数的导数之和(差).

这个法则可推广到任意有限项的情形,例如

$$(u+v-w)'=u'+v'-w'.$$

2. 设 $f(x)=u(x)\cdot v(x)$,则由导数定义有

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x+h)\\
&\quad+u(x)v(x+h)-u(x)v(x)]\\
&=\lim_{h\to 0}\left[\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\cdot v(x+h)\right.\\
&\quad\left.+u(x)\cdot\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right]\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}v(x+h)\\
&\quad+u(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\\
&=u'(x)v(x)+u(x)v'(x),
\end{aligned}$$

其中 $\lim\limits_{h\to 0}v(x+h)=v(x)$ 是由于 $v'(x)$ 存在,故 $v(x)$ 在点 x 连续.

因此,函数 $f(x)$ 在点 x 处也可导,且

$$f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x).$$

以上结果简单地写成

$$(uv)'=u'v+uv'.$$

由此得函数积的求导法则:**两个可导函数乘积的导数等于第一个因子的导数与第二个因子的乘积,加上第一个因子与第二个因子的导数的乘积.**

特殊地,如果 $v=C$(C 为常数),则因 $(C)'=0$,故有

$$(Cu)'=Cu'.$$

这就是说,**求一个常数与一个可导函数的乘积的导数时,常数因子可以提到求导记号外面去.**

积的求导法则也可推广到任意有限个函数之积的情形．例如

$$(uvw)'=[(uv)w]'=(uv)'w+(uv)w'$$
$$=(u'v+uv')w+uvw'$$

即
$$(uvw)'=u'vw+uv'w-uvw'.$$

例 1 $y=2x^3-5x^2+3x-7$，求 y'.

解
$$y'=(2x^3-5x^2+3x-7)'$$
$$=(2x^3)'-(5x^2)'+(3x)'-(7)'$$
$$=2(x^3)'-5(x^2)'+3(x)'$$
$$=2\cdot 3x^2-5\cdot 2x+3=6x^2-10x+3.$$

例 2 $f(x)=x^3+4\cos x-\sin\frac{\pi}{2}$，求 $f'(x)$及 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

解 $f'(x)=3x^2-4\sin x$，

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3}{4}\pi^2-4.$$

例 3 $y=e^x(\sin x+\cos x)$，求 y'.

解
$$y'=(e^x)'(\sin x+\cos x)+e^x(\sin x+\cos x)'$$
$$=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)$$
$$=2e^x\cos x.$$

3．设 $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$，$v(x)\neq 0$，则由导数定义有

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)}-\frac{u(x)}{v(x)}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x)-u(x)v(x+h)}{v(x+h)v(x)h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{[u(x+h)-u(x)]v(x)-u(x)[v(x+h)-v(x)]}{v(x+h)v(x)h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\cdot v(x)-u(x)\cdot\frac{v(x+h)-v(x)}{h}}{v(x-h)v(x)}$$
$$=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}.$$

这表示，函数 $f(x)$ 在点 x 处也可导，且

$$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}.$$

以上结果简单地写成

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

由此得**函数商的求导法则：两个可导函数之商的导数等于分子的导数与分母的乘积减去分母的导数与分子的乘积，再除以分母的平方**.

例 4 $y=\tan x$，求 y'.

解 $y'=(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'$

$$=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x,$$

即

$$(\tan x)'=\sec^2 x.$$

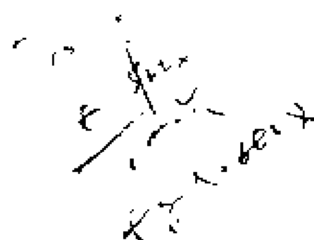
这就是正切函数的导数公式.

例 5 $y=\sec x$，求 y'.

解 $y'=(\sec x)'=\left(\frac{1}{\cos x}\right)'$

$$=\frac{(1)'\cos x-1\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\sec x\tan x,$$



即

$$(\sec x)'=\sec x\tan x.$$

这就是正割函数的导数公式.

用类似方法，还可求得余切函数及余割函数的导数公式：

$$(\cot x)'=-\csc^2 x,$$

$$(\csc x)'=-\csc x\cot x.$$

习　题　2—2

1. 推导余切函数及余割函数的导数公式：

$(\cot x)' = -\csc^2 x$; $(\csc x)' = -\csc x\cot x$.

2. 求下列函数的导数：

(1) $y=x^3-3x^2+4x-5$;

(2) $y=\frac{4}{x^5}+\frac{7}{x^4}-\frac{2}{x}+12$;

(3) $y=5x^3-2^x+3e^x$;

(4) $y=2\tan x+\sec x-1$;

(5) $y=\ln x-2\lg x+3\log_2 x$;

(6) $y=\sin x\cdot\cos x$;

(7) $y=x^2\ln x$;

(8) $y=3e^x\cos x$;

(9) $y=(2+3x)(4-7x)$;

(10) $y=\frac{\sin x}{x}$;

(11) $y=\frac{\ln x}{x}$;

(12) $y=\frac{e^x}{x^2}+\ln 3$;

(13) $y=\frac{1}{\ln x}$;

(14) $y=\frac{x-1}{x+1}$;

(15) $y=\frac{1}{1+x+x^2}$;

(16) $y=x^2\ln x\cos x$;

(17) $y=\frac{5x^2-3x+4}{x^2-1}$;

(18) $s=\frac{1+\sin t}{1+\cos t}$;

(19) $y=\frac{2\csc x}{1+x^2}$;

(20) $y=\frac{2\ln x+x^3}{3\ln x+x^2}$.

3. 求下列函数在给定点处的导数：

(1) $y=\sin x-\cos x$，求 $y'\Big|_{x=\frac{\pi}{6}}$ 和 $y'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}$；

(2) $\rho=\varphi\sin\varphi+\frac{1}{2}\cos\varphi$，求 $\frac{d\rho}{d\varphi}\Big|_{\varphi=\frac{\pi}{4}}$；

(3) $f(x)=\frac{3}{5-x}+\frac{x^2}{5}$，求 $f'(0)$ 和 $f'(2)$.

4. 以初速 v_0 竖直上抛的物体，其上升高度 s 与时间 t 的关系是 $s=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$. 求：

(1) 该物体的速度 $v(t)$；

(2) 该物体达到最高点的时刻.

5. 求抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 上具有水平切线的点.

6. 求曲线 $y=2\sin x+x^2$ 上横坐标为 $x=0$ 的点处的切线方程和法线方程.

7. 写出曲线 $y=x-\frac{1}{x}$ 与 x 轴交点处的切线方程.

第三节　反函数的导数　复合函数的求导法则

一、反函数的导数

设 $x=\varphi(y)$ 是直接函数，$y=f(x)$ 是它的反函数．由第一章第十节定理 4 知道，如果 $x=\varphi(y)$ 在区间 I_y 内单调且连续，那末它的反函数 $y=f(x)$ 在对应区间 $I_x=\{x|x=\varphi(y),y\in I_y\}$ 内也是单调且连续的．现在假定 $x=\varphi(y)$ 在区间 I_y 内不仅单调、连续，而且是可导的，在此假定下来考虑它的反函数 $y=f(x)$ 的可导性以及导数 $f'(x)$ 与 $\varphi'(y)$ 间的关系．

任取 $x\in I_x$，给 x 以增量 $\Delta x(\Delta x\neq 0,x+\Delta x\in I_x)$．由 $y=f(x)$ 的单调性可知

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)\neq 0,$$

于是有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}.$$

因 $y=f(x)$ 连续，故当 $\Delta x\to 0$ 时，必有 $\Delta y\to 0$．现再假定 $x=\varphi(y)$ 在点 y 处不仅可导且 $\varphi'(y)\neq 0$，即 $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta y}\neq 0$，则

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\varphi'(y)},$$

即

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}. \tag{1}$$

这表示，反函数 $y=f(x)$ 在点 x 可导且(1)式成立．由于 x 是区间 I_x 内任意取定的一点，因此得出结论：**如果函数 $x=\varphi(y)$ 在某区间 I_y 内单调、可导且 $\varphi'(y)\neq 0$，那末它的反函数 $y=f(x)$ 在对应区间 I_x 内也可导，且有公式(1)成立．**

上述结论简单地说成：反函数的导数等于直接函数导数的倒数．

下面用上述结论来求反三角函数及对数函数的导数.

例 1 设 $x=\sin y$ 为直接函数,则 $y=\arcsin x$ 是它的反函数.函数 $x=\sin y$ 在开区间 $I_y=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调、可导,且

$$(\sin y)'=\cos y>0.$$

因此,由公式(1),在对应区间 $I_x=(-1,1)$ 内有

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}.$$

但 $\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}$(因为当 $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$ 时,$\cos y>0$,所以根号前只取正号),从而得反正弦函数的导数公式:

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{2}$$

用类似的方法可得反余弦函数的导数公式:

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{3}$$

例 2 设 $x=\tan y$ 是直接函数,则 $y=\arctan x$ 是它的反函数.函数 $x=\tan y$ 在开区间 $I_y=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调、可导,且

$$(\tan y)'=\sec^2 y\neq 0.$$

因此,由公式(1),在对应区间 $I_x=(-\infty,+\infty)$ 内有

$$(\arctan x)'=\frac{1}{(\tan y)'}=\frac{1}{\sec^2 y}.$$

但 $\sec^2 y=1+\tan^2 y=1+x^2$,从而得反正切函数的导数公式:

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}. \tag{4}$$

用类似的方法可得反余切函数的导数公式:

$$(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}. \tag{5}$$

如果利用三角学中的公式

$\arccos x=\frac{\pi}{2}-\arcsin x$ 和 $\operatorname{arccot} x=\frac{\pi}{2}-\arctan x$,那末从本

节公式(2)和(4),也立刻可得公式(3)和(5).

例 3 设 $x=a^y(a>0,a\neq 1)$为直接函数,则 $y=\log_a x$ 是它的反函数.函数 $x=a^y$ 在区间 $I_y=(-\infty,+\infty)$内单调、可导,且

$$(a^y)'=a^y\ln a\neq 0.$$

因此,由公式(1),在对应区间 $I_x=(0,+\infty)$内有

$$(\log_a x)'=\frac{1}{(a^y)'}=\frac{1}{a^y\ln a}.$$

但 $a^y=x$,从而得到第一节例 5 中已求得的对数函数的导数公式:

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}.$$

二、复合函数的求导法则

到目前为止,对于

$$\ln\tan x,\qquad e^{x^3},\qquad \sin\frac{2x}{1+x^2}$$

那样的函数,我们还不知道它们是否可导,可导的话如何求它们的导数.这些问题借助于下面的重要法则可以得到解决,从而使可以求得导数的函数的范围得到很大扩充.

复合函数求导法则　如果 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 可导,而 $y=f(u)$在点 $u_0=\varphi(x_0)$可导,则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$在点 x_0 可导,且其导数为

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=f'(u_0)\cdot\varphi'(x_0).\tag{6}$$

证 由于 $y=f(u)$在点 u_0 可导,因此

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u_0)$$

存在,于是根据极限与无穷小的关系有

$$\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u_0)+\alpha,$$

其中 α 是 $\Delta u\to 0$ 时的无穷小.上式中 $\Delta u\neq 0$,用 Δu 乘上式两边,得

$$\Delta y = f'(u_0)\Delta u + \alpha \cdot \Delta u. \tag{7}$$

当 $\Delta u = 0$ 时，规定 $\alpha = 0$[①]. 这时因 $\Delta y = f(u_0 + \Delta u) - f(u_0) = 0$，而(7)式右端亦为零，故(7)式对 $\Delta u = 0$ 也成立. 用 $\Delta x \neq 0$ 除(7)式两边，得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x},$$

于是
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[f'(u_0)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \frac{\Delta u}{\Delta x}\right].$$

根据函数在某点可导必在该点连续的性质知道，当 $\Delta x \to 0$ 时，$\Delta u \to 0$，从而可以推知

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha = \lim_{\Delta u \to 0} \alpha = 0.$$

又因 $u = \varphi(x)$ 在点 x_0 可导，有

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \varphi'(x_0),$$

故
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x},$$

即
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = f'(u_0) \cdot \varphi'(x_0).$$

这就是公式(6). 证毕.

根据上述法则，如果 $u = \varphi(x)$ 在开区间 I 内可导，$y = f(u)$ 在开区间 I_1 内可导，且当 $x \in I$ 时，对应的 $u \in I_1$，那末复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在区间 I 内可导，且下式成立：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

例 4 $y = \ln\tan x$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解 $y = \ln\tan x$ 可看作由 $y = \ln u$，$u = \tan x$ 复合而成，因此

---

① $\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta u} - f'(u_0)$ 是 Δu 的函数：$\alpha = \alpha(\Delta u)$. 这函数当 $\Delta u = 0$ 时无定义，当 $\Delta u \to 0$ 时，$\alpha \to 0$. 今规定 $\Delta u = 0$ 时 $\alpha = 0$，则该函数在 $\Delta u = 0$ 处连续.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}\cdot\sec^2x-\cot x\cdot\sec^2x=\frac{1}{\sin x\cos x}.$$

例 5 $y=e^{x^3}$，求$\frac{dy}{dx}$.

解 $y=e^{x^3}$可看作由 $y=e^u$，$u=x^3$ 复合而成，因此

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=e^u\cdot 3x^2=3x^2e^{x^3}.$$

例 6 $y=\sin\frac{2x}{1+x^2}$，求$\frac{dy}{dx}$.

解 $y=\sin\frac{2x}{1+x^2}$可看作由$y=\sin u$，$u=\frac{2x}{1+x^2}$复合而成.

因

$$\frac{dy}{du}=\cos u,$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{2(1+x^2)-(2x)^2}{(1+x^2)^2}=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2},$$

所以

$$\frac{dy}{dx}=\cos u\cdot\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\cdot\cos\frac{2x}{1+x^2}.$$

从以上例子看出，应用复合函数求导法则时，首先要分析所给函数可看作由哪些函数复合而成，或者说，所给函数能分解成哪些函数. 如果所给函数能分解成比较简单的函数，而这些简单函数的导数我们已经会求，那末应用复合函数求导法则就可以求所给函数的导数了.

哪些函数的导数我们已经会求了呢？首先，常数以及基本初等函数的导数我们已经会求了. 其次，应用函数的和、差、积、商的求导法则，常数与基本初等函数的和、差、积、商的导数也会求了. 所以，如果一个函数能分解成基本初等函数，或常数与基本初等函数的和、差、积、商，我们便可求它的导数.

对复合函数的分解比较熟练后，就不必再写出中间变量，而可以采用下列例题的方式来计算.

例 7 $y=\ln\sin x$，求$\frac{dy}{dx}$.

解 $\frac{dy}{dx}=(\ln\sin x)'=\frac{1}{\sin x}(\sin x)'$

$$=\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x.$$

例 8 $y=\sqrt[3]{1-2x^2}$，求$\frac{dy}{dx}$.

解 $\frac{dy}{dx}=[(1-2x^2)^{\frac{1}{3}}]'=\frac{1}{3}(1-2x^2)^{-\frac{2}{3}}\cdot(1-2x^2)'$

$$=\frac{-4x}{3\sqrt[3]{(1-2x^2)^2}}.$$

复合函数的求导法则可以推广到多个中间变量的情形.我们以两个中间变量为例,设 $y=f(u),u=\varphi(v),v=\psi(x)$,则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx},\quad 而\quad \frac{du}{dx}=\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx},$$

故复合函数 $y=f\{\varphi[\psi(x)]\}$的导数为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}.$$

当然,这里假定上式右端所出现的导数在相应处都存在.

例 9 $y=\ln\cos(e^x)$,求$\frac{dy}{dx}$.

解 所给函数可分解为 $y=\ln u,u=\cos v,v=e^x$. 因$\frac{dy}{du}=\frac{1}{u}$、$\frac{du}{dv}=-\sin v,\frac{dv}{dx}=e^x$,故

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{u}\cdot(-\sin v)\cdot e^x=-\frac{\sin(e^x)}{\cos(e^x)}\cdot e^x=-e^x\tan(e^x).$$

不写出中间变量,此例可这样写:

$$\frac{dy}{dx}=[\ln\cos(e^x)]'=\frac{1}{\cos(e^x)}[\cos(e^x)]'$$

$$=\frac{-\sin(e^x)}{\cos(e^x)}(e^x)'=-e^x\tan(e^x).$$

例 10 $y=e^{\sin\frac{1}{x}}$,求 y'.

解 $y'=\left(e^{\sin\frac{1}{x}}\right)'=e^{\sin\frac{1}{x}}\left(\sin\frac{1}{x}\right)'$

$$=e^{\sin\frac{1}{x}}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}e^{\sin\frac{1}{x}}\cdot\cos\frac{1}{x}.$$

例 11 $y=\sin nx\cdot\sin^n x$（n 为常数），求 y'.

解 首先应用积的求导法则得

$$y'=(\sin nx)'\sin^n x+\sin nx\cdot(\sin^n x)'.$$

在计算 $(\sin nx)'$ 与 $(\sin^n x)'$ 时，都要应用复合函数求导法则，由此得

$$\begin{aligned}y'&=n\cos nx\cdot\sin^n x+\sin nx\cdot n\sin^{n-1}x\cdot\cos x\\&=n\sin^{n-1}x(\cos nx\cdot\sin x+\sin nx\cdot\cos x)\\&=n\sin^{n-1}x\cdot\sin(n+1)x.\end{aligned}$$

最后，就 $x>0$ 的情形证明幂函数的导数公式

$$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}.$$

因为 $x^\mu=(e^{\ln x})^\mu=e^{\mu\ln x}$，所以

$$\begin{aligned}(x^\mu)'&=(e^{\mu\ln x})'=e^{\mu\ln x}\cdot(\mu\ln x)'\\&=x^\mu\cdot\mu\cdot\frac{1}{x}=\mu x^{\mu-1}.\end{aligned}$$

习 题 2—3

1. 求下列函数的导数：

(1) $y=(2x+5)^4$；　　(2) $y=\cos(4-3x)$；

(3) $y=e^{-3x^2}$；　　(4) $y=\ln(1+x^2)$；

(5) $y=\sin^2 x$；　　(6) $y=\arctan(x^2)$；

(7) $y=\sqrt{a^2-x^2}$；　　(8) $y=\tan(x^2)$；

(9) $y=\arctan(e^x)$；　　(10) $y=(\arcsin x)^2$；

(11) $y=\log_a(x^2+x+1)$；　　(12) $y=\ln\cos x$.

2. 求下列函数的导数：

(1) $y=\arcsin(1-2x)$；　　(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

(3) $y=e^{-\frac{x}{2}}\cos 3x$；　　(4) $y=\arccos\dfrac{1}{x}$；

(5) $y=\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$；　　(6) $y=\dfrac{\sin 2x}{x}$；

(7) $y=\arcsin\sqrt{x}$；　　(8) $y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$；

(9) $y=\ln(\sec x+\tan x)$；　　(10) $y=\ln(\csc x-\cot x)$.

3. 求下列函数的导数：

(1) $y=\left(\arcsin\dfrac{x}{2}\right)^2$；　　(2) $y=\ln\tan\dfrac{x}{2}$；

(3) $y=\sqrt{1+\ln^2 x}$；　　(4) $y=e^{\arctan\sqrt{x}}$；

(5) $y=\sin^n x\cos nx$；　　(6) $y=\arctan\dfrac{x+1}{x-1}$；

(7) $y=\dfrac{\arcsin x}{\arccos x}$；　　(8) $y=\ln[\ln(\ln x)]$；

(9) $y=\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$；　　(10) $y=\arcsin\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

4. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 可导，且 $f^2(x)+g^2(x)\neq 0$，试求函数 $y=\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}$ 的导数.

5. 设 $f(x)$ 可导，求下列函数 y 的导数 $\dfrac{dy}{dx}$：

(1) $y=f(x^2)$；　　(2) $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$.

第四节　初等函数的求导问题　双曲函数与反双曲函数的导数

一、初等函数的求导问题

初等函数是由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数. 为了解决初等函数的求导问题，前面已经求出了常数和全部基本初等函数的导数，还推出了函数的和、差、积、商的求导法则以及复合函数的求导法则. 利用这些导数公式以及求导法则，可以比较方便地求初等函数的导数. 由前面所举的大量例子可见，基本初等函数的求导公式和上述求导法则，在初等函数的求导运算中起着重要的作用，我们必须熟练地掌握它. 为了便于查阅，我们把这些导数公式和求导法则归纳如下：

1. 常数和基本初等函数的导数公式

(1) $(C)'=0$, (2) $(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$,

(3) $(\sin x)'=\cos x$, (4) $(\cos x)'=-\sin x$,

(5) $(\tan x)'=\sec^2 x$, (6) $(\cot x)'=-\csc^2 x$,

(7) $(\sec x)'=\sec x\tan x$, (8) $(\csc x)'=-\csc x\cot x$,

(9) $(a^x)'=a^x\ln a$, (10) $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$,

(11) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$, (12) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$,

(13) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

(14) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

(15) $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$,

(16) $(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

2. 函数的和、差、积、商的求导法则

设 $u=u(x)$, $v=v(x)$都可导,则

(1) $(u\pm v)'=u'\pm v'$, (2) $(Cu)'=Cu'$(C是常数),

(3) $(uv)'=u'v+uv'$, (4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ $(v\neq 0)$.

3. 复合函数的求导法则

设 $y=f(u)$, 而 $u=\varphi(x)$ 且 $f(u)$及 $\varphi(x)$都可导,则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$的导数为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \text{ 或 } y'(x)=f'(u)\cdot\varphi'(x).$$

二、双曲函数与反双曲函数的导数

双曲函数与反双曲函数都是初等函数,它们的导数都可用前面的求导公式及求导法则求出.

由双曲正弦的定义 $\operatorname{sh} x=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$, 有

$$(\text{sh } x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \text{ch } x,$$

因此得双曲正弦的导数公式

$$(\text{sh } x)' = \text{ch } x.$$

类似地，由 $\text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$，可得

$$(\text{ch } x)' = \text{sh } x.$$

由 $\text{th } x = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x}$，可得

$$(\text{th } x)' = \frac{\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x}{\text{ch}^2 x},$$

即

$$(\text{th } x)' = \frac{1}{\text{ch}^2 x}.$$

由 $\text{arsh } x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$，可得

$$(\text{arsh } x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}. \tag{1}$$

由 $\text{arch } x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$，可得

$$(\text{arch } x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}. \tag{2}$$

由 $\text{arth } x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$，可得

$$(\text{arth } x)' = \frac{1}{1-x^2}. \tag{3}$$

这几个公式作为习题，请读者自己推导.

习　题　2—4

1. 推导本节中的公式(1)、(2)、(3).

2. 求下列函数的导数：

(1) $y = \text{ch}(\text{sh } x)$；　　(2) $y = \text{sh } x \cdot e^{\text{ch } x}$；

(3) $y = \text{th}(\ln x)$；　　(4) $y = \text{sh}^3 x + \text{ch}^2 x$；

(5) $y = \text{th}(1 - x^2)$；　　(6) $y = \text{arsh}(x^2 + 1)$；

(7) $y = \text{arch}(e^{2x})$；　　(8) $y = \arctan(\text{th } x)$；

(9) $y=\ln\operatorname{ch}x+\dfrac{1}{2\operatorname{ch}^2x}$.

3. 求下列函数的导数：

(1) $y=e^{-x}(x^2-2x+3)$；

(2) $y=\sin^2x\cdot\sin(x^2)$；

(3) $y=\left(\arctan\dfrac{x}{2}\right)^2$；

(4) $y=\dfrac{\ln x}{x^n}$；

(5) $y=\dfrac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}$；

(6) $y=\ln\cos\dfrac{1}{x}$；

(7) $y=e^{-\sin^2\frac{1}{x}}$；

(8) $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$；

(9) $y=x\arcsin\dfrac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}$；

(10) $y=\arcsin\dfrac{2t}{1+t^2}$.

第五节 高阶导数

我们知道，变速直线运动的速度 $v(t)$ 是位置函数 $s(t)$ 对时间 t 的导数，即

$$v=\frac{ds}{dt}\quad 或\quad v=s',$$

而加速度 a 又是速度 v 对时间 t 的变化率，即速度 v 对时间 t 的导数：

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)\quad 或\quad a=(s')'.$$

这种导数的导数 $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{ds}{dt}\right)$ 或 $(s')'$ 叫做 s 对 t 的二阶导数，记作

$$\frac{d^2s}{dt^2}\quad 或\quad s''(t).$$

所以，直线运动的加速度就是位置函数 s 对时间 t 的二阶导数.

一般地，函数 $y=f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$ 仍然是 x 的函数. 我们把 $y'=f'(x)$ 的导数叫做函数 $y=f(x)$ 的二阶导数，记作 y'' 或 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$，即

$$y''=(y')'\quad 或\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

相应地，把 $y=f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的一阶导

数.

类似地，二阶导数的导数，叫做三阶导数，三阶导数的导数叫做四阶导数，…，一般地，$(n-1)$阶导数的导数叫做n阶导数，分别记作

$$y''',\ y^{(4)},\ \cdots,\ y^{(n)}$$

或

$$\frac{d^3y}{dx^3},\frac{d^4y}{dx^4},\cdots,\frac{d^ny}{dx^n}.$$

函数 $y=f(x)$具有n阶导数，也常说成函数$f(x)$为n阶可导. 如果函数$f(x)$在点x处具有n阶导数，那末$f(x)$在点x的某一邻域内必定具有一切低于n阶的导数. 二阶及二阶以上的导数统称高阶导数.

由此可见，求高阶导数就是多次接连地求导数. 所以，仍可应用前面学过的求导方法来计算高阶导数.

例1 $y=ax+b$，求 y''.

解 $y'=a$, $y''=0$.

例2 $s=\sin \omega t$，求 s''.

解 $s'=\omega\cos \omega t$, $s''=-\omega^2\sin \omega t$.

例3 证明：函数 $y=\sqrt{2x-x^2}$满足关系式

$$y^3y''+1=0.$$

证 将 $y=\sqrt{2x-x^2}$求导，得

$$y'=\frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}},$$

$$y''=\frac{-\sqrt{2x-x^2}-(1-x)\dfrac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}}{2x-x^2}$$

$$=\frac{-2x+x^2-(1-x)^2}{(2x-x^2)\sqrt{2x-x^2}}$$

$$=-\frac{1}{(2x-x^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{y^3}.$$

于是

$$y^3y''+1=0.$$

下面介绍几个初等函数的n阶导数.

例 4 求指数函数 $y=\mathrm{e}^x$ 的 n 阶导数.

解 $y'=\mathrm{e}^x,\quad y''=\mathrm{e}^x,\quad y'''=\mathrm{e}^x,\quad y^{(4)}=\mathrm{e}^x.$

一般地,可得

$$y^{(n)}=\mathrm{e}^x,$$

即

$$(\mathrm{e}^x)^{(n)}=\mathrm{e}^x.$$

例 5 求正弦与余弦函数的 n 阶导数.

解 $y=\sin x,$

$$y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'''=\cos\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y^{(4)}=\cos\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+4\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

一般地,可得

$$y^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

即

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

用类似方法,可得

$$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

例 6 求对数函数 $\ln(1+x)$ 的 n 阶导数.

解 $y=\ln(1+x),\quad y'=\dfrac{1}{1+x},$

$$y''=-\frac{1}{(1+x)^2},\quad y'''=\frac{1\cdot 2}{(1+x)^3},\quad y^{(4)}=-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1+x)^4},$$

一般地,可得

$$y^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n},$$

即 $$[\ln(1+x)]^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

通常规定 $0!=1$，所以这个公式当 $n=1$ 时也成立.

例 7 求幂函数的 n 阶导数公式.

解 设 $y=x^\mu$（μ 是任意常数），那末

$$y'=\mu x^{\mu-1},$$

$$y''=\mu(\mu-1)x^{\mu-2},$$

$$y'''=\mu(\mu-1)(\mu-2)x^{\mu-3},$$

$$y^{(4)}=\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)x^{\mu-4},$$

一般地，可得

$$y^{(n)}=\mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n},$$

即 $$(x^\mu)^{(n)}=\mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n}.$$

当 $\mu=n$ 时，得到

$$(x^n)^{(n)}=n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1=n!,$$

而 $$(x^n)^{(n+1)}=0.$$

如果函数 $u=u(x)$ 及 $v=v(x)$ 都在点 x 处具有 n 阶导数，那末显然 $u(x)+v(x)$ 及 $u(x)-v(x)$ 也在点 x 处具有 n 阶导数，且

$$(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}.$$

但乘积 $u(x)\cdot v(x)$ 的 n 阶导数并不如此简单. 由

$$(uv)'=u'v+uv'$$

首先得出

$$(uv)''=u''v+2u'v'+uv'',$$

$$(uv)'''=u'''v+3u''v'+3u'v''+uv'''.$$

用数学归纳法可以证明

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''+\cdots$$

$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}+\cdots+uv^{(n)}.$$

上式称为莱布尼茨（Leibniz）公式. 这公式可以这样记忆：把 $(u+v)^n$ 按二项式定理展开写成

$$(u+v)^n = u^n v^0 + nu^{n-1}v^1 + \frac{n(n-1)}{2!}u^{n-2}v^2 + \cdots + u^0 v^n,$$

即
$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{n-k} v^k \text{①},$$

然后把 k 次幂换成 k 阶导数(零阶导数理解为函数本身)，再把左端的 $u+v$ 换成 uv，这样就得到莱布尼茨公式

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}.$$

例 8 $y = x^2 e^{2x}$，求 $y^{(20)}$.

解 设 $u = e^{2x}$，$v = x^2$，则

$$u^{(k)} = 2^k e^{2x} \quad (k = 1, 2, \cdots, 20),$$

$$v' = 2x, \quad v'' = 2, \quad v^{(k)} = 0 \ (k = 3, 4, \cdots, 20),$$

代入莱布尼茨公式，得

$$\begin{aligned} y^{(20)} &= (x^2 e^{2x})^{(20)} \\ &= 2^{20} e^{2x} \cdot x^2 + 20 \cdot 2^{19} e^{2x} \cdot 2x + \frac{20 \cdot 19}{2!} 2^{18} e^{2x} \cdot 2 \\ &= 2^{20} e^{2x} (x^2 + 20x + 95). \end{aligned}$$

习 题 2—5

1. 求下列函数的二阶导数：

(1) $y = 2x^2 + \ln x$；　　(2) $y = e^{2x-1}$；

(3) $y = x\cos x$；　　(4) $y = e^{-t}\sin t$；

(5) $y = \sqrt{a^2 - x^2}$；　　(6) $y = \ln(1 - x^2)$；

(7) $y = \tan x$；　　(8) $y = \dfrac{1}{x^3 + 1}$；

(9) $y = (1 + x^2)\arctan x$；　　(10) $y = \dfrac{e^x}{x}$；

(11) $y = xe^{x^2}$；　　(12) $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.

---

① 记号 Σ 表示对同一类型诸项求和. 例如，$\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{n-k} v^k$ 表示在 $C_n^k u^{n-k} v^k$ 中依次令 $k = 0, 1, \cdots, n$，然后对这样得到的 $n+1$ 项求和.

2. 设 $f(x)=(x+10)^6$，$f'''(2)=?$

3. 若 $f''(x)$存在，求下列函数 y 的二阶导数$\frac{d^2y}{dx^2}$：

(1) $y=f(x^2)$；　　　　(2) $y=\ln[f(x)]$.

4. 试从$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'}$导出：

(1) $\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{y''}{(y')^3}$；　　　　(2) $\frac{d^3x}{dy^3}=\frac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}$.

5. 已知物体的运动规律为 $s=A\sin \omega t$(A、ω 是常数)，求物体运动的加速度，并验证：

$$\frac{d^2s}{dt^2}+\omega^2s=0.$$

6. 验证函数 $y=C_1e^{\lambda x}+C_2e^{-\lambda x}$($\lambda,C_1,C_2$ 是常数)满足关系式：

$$y''-\lambda^2y=0.$$

7. 验证函数 $y=e^x\sin x$ 满足关系式

$$y''-2y'+2y=0.$$

8. 求下列函数的 n 阶导数的一般表达式：

(1) $y=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$　($a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是常数)；

(2) $y=\sin^2x$；

(3) $y=x\ln x$；

(4) $y=xe^x$.

9. 求下列函数所指定的阶的导数：

(1) $y=e^x\cos x$，求 $y^{(4)}$；

(2) $y=x\,\mathrm{sh}\,x$，求 $y^{(100)}$；

(3) $y=x^2\sin 2x$，求 $y^{(50)}$.

第六节　隐函数的导数　由参数方程所确定的函数的导数　相关变化率

一、隐函数的导数

函数 $y=f(x)$表示两个变量 y 与 x 之间的对应关系，这种对应关系可以用各种不同方式表达. 前面我们遇到的函数，例如 $y=\sin x$，$y=\ln x+\sqrt{1-x^2}$等，这种函数表达方式的特点是：等号左

端是因变量的符号，而右端是含有自变量的式子，当自变量取定义域内任一值时，由这式子能确定对应的函数值. 用这种方式表达的函数叫做显函数. 有些函数的表达方式却不是这样，例如，方程

$$x+y^3-1=0$$

表示一个函数，因为当变量 x 在 $(-\infty,+\infty)$ 内取值时，变量 y 有确定的值与之对应. 例如，当 $x=0$ 时，$y=1$；当 $x=-1$ 时，$y=\sqrt[3]{2}$，等等. 这样的函数称为隐函数.

一般地，如果在方程 $F(x,y)=0$ 中，当 x 取某区间内的任一值时，相应地总有满足这方程的唯一的 y 值存在，那末就说方程 $F(x,y)=0$ 在该区间内确定了一个隐函数.

把一个隐函数化成显函数，叫做隐函数的显化. 例如从方程 $x+y^3-1=0$ 解出 $y=\sqrt[3]{1-x}$，就把隐函数化成了显函数. 隐函数的显化有时是有困难的，甚至是不可能的. 但在实际问题中，有时需要计算隐函数的导数，因此，我们希望有一种方法，不管隐函数能否显化，都能直接由方程算出它所确定的隐函数的导数来. 下面通过具体例子来说明这种方法.

例 1 求由方程 $e^y+xy-e=0$ 所确定的隐函数 y 的导数 $\frac{dy}{dx}$.

解 我们把方程两边分别对 x 求导数①，注意 y 是 x 的函数. 方程左边对 x 求导得

$$\frac{d}{dx}(e^y+xy-e)=e^y\frac{dy}{dx}+y+x\frac{dy}{dx},$$

方程右边对 x 求导得

$$(0)'=0.$$

由于等式两边对 x 的导数相等，所以

$$e^y\frac{dy}{dx}+y+x\frac{dy}{dx}=0,$$

① 假设方程 $F(x,y)=0$ 确定一个函数 $y=y(x)$，把 $y=y(x)$ 代入方程便得恒等式 $F[x,y(x)]\equiv 0$. 因此，这里说的方程两边对 x 求导，是指恒等式两边对 x 求导.

从而 $$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x+e^y} \quad (x+e^y\neq 0).$$

在这个结果中，分式中的 y 是由方程 $e^y+xy-e=0$ 所确定的隐函数.

例 2 求由方程 $y^5+2y-x-3x^7=0$ 所确定的隐函数 y 在 $x=0$ 处的导数 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

解 把方程两边分别对 x 求导，由于方程两边的导数相等，所以

$$5y^4\frac{dy}{dx}+2\frac{dy}{dx}-1-21x^6=0.$$

由此得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+21x^6}{5y^4+2}.$$

因为当 $x=0$ 时，从原方程得 $y=0$，所以

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\frac{1}{2}.$$

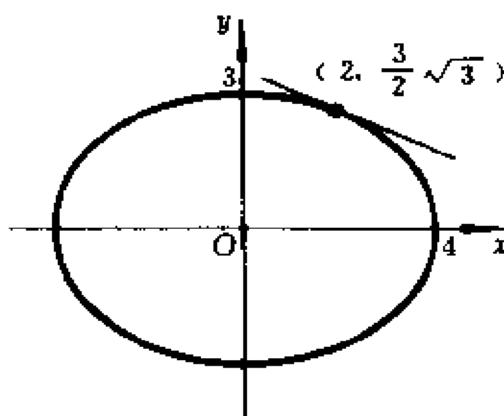


图 2-6

例 3 求椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 在点 $\left(2,\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$ 处的切线方程(图 2—6).

解 由导数的几何意义知道，所求切线的斜率为

$$k=y'\big|_{x=2}.$$

把椭圆方程的两边分别对 x 求导，有

$$\frac{x}{8}+\frac{2}{9}y\cdot\frac{dy}{dx}=0.$$

从而 $$\frac{dy}{dx}=-\frac{9x}{16y}.$$

当 $x=2$ 时，$y=\frac{3}{2}\sqrt{3}$，代入上式得

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=2}=-\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

于是所求的切线方程为

$$y-\frac{3}{2}\sqrt{3}=-\frac{\sqrt{3}}{4}(x-2),$$

即
$$\sqrt{3}x+4y-8\sqrt{3}=0.$$

例 4 求由方程 $x-y+\frac{1}{2}\sin y=0$ 所确定的隐函数 y 的二阶导数 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解 应用隐函数的求导方法，得

$$1-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{2}\cos y\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0,$$

于是
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2}{2-\cos y}.$$

上式两边再对 x 求导，得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{-2\sin y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{(2-\cos y)^2}=\frac{-4\sin y}{(2-\cos y)^3}.$$

上式右端分式中的 y 是由方程 $x-y+\frac{1}{2}\sin y=0$ 所确定的隐函数.

在某些场合，利用所谓对数求导法求导数比用通常的方法简便些. 这种方法是先在 $y=f(x)$ 的两边取对数，然后再求出 y 的导数. 我们通过下面的例子来说明这种方法.

例 5 求 $y=x^{\sin x}(x>0)$ 的导数.

解 这函数既不是幂函数也不是指数函数，通常称为幂指函数. 为了求这函数的导数，可以先在两边取对数，得

$$\ln y=\sin x\cdot\ln x;$$

上式两边对 x 求导，注意到 y 是 x 的函数，得

$$\frac{1}{y}y'=\cos x\cdot\ln x+\sin x\cdot\frac{1}{x},$$

于是 $y'=y\left(\cos x\cdot\ln x+\dfrac{\sin x}{x}\right)=x^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln x+\dfrac{\sin x}{x}\right).$

幂指函数的一般形式为

$$y=u^v\quad(u>0),\tag{1}$$

其中 u、v 是 x 的函数. 如果 u、v 都可导,则可象例 5 那样利用对数求导法求出幂指函数(1)的导数如下:

先在两边取对数,得

$$\ln y=v\cdot\ln u,$$

上式两边对 x 求导,注意到 y、u、v 都是 x 的函数,得

$$\frac{1}{y}y'=v'\cdot\ln u+v\cdot\frac{1}{u}\cdot u',$$

于是 $$y'=y\left(v'\cdot\ln u+\frac{vu'}{u}\right)=u^v\left(v'\cdot\ln u+\frac{vu'}{u}\right).$$

幂指函数(1)也可表示为

$$y=e^{v\ln u}.$$

这样,便可直接求得

$$y'=e^{v\ln u}\left(v'\cdot\ln u+v\cdot\frac{u'}{u}\right)$$
$$=u^v\left(v'\cdot\ln u+\frac{vu'}{u}\right).$$

例 6 求 $y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$ 的导数.

解 先在两边取对数(假定 $x>4$),得

$$\ln y=\frac{1}{2}[\ln(x-1)+\ln(x-2)-\ln(x-3)-\ln(x-4)],$$

上式两边对 x 求导,注意到 y 是 x 的函数,得

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right),$$

于是 $$y'=\frac{y}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right).$$

当 $x<1$ 时,$y=\sqrt{\dfrac{(1-x)(2-x)}{(3-x)(4-x)}}$;

当 $2<x<3$ 时，$y=\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(3-x)(4-x)}}$；
用同样方法可得与上面相同的结果.

二、由参数方程所确定的函数的导数

研究物体运动的轨迹时，常遇到参数方程. 例如，研究抛射体的运动问题时，如果空气阻力忽略不计，则抛射体的运动轨迹可表示为

$$\begin{cases} x=v_1 t, \\ y=v_2 t-\frac{1}{2}gt^2, \end{cases} \tag{2}$$

其中 v_1、v_2 分别是抛射体初速的水平、铅直分量，g 是重力加速度，t 是飞行时间，x 和 y 分别是飞行中抛射体在铅直平面上的位置的横坐标和纵坐标（图 2—7）.



图 2—7

在(2)式中，x、y 都是 t 的函数. 如果把对应于同一个 t 值的 y 与 x 的值看作是对应的，这样就得到 y 与 x 之间的函数关系. 消去(2)中的参数 t，有

$$y=\frac{v_2}{v_1}x-\frac{g}{2v_1^2}x^2.$$

这是因变量 y 与自变量 x 直接联系着的式子，也是参数方程(2)所确定的函数的显式表示.

一般地，若参数方程

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases} \tag{3}$$

确定 y 与 x 间的函数关系，则称此函数关系所表达的函数为由参数方程(3)所确定的函数.

在实际问题中，需要计算由参数方程(3)所确定的函数的导数. 但从(3)中消去参数 t 有时会有困难. 因此，我们希望有一种方法能直接由参数方程(3)算出它所确定的函数的导数来. 下面就来讨论由参数方程(3)所确定的函数的求导方法.

在(3)式中，如果函数 $x=\varphi(t)$ 具有单调连续反函数 $t=\bar{\varphi}(x)$，且此反函数能与函数 $y=\psi(t)$ 复合成复合函数，那末由参数方程(3)所确定的函数可以看成是由函数 $y=\psi(t)$、$t=\bar{\varphi}(x)$ 复合而成的函数 $y=\psi[\bar{\varphi}(x)]$. 现在，要计算这个复合函数的导数. 为此再假定函数 $x=\varphi(t)$、$y=\psi(t)$ 都可导，而且 $\varphi'(t)\neq 0$. 于是根据复合函数的求导法则与反函数的导数公式，就有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \tag{4}$$

上式也可写成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}.$$

(4)式就是由参数方程(3)所确定的 x 的函数的导数公式[①].

如果 $x=\varphi(t)$、$y=\psi(t)$ 还是二阶可导的，那末从(4)式又可得到函数的二阶导数公式：

---

① 因为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 是 x 的函数，所以应表示为

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \end{cases}$$

但为了方便起见，通常把 $x=\varphi(t)$ 省去. 后面的公式(5)也作类似的理解.

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$$

$$=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)}\cdot\frac{1}{\varphi'(t)},$$

即
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}. \tag{5}$$

例 7 已知椭圆的参数方程为

$$\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t.\end{cases}$$

求椭圆在 $t=\frac{\pi}{4}$ 相应的点处的切线方程(图 2—8).

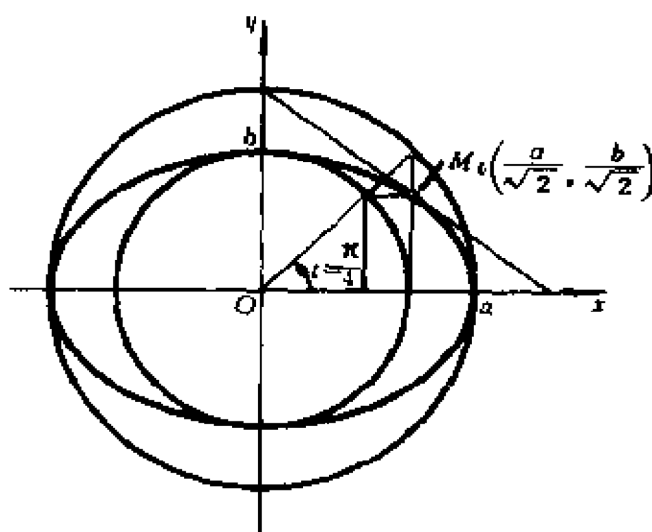


图 2—8

解 当 $t=\frac{\pi}{4}$ 时，椭圆上的相应点 M_0 的坐标是：

$$x_0=a\cos\frac{\pi}{4}=\frac{a\sqrt{2}}{2},$$

$$y_0=b\sin\frac{\pi}{4}=\frac{b\sqrt{2}}{2}.$$

曲线在点 M_0 的切线斜率为：

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\left.\frac{(b\sin t)'}{(a\cos t)'}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\left.\frac{b\cos t}{-a\sin t}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=-\frac{b}{a}.$$

代入点斜式方程，即得椭圆在点 M_0 处的切线方程

$$y-\frac{b\sqrt{2}}{2}=-\frac{b}{a}\left(x-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right).$$

化简后得 $$bx+ay-\sqrt{2}ab=0.$$

例 8 已知抛射体的运动轨迹的参数方程为

$$\begin{cases} x=v_1t, \\ y=v_2t-\frac{1}{2}gt^2, \end{cases}$$

求抛射体在时刻 t 的运动速度的大小和方向.

解 先求速度的大小.

由于速度的水平分量为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_1,$$

铅直分量为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v_2-gt,$$

所以抛射体运动速度的大小为

$$v=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}=\sqrt{v_1^2+(v_2-gt)^2}.$$

再求速度的方向,也就是轨道的切线方向.

设 α 是切线的倾角,则根据导数的几何意义,得

$$\tan\alpha=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{v_2-gt}{v_1}.$$

所以,在抛射体刚射出(即 $t=0$)时,

$$\tan\alpha\Big|_{t=0}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{t=0}=\frac{v_2}{v_1};$$

当 $t=\frac{v_2}{g}$ 时,

$$\tan\alpha\Big|_{t=\frac{v_2}{g}}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{t=\frac{v_2}{g}}=0,$$

这时，运动方向是水平的，即抛物体达到最高点（图 2－7）.

例 9 计算由摆线（图 2－9）的参数方程

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$$

所确定的函数 $y=y(x)$ 的二阶导数.

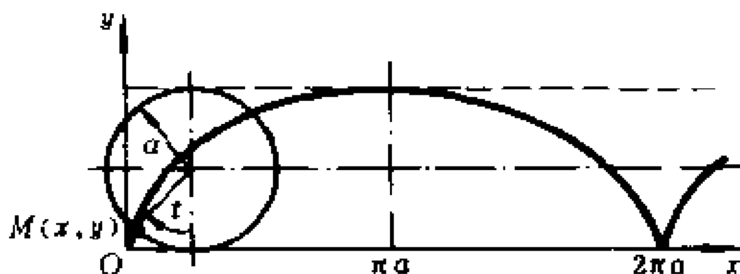


图 2－9

解 $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t}=\cot\frac{t}{2}$$

$(t\neq 2n\pi, n$ 为整数).

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\cot\frac{t}{2}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

$$=-\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}\cdot\frac{1}{a(1-\cos t)}=-\frac{1}{a(1-\cos t)^2}$$

$(t\neq 2n\pi, n$ 为整数).

＊三、曲线的切线与切点和极点的连线间的夹角

设已给曲线的极坐标方程为

$$r=r(\theta). \tag{6}$$

利用直角坐标与极坐标的关系 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，得曲线(6)的参数方程

$$\begin{cases} x=r(\theta)\cos\theta, \\ y=r(\theta)\sin\theta, \end{cases}$$

其中参数为极角 θ.

应用公式(4),得该曲线的切线的斜率为

$$y'=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}}=\frac{r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta}=\frac{r'(\theta)\tan\theta+r(\theta)}{r'(\theta)-r(\theta)\tan\theta}. \tag{7}$$

设曲线在点 $M(r,\theta)$的切线 MT 与切点和极点的连线 OM 间的夹角为 $\psi(0\leqslant\psi\leqslant\pi)$,$\alpha$ 是极轴 OA 按逆时针方向到切线 MT 的转角.则因 $\psi=\alpha-\theta$(图 2-10),故有

$$\tan\psi=\tan(\alpha-\theta)=\frac{y'-\tan\theta}{1+y'\tan\theta}.$$

把(7)式中 y'的表达式代人上式并化简,即得

$$\tan\psi=\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}. \tag{8}$$

由于(8)式形式简单,因此当曲线用极坐标方程给定时,用角 ψ 来确定切线的位置通常是比较方便的.

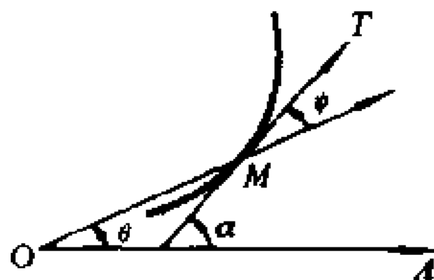


图 2-10

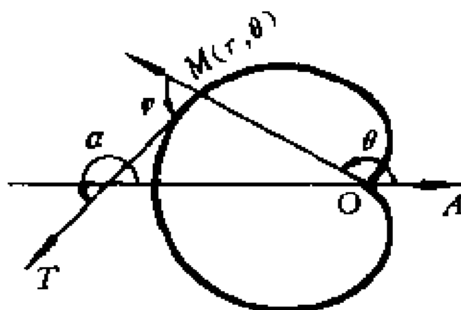


图 2-11

例 10 求心形线

$$r=a(1-\cos\theta)$$

的 ψ 和 α(图 2-11).

解 $$r'(\theta)=a\sin\theta,$$

由公式(8)得

$$\tan\psi=\frac{r}{r'}=\frac{a(1-\cos\theta)}{a\sin\theta}=\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=\tan\frac{\theta}{2},$$

于是
$$\psi=\frac{\theta}{2},$$
$$\alpha=\psi+\theta=\frac{3\theta}{2}.$$

四、相关变化率

设 $x=x(t)$ 及 $y=y(t)$ 都是可导函数，而变量 x 与 y 间存在某种关系，从而变化率 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 与 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ 间也存在一定关系. 这两个相互依赖的变化率称为相关变化率. 相关变化率问题就是研究这两个变化率之间的关系，以便从其中一个变化率求出另一个变化率.

例 11 一气球从离开观察员 500m 处离地面铅直上升，其速率为 140m/min(分). 当气球高度为 500m 时，观察员视线的仰角增加率是多少?

解 设气球上升 ts(秒)后，其高度为 h，观察员视线的仰角为 α，则
$$\tan\alpha=\frac{h}{500},$$
其中 α 及 h 都是时间 t 的函数. 上式两边对 t 求导，得
$$\sec^2\alpha\cdot\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{500}\cdot\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}.$$

已知 $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=140\mathrm{m/min}$. 又当 $h=500\mathrm{m}$ 时，$\tan\alpha=1$，$\sec^2\alpha=2$. 代入上式得
$$2\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{500}\cdot 140,$$
所以
$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}=\frac{70}{500}=0.14(\mathrm{rad}(弧度)/\mathrm{min}).$$
即观察员视线的仰角增加率是 0.14rad/min.

习　题　2－6

1. 求由下列方程所确定的隐函数 y 的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$:

(1) $y^2-2xy+9=0$；　　　　(2) $x^3+y^3-3axy=0$；

(3) $xy=e^{x+y}$；　　　　(4) $y=1-xe^y$.

2. 求曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 在点 $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}a,\frac{\sqrt{2}}{4}a\right)$ 处的切线方程和法线方程.

3. 求由下列方程所确定的隐函数 y 的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$：

(1) $x^2-y^2=1$；　　　　(2) $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$；

(3) $y=\tan(x+y)$；　　　　(4) $y=1+xe^y$.

4. 用对数求导法求下列函数的导数：

(1) $y=\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$；　　　　(2) $y=\sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}$；

(3) $y=\frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}$；　　　　(4) $y=\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}$.

5. 求下列参数方程所确定的函数的导数 $\frac{dy}{dx}$：

(1) $\begin{cases}x=at^2,\\ y=bt^3;\end{cases}$　　　　(2) $\begin{cases}x=\theta(1-\sin\theta),\\ y=\theta\cos\theta.\end{cases}$

6. 已知

$$\begin{cases}x=e^t\sin t,\\ y=e^t\cos t.\end{cases}$$

求当 $t=\frac{\pi}{3}$ 时 $\frac{dy}{dx}$ 的值.

7. 写出下列曲线在所给参数值相应的点处的切线方程和法线方程：

(1) $\begin{cases}x=\sin t,\\ y=\cos 2t,\end{cases}$　在 $t=\frac{\pi}{4}$ 处；

(2) $\begin{cases}x=\frac{3at}{1+t^2},\\ y=\frac{3at^2}{1+t^2},\end{cases}$　在 $t=2$ 处.

8. 求下列参数方程所确定的函数的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$：

(1) $\begin{cases}x=\frac{t^2}{2},\\ y=1-t;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t;\end{cases}$

(3) $\begin{cases} x = 3e^{-t}, \\ y = 2e^{t}; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x = f'(t), \\ y = tf'(t) - f(t); \end{cases}$ 设 $f''(t)$ 存在且不为零.

9. 求下列参数方程所确定的函数的三阶导数 $\dfrac{d^3y}{dx^3}$：

(1) $\begin{cases} x = 1 - t^2, \\ y = t - t^3; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \arctan t. \end{cases}$

10. 落在平静水面上的石头，产生同心波纹. 若最外一圈波半径的增大率总是 6m/s，问在 2 秒末扰动水面面积的增大率为多少？

11. 注水入深 8m 上顶直径 8m 的正圆锥形容器中，其速率为 $4m^3/min$. 当水深为 5m 时，其表面上升的速率为多少？

12. 溶液自深 18cm 顶直径 12cm 的正圆锥形漏斗中漏入一直径为 10cm 的圆柱形筒中. 开始时漏斗中盛满了溶液. 已知当溶液在漏斗中深为 12cm 时，其表面下降的速率为 1cm/min. 问此时圆柱形筒中溶液表面上升的速率为多少？

第七节 函数的微分

一、微分的定义

先分析一个具体问题. 一块正方形金属薄片受温度变化的影响，其边长由 x_0 变到 $x_0+\Delta x$（图 2－12），问此薄片的面积改变了多少？

设此薄片的边长为 x，面积为 A，则 A 是 x 的函数：$A=x^2$. 薄片受温度变化的影响时面积的改变量，可以看成是当自变量 x 自 x_0 取得增量 Δx 时，函数 A 相应的增量 ΔA，即

$$\Delta A = (x_0+\Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2.$$

从上式可以看出，ΔA 分成两部分. 第一部分 $2x_0\Delta x$ 是 Δx 的线性函数，即图中带有斜线的两个矩形面积之和，而第二部分 $(\Delta x)^2$ 在图中是带有交叉斜线的小正方形的面积，当 $\Delta x\to 0$ 时，第二部分 $(\Delta x)^2$ 是比 Δx 高阶的无穷小，即 $(\Delta x)^2 = o(\Delta x)$. 由此可

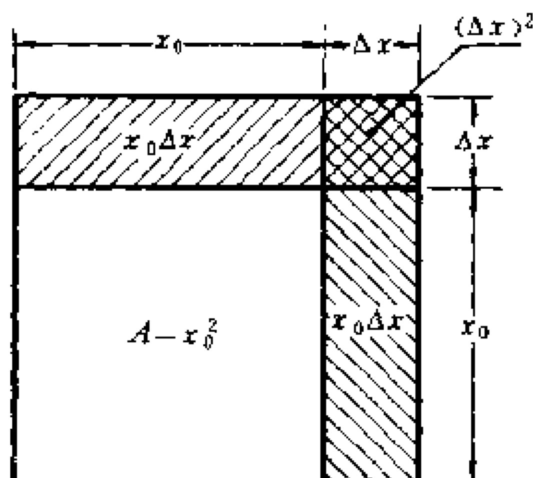


图 2-12

见，如果边长改变很微小，即$|\Delta x|$很小时，面积的改变量ΔA可近似地用第一部分来代替.

一般地，如果函数$y=f(x)$满足一定条件，则函数的增量Δy可表示为

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x),$$

其中A是不依赖于Δx的常数，因此$A\Delta x$是Δx的线性函数，且它与Δy之差

$$\Delta y-A\Delta x=o(\Delta x)$$

是比Δx高阶的无穷小. 所以，当$A\neq 0$，且$|\Delta x|$很小时，我们就可以近似地用$A\Delta x$来代替Δy.

定义　设函数$y=f(x)$在某区间内有定义，x_0及$x_0+\Delta x$在这区间内，如果函数的增量

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

可表示为

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x), \tag{1}$$

其中A是不依赖于Δx的常数，而$o(\Delta x)$是比Δx高阶的无穷小，那末称函数$y=f(x)$在点x_0是可微的，而$A\Delta x$叫做函数$y=f(x)$在点x_0相应于自变量增量Δx的微分，记作$\mathrm{d}y$，即

$$\mathrm{d}y=A\Delta x.$$

下面讨论函数可微的条件. 设函数 $y=f(x)$在点 x_0 可微，则按定义有(1)式成立. (1)式两边除以 Δx，得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}.$$

于是，当 $\Delta x\to 0$ 时，由上式就得到

$$A=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0).$$

因此，如果函数 $f(x)$在点 x_0 可微，则 $f(x)$在点 x_0 也一定可导(即 $f'(x_0)$存在)，且 $A=f'(x_0)$.

反之，如果 $y=f(x)$在点 x_0 可导，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$$

存在，根据极限与无穷小的关系(第一章第五节定理 1)，上式可写成

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha,$$

其中 $\alpha\to 0$(当 $\Delta x\to 0$). 由此又有

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x.$$

因 $\alpha\Delta x=o(\Delta x)$，且 $f'(x_0)$不依赖于 Δx，故上式相当于(1)式，所以 $f(x)$在点 x_0 也是可微的.

由此可见，函数 $f(x)$在点 x_0 可微的充分必要条件是函数 $f(x)$在点 x_0 可导，且当 $f(x)$在点 x_0 可微时，其微分一定是

$$\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x. \tag{2}$$

当 $f'(x_0)\neq 0$ 时，有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\mathrm{d}y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{f'(x_0)\Delta x}=\frac{1}{f'(x_0)}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1.$$

从而，当 $\Delta x\to 0$ 时，Δy 与 $\mathrm{d}y$ 是等价无穷小，于是由第一章第八节定理 1 可知，这时有

$$\Delta y=\mathrm{d}y+o(\mathrm{d}y), \tag{3}$$

即 dy 是 Δy 的主部[①]. 又由于 $dy=f'(x_0)\Delta x$ 是 Δx 的线性函数，所以在 $f'(x_0)\neq 0$ 的条件下，我们说 dy 是 Δy 的线性主部（当 $\Delta x\to 0$）. 这时由(3)式有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y-dy}{dy}=0,$$

从而也有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left|\frac{\Delta y-dy}{dy}\right|=0.$$

式子 $\left|\frac{\Delta y-dy}{dy}\right|$ 表示以 dy 近似代替 Δy 时的相对误差[②]，于是我们得到结论：在 $f'(x_0)\neq 0$ 的条件下，以微分 $dy=f'(x_0)\Delta x$ 近似代替增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 时，相对误差当 $\Delta x\to 0$ 时趋于零. 因此，在 $|\Delta x|$ 很小时，有精确度较好的近似等式

$$\Delta y\approx dy.$$

例 1 求函数 $y=x^2$ 在 $x=1$ 和 $x=3$ 处的微分.

解 函数 $y=x^2$ 在 $x=1$ 处的微分为

$$dy=(x^2)'|_{x=1}\Delta x=2\Delta x;$$

在 $x=3$ 处的微分为

$$dy=(x^2)'|_{x=3}\Delta x=6\Delta x.$$

函数 $y=f(x)$ 在任意点 x 的微分，称为函数的微分，记作 dy 或 $df(x)$，即

$$dy=f'(x)\Delta x.$$

例如，函数 $y=\cos x$ 的微分为

$$dy=(\cos x)'\Delta x=-\sin x\Delta x;$$

函数 $y=e^x$ 的微分为

$$dy=(e^x)'\Delta x=e^x\Delta x.$$

---

① 设 α 及 β 都是在同一个自变量的变化过程中的无穷小，如果 $\beta=\alpha+o(\alpha)$，则称 α 是 β 的主部.

② 相对误差概念可见下节.

显然，函数的微分 $dy=f'(x)\Delta x$ 与 x 和 Δx 有关.

例 2 求函数 $y=x^3$ 当 $x=2,\Delta x=0.02$ 时的微分.

解 先求函数在任意点 x 的微分

$$dy=(x^3)'\Delta x=3x^2\Delta x.$$

再求函数当 $x=2$，$\Delta x=0.02$ 时的微分

$$dy\big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.02}}=3x^2\Delta x\big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.02}}=3\cdot 2^2\cdot 0.02=0.24.$$

通常把自变量 x 的增量 Δx 称为自变量的微分，记作 dx，即 $dx=\Delta x$. 于是函数 $y=f(x)$ 的微分又可记作

$$dy=f'(x)dx.$$

从而有
$$\frac{dy}{dx}=f'(x).$$

这就是说，函数的微分 dy 与自变量的微分 dx 之商等于该函数的导数. 因此，导数也叫做"微商".

二、微分的几何意义

为了对微分有比较直观的了解，我们来说明微分的几何意义.

在直角坐标系中，函数 $y=f(x)$ 的图形是一条曲线. 对于某一固定的 x_0 值，曲线上有一个确定点 $M(x_0,y_0)$，当自变量 x 有微小增量 Δx 时，就得到曲线上另一点 $N(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$. 从图 2—13 可知：

$$MQ=\Delta x,$$
$$QN=\Delta y.$$

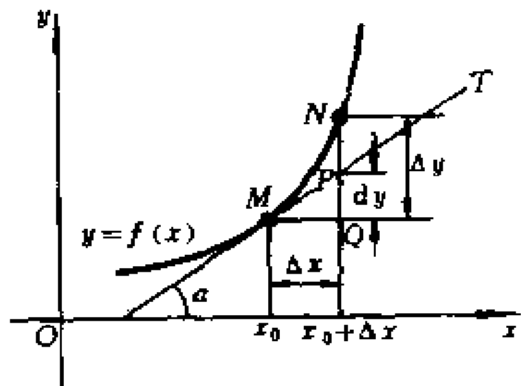


图 2—13

过点 M 作曲线的切线 MT，它的倾角为 α，则

$$QP=MQ\cdot\tan\alpha=\Delta x\cdot f'(x_0),$$

即
$$dy=QP.$$

由此可见，当 Δy 是曲线 $y=f(x)$ 上的点的纵坐标的增量时，

dy就是曲线的切线上点的纵坐标的相应增量. 当$|\Delta x|$很小时，$|\Delta y - dy|$比$|\Delta x|$小得多. 因此在点M的邻近，我们可以用切线段来近似代替曲线段.

三、基本初等函数的微分公式与微分运算法则

从函数的微分的表达式

$$dy = f'(x)dx$$

可以看出，要计算函数的微分，只要计算函数的导数，再乘以自变量的微分. 因此，可得如下的微分公式和微分运算法则.

1. 基本初等函数的微分公式

由基本初等函数的导数公式，可以直接写出基本初等函数的微分公式. 为了便于对照，列表于下：

导数公式	微分公式
$(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$	$d(x^\mu) = \mu x^{\mu-1}dx$
$(\sin x)' = \cos x$	$d(\sin x) = \cos x dx$
$(\cos x)' = -\sin x$	$d(\cos x) = -\sin x dx$
$(\tan x)' = \sec^2 x$	$d(\tan x) = \sec^2 x dx$
$(\cot x)' = -\csc^2 x$	$d(\cot x) = -\csc^2 x dx$
$(\sec x)' = \sec x \tan x$	$d(\sec x) = \sec x \tan x dx$
$(\csc x)' = -\csc x \cot x$	$d(\csc x) = -\csc x \cot x dx$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$d(a^x) = a^x \ln a dx$
$(e^x)' = e^x$	$d(e^x) = e^x dx$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$	$d(\log_a x) = \frac{1}{x\ln a}dx$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$d(\ln x) = \frac{1}{x}dx$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

续表

导数公式	微分公式
$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$	$d(\arctan x)=\frac{1}{1+x^2}dx$
$(\text{arccot}\ x)'=-\frac{1}{1+x^2}$	$d(\text{arccot}\ x)=-\frac{1}{1+x^2}dx$

2. 函数和、差、积、商的微分法则

由函数和、差、积、商的求导法则，可推得相应的微分法则．为了便于对照，列成下表（表中 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 都可导）．

函数和、差、积、商的求导法则	函数和、差、积、商的微分法则
$(u\pm v)'=u'\pm v'$	$d(u\pm v)=du\pm dv$
$(Cu)'=Cu'$	$d(Cu)=Cdu$
$(uv)'=u'v+uv'$	$d(uv)=vdu+udv$
$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}\quad(v\neq0)$	$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}\quad(v\neq0)$

现在我们以乘积的微分法则为例加以证明．

根据函数微分的表达式，有

$$d(uv)=(uv)'dx.$$

再根据乘积的求导法则，有

$$(uv)'=u'v+uv'.$$

于是 $$d(uv)=(u'v+uv')dx=u'vdx+uv'dx.$$

由于 $$u'dx=du,\quad v'dx=dv,$$

所以 $$d(uv)=vdu+udv.$$

其他法则都可以用类似方法证明．

3. 复合函数的微分法则

与复合函数的求导法则相应的复合函数的微分法则可推导如下：

设 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 都可导，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的微

分为

$$dy=y'_x dx=f'(u)\varphi'(x)dx.$$

由于 $\varphi'(x)dx=du$，所以，复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的微分公式也可以写成

$$dy=f'(u)du \quad 或 \quad dy=y'_u du.$$

由此可见，无论 u 是自变量还是另一个变量的可微函数，微分形式 $dy=f'(u)du$ 保持不变．这一性质称为微分形式不变性．这性质表示，当变换自变量时（即设 u 为另一变量的任一可微函数时），微分形式 $dy=f'(u)du$ 并不改变．

例 3 $y=\sin(2x+1)$，求 dy.

解 把 $2x+1$ 看成中间变量 u，则

$$\begin{aligned}dy&=d(\sin u)=\cos u du=\cos(2x+1)d(2x+1)\\&=\cos(2x+1)\cdot 2dx=2\cos(2x+1)dx.\end{aligned}$$

在求复合函数的导数时，可以不写出中间变量．在求复合函数的微分时，类似地也可以不写出中间变量．下面我们用这种方法来求函数的微分．

例 4 $y=\ln(1+e^{x^2})$，求 dy.

解
$$\begin{aligned}dy&=d\ln(1+e^{x^2})=\frac{1}{1+e^{x^2}}d(1+e^{x^2})=\frac{1}{1+e^{x^2}}\cdot e^{x^2}d(x^2)\\&=\frac{e^{x^2}}{1+e^{x^2}}\cdot 2xdx=\frac{2xe^{x^2}}{1+e^{x^2}}dx.\end{aligned}$$

例 5 $y=e^{1-3x}\cos x$，求 dy.

解 应用积的微分法则，得

$$\begin{aligned}dy&=d(e^{1-3x}\cos x)=\cos x d(e^{1-3x})+e^{1-3x}d(\cos x)\\&=(\cos x)e^{1-3x}(-3dx)+e^{1-3x}(-\sin x dx)\\&=-e^{1-3x}(3\cos x+\sin x)dx.\end{aligned}$$

例 6 在下列等式左端的括号中填入适当的函数，使等式成立．

(1) $d(\quad)=xdx$；

(2) d( ) $=\cos\omega t\mathrm{d}t$.

解 (1) 我们知道,

$$\mathrm{d}(x^2)=2x\mathrm{d}x.$$

可见
$$x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2)=\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right),$$

即
$$\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right)=x\mathrm{d}x.$$

一般地,有

$$\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}+C\right)=x\mathrm{d}x\quad(C\text{ 为任意常数}).$$

(2) 因为

$$\mathrm{d}(\sin\omega t)=\omega\cos\omega t\mathrm{d}t,$$

可见
$$\cos\omega t\mathrm{d}t=\frac{1}{\omega}\mathrm{d}(\sin\omega t)=\mathrm{d}\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right),$$

即
$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right)=\cos\omega t\mathrm{d}t.$$

一般地,有

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega t+C\right)=\cos\omega t\mathrm{d}t\quad(C\text{ 为任意常数}).$$

习 题 2—7

1. 已知 $y=x^3-x$,计算在 $x=2$ 处当 Δx 分别等于 1, 0.1, 0.01 时的 Δy 及 $\mathrm{d}y$.

2. 设函数 $y=f(x)$ 的图形如图 2—14,试在图 2—14(a)、(b)、(c)、(d)中分别标出在点 x_0 的 $\mathrm{d}y$、Δy 及 $\Delta y-\mathrm{d}y$,并说明其正负.

3. 求下列函数的微分:

(1) $y=\frac{1}{x}+2\sqrt{x}$; (2) $y=x\sin 2x$;

(3) $y=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; (4) $y=[\ln(1-x)]^2$;

(5) $y=x^2e^{2x}$; (6) $y=e^{-x}\cos(3-x)$;

(7) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$; (8) $y=\tan^2(1+2x^2)$;

(9) $y=\arctan\frac{1-x^2}{1+x^2}$;

(10) $s=A\sin(\omega t+\varphi)$　　(A、ω、φ是常数).

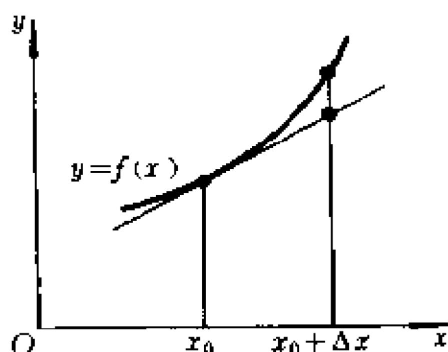
4. 将适当的函数填入下列括号内，使等式成立：

(1) $\mathrm{d}(\quad)=2\mathrm{d}x$；　　(2) $\mathrm{d}(\quad)=3x\mathrm{d}x$；

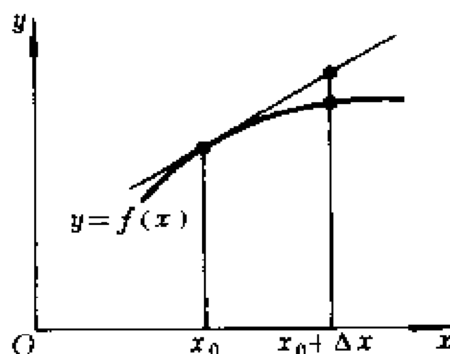
(3) $\mathrm{d}(\quad)=\cos t\mathrm{d}t$；　　(4) $\mathrm{d}(\quad)=\sin \omega x\mathrm{d}x$；

(5) $\mathrm{d}(\quad)=\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$；　　(6) $\mathrm{d}(\quad)=\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$；

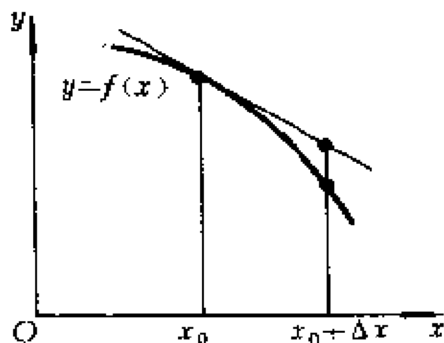
(7) $\mathrm{d}(\quad)=\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；　　(8) $\mathrm{d}(\quad)=\sec^2 3x\mathrm{d}x$.



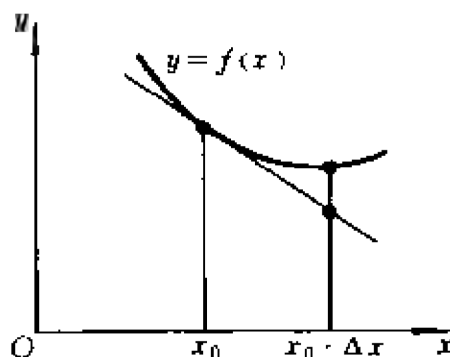
(a)



(b)



(c)



(d)

图　2—14

第八节　微分在近似计算中的应用

在工程问题中，经常会遇到一些复杂的计算公式. 如果直接用这些公式进行计算，那是很费力的. 利用微分往往可以把一些复杂的计算公式改用简单的近似公式来代替.

前面说过，如果 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)\neq 0$，且

$|\Delta x|$很小时，我们有

$$\Delta y \approx \mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x.$$

这个式子也可以写为

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x, \tag{1}$$

或

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \tag{2}$$

在(2)式中令 $x = x_0+\Delta x$，即 $\Delta x = x - x_0$，那末(2)式可改写为

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{3}$$

如果 $f(x_0)$ 与 $f'(x_0)$ 都容易计算，那末可利用(1)式来近似计算 Δy，利用(2)式来近似计算 $f(x_0+\Delta x)$，或利用(3)式来近似计算 $f(x)$. 这种近似计算的实质就是用 x 的线性函数 $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ 来近似表达函数 $f(x)$. 从导数的几何意义可知，这也就是用曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线来近似代替该曲线(就切点邻近部分来说).

例 1 有一批半径为 1cm 的球，为了提高球面的光洁度，要镀上一层铜，厚度定为 0.01cm. 估计一下每只球需用铜多少 g(铜的密度是 8.9g/cm³)?

解 先求出镀层的体积，再乘上密度就得到每只球需用铜的质量.

因为镀层的体积等于两个球体体积之差，所以它就是球体体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ 当 R 自 R_0 取得增量 ΔR 时的增量 ΔV. 我们求 V 对 R 的导数：

$$V'\Big|_{R=R_0} = \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)'\Big|_{R=R_0} = 4\pi R_0^2,$$

由(1)式得

$$\Delta V \approx 4\pi R_0^2 \Delta R.$$

将 $R_0=1$、$\Delta R=0.01$ 代入上式，得

$$\Delta V \approx 4\times 3.14\times 1^2\times 0.01 = 0.13(\mathrm{cm}^3).$$

于是镀每只球需用的铜约为

$$0.13\times 8.9 = 1.16(\mathrm{g}).$$

例 2 利用微分计算 sin 30°30′的近似值.

解 把 30°30′化为弧度,得

$$30°30' = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{360}.$$

由于所求的是正弦函数的值,故设 $f(x)=\sin x$. 此时 $f'(x)=\cos x$. 如果取 $x_0=\frac{\pi}{6}$,则 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$与 $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$都容易计算,并且 $\Delta x=\frac{\pi}{360}$比较小. 应用(2)式便得

$$\begin{aligned}\sin 30°30' &= \sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{360}\right) \approx \sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{360}\\ &= \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{360} = 0.5000+0.0076\\ &= 0.5076.\end{aligned}$$

下面我们来推导一些常用的近似公式. 为此,在(3)式中取 $x_0=0$,于是得

$$f(x) \approx f(0)+f'(0)x. \tag{4}$$

应用(4)式可以推得以下几个在工程上常用的近似公式(下面都假定 $|x|$是较小的数值):

(i) $\sqrt[n]{1+x} \approx 1+\frac{1}{n}x$;

(ii) $\sin x \approx x$ (x 用弧度作单位来表达);

(iii) $\tan x \approx x$ (x 用弧度作单位来表达);

(iv) $e^x \approx 1+x$;

(v) $\ln(1+x) \approx x$.

证 (i) 取 $f(x)=\sqrt[n]{1+x}$, 那末 $f(0)=1$, $f'(0)=\frac{1}{n}(1+x)^{\frac{1}{n}-1}\Big|_{x=0}=\frac{1}{n}$, 代入(4)式便得

$$\sqrt[n]{1+x} \approx 1+\frac{1}{n}x.$$

证 (ii) 取 $f(x)=\sin x$,那末 $f(0)=0$,$f'(0)=\cos x\big|_{x=0}=1$,代入(4)式便得

$$\sin x \approx x.$$

其他几个近似公式可用类似方法证明，这里从略了.

例 3 计算 $\sqrt{1.05}$ 的近似值.

解 $$\sqrt{1.05}=\sqrt{1+0.05},$$

这里 $x=0.05$，其值较小，利用近似公式(i)($n=2$ 的情形)，便得

$$\sqrt{1.05}\approx 1+\frac{1}{2}(0.05)=1.025.$$

如果直接开方，可得

$$\sqrt{1.05}=1.02470.$$

将两个结果比较一下，可以看出，用 1.025 作为 $\sqrt{1.05}$ 的近似值，其误差不超过 0.001，这样的近似值在一般应用上已够精确了. 如果开方次数较高，就更能体现出用微分进行近似计算的优越性.

在生产实践中，经常要测量各种数据. 但是有的数据不易直接测量，这时我们就通过测量其它有关数据后，根据某种公式算出所要的数据. 例如，要计算圆钢的截面积 A，可先用卡尺测量圆钢截面的直径 D，然后根据公式 $A=\frac{\pi}{4}D^2$ 算出 A.

由于测量仪器的精度、测量的条件和测量的方法等各种因素的影响，测得的数据往往带有误差，而根据带有误差的数据计算所得的结果也会有误差，我们把它叫做间接测量误差.

下面就讨论怎样利用微分来估计间接测量误差.

先说明什么叫绝对误差、什么叫相对误差.

如果某个量的精确值为 A，它的近似值为 a，那末 $|A-a|$ 叫做 a 的绝对误差，而绝对误差与 $|a|$ 的比值 $\frac{|A-a|}{|a|}$ 叫做 a 的相对误差.

在实际工作中，某个量的精确值往往是无法知道的，于是绝对误差和相对误差也就无法求得. 但是根据测量仪器的精度等因素，有时能够确定误差在某一个范围内. 如果某个量的精确值是 A，测得它的近似值是 a，又知道它的误差不超过 δ_A，即

$$|A-a|\leqslant\delta_A,$$

那末 δ_A 叫做测量 A 的绝对误差限，而 $\frac{\delta_A}{|a|}$ 叫做测量 A 的相对误差限.

例 4 设测得圆钢截面的直径 $D=60.03\text{mm}$，测量 D 的绝对误差限 $\delta_D=0.05\text{mm}$. 利用公式

$$A=\frac{\pi}{4}D^2$$

计算圆钢的截面积时，试估计面积的误差.

解 我们把测量 D 时所产生的误差当作自变量 D 的增量 ΔD，那末，利用公式 $A=\frac{\pi}{4}D^2$ 来计算 A 时所产生的误差就是函数 A 的对应增量 ΔA. 当 $|\Delta D|$ 很小时，可以利用微分 $\mathrm{d}A$ 近似地代替增量 ΔA，即

$$\Delta A\approx \mathrm{d}A=A'\cdot\Delta D=\frac{\pi}{2}D\cdot\Delta D.$$

由于 D 的绝对误差限为 $\delta_D=0.05\text{mm}$，所以

$$|\Delta D|\leqslant\delta_D=0.05,$$

而
$$|\Delta A|\approx|\mathrm{d}A|=\frac{\pi}{2}D\cdot|\Delta D|\leqslant\frac{\pi}{2}D\cdot\delta_D,$$

因此得出 A 的绝对误差限约为

$$\delta_A=\frac{\pi}{2}D\cdot\delta_D=\frac{\pi}{2}\times60.03\times0.05\approx4.715(\text{mm}^2);$$

A 的相对误差限约为

$$\frac{\delta_A}{A}=\frac{\frac{\pi}{2}D\cdot\delta_D}{\frac{\pi}{4}D^2}=2\frac{\delta_D}{D}=2\times\frac{0.05}{60.03}\approx0.17\%.$$

一般地，根据直接测量的 x 值按公式 $y=f(x)$ 计算 y 值时，如果已知测量 x 的绝对误差限是 δ_x，即

$$|\Delta x|\leqslant\delta_x,$$

那末，当 $y'\neq0$ 时，y 的绝对误差

$$|\Delta y| \approx |dy| = |y'| \cdot |\Delta x| \leqslant |y'| \cdot \delta_x,$$

即 y 的绝对误差限约为

$$\delta_y = |y'| \cdot \delta_x; \tag{5}$$

y 的相对误差限约为

$$\frac{\delta_y}{|y|} = \left|\frac{y'}{y}\right| \cdot \delta_x. \tag{6}$$

以后常把绝对误差限与相对误差限简称为绝对误差与相对误差.

习　题　2—8

1. 水管壁的正截面是一个圆环(图 2—15),设它的内半径为 R_0,壁厚为 h,利用微分来计算这个圆环面积的近似值.

2. 扩音器插头为圆柱形,截面半径 r 为 0.15cm,长度 l 为 4cm,为了提高它的导电性能,要在这圆柱的侧面镀上一层厚为 0.001cm 的纯铜,问每个插头约需多少克纯铜?

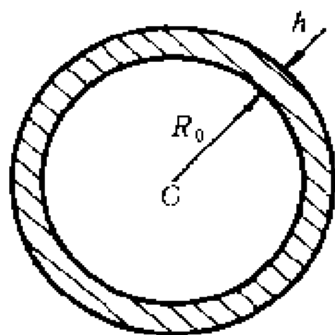


图　2—15

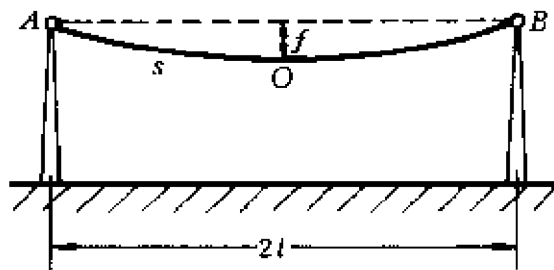


图　2—16

3. 如图 2—16 所示的电缆$\overparen{AOB}$的长为 s,跨度为 $2l$,电缆的最低点 O 与杆顶连线 AB 的距离为 f,则电缆长可按下面公式计算:

$$s = 2l\left(1 + \frac{2f^2}{3l^2}\right),$$

当 f 变化了 Δf 时,电缆长的变化约为多少?

4. 设扇形的圆心角 $\alpha = 60°$,半径 $R = 100$cm(图 2—17).如果 R 不变,α 减少 $30'$,问扇形面积大约改变了多少?又如果 α 不变,R 增加 1cm,问扇形面

积大约改变了多少?

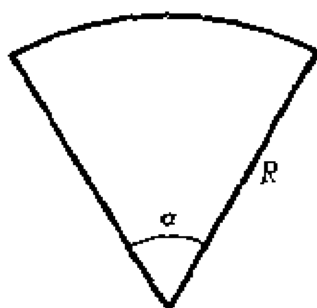


图 2-17

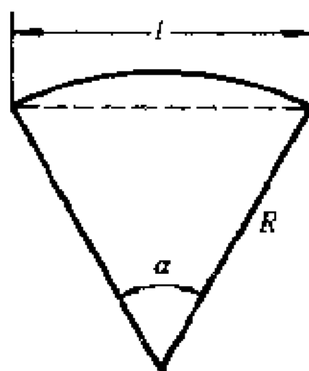


图 2-18

5. 计算下列三角函数值的近似值:

(1) $\cos 29°$;　　　　(2) $\tan 136°$.

6. 计算下列反三角函数值的近似值:

(1) $\arcsin 0.5002$;　　　　(2) $\arccos 0.4995$.

7. 当$|x|$较小时,证明下列近似公式:

(1) $\tan x \approx x$ (x是角的弧度值);　　(2) $\ln(1+x) \approx x$;

(3) $\frac{1}{1+x} \approx 1-x$,

并计算 $\tan 45'$ 和 $\ln 1.002$ 的近似值.

8. 计算下列各根式的近似值:

(1) $\sqrt[3]{996}$;　　　　(2) $\sqrt[6]{65}$.

9. 有一立方形的铁箱,它的边长为 70 ± 0.1cm,求出它的体积,并估计绝对误差和相对误差.

10. 已知测量球的直径 D 时有 1% 的相对误差. 问用公式

$$V = \frac{\pi}{6} D^3$$

计算球的体积时,相对误差有多少?

11. 计算球体体积时,要求精确度在 2% 以内. 问这时测量直径 D 的相对误差不能超过多少?

12. 某厂生产如图 2-18 所示的扇形板,半径 $R = 200$mm,要求中心角 α 为 55°. 产品检验时,一般用测量弦长 l 的办法来间接测量中心角 α. 如果测量弦长 l 时的误差 $\delta_l = 0.1$mm,问由此而引起的中心角测量误差 δ_α 是多少?

总习题二

1. 在“充分”、“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格内：

(1) $f(x)$在点x_0可导是$f(x)$在点x_0连续的________条件. $f(x)$在点x_0连续是$f(x)$在点x_0可导的________条件.

(2) $f(x)$在点x_0的左导数$f'_-(x_0)$及右导数$f'_+(x_0)$都存在且相等是$f(x)$在点x_0可导的________条件.

(3) $f(x)$在点x_0可导是$f(x)$在点x_0可微的________条件.

2. 设有一根细棒，取棒的一端作为原点，棒上任意点的坐标为x，于是分布在区间$[0,x]$上细棒的质量m是x的函数$m=m(x)$. 应怎样确定细棒在点x_0处的线密度(对于均匀细棒来说，单位长度细棒的质量叫做这细棒的线密度)?

3. 根据导数的定义，求$f(x)=\dfrac{1}{x}$的导数.

4. 求下列函数$f(x)$的$f'_-(0)$及$f'_+(0)$，又$f'(0)$是否存在：

(1) $$f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ \ln(1+x), & x\geqslant 0;\end{cases}$$

(2) $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

5. 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在$x=0$处的连续性与可导性.

6. 求下列函数的导数：

(1) $y=\arcsin(\sin x)$;

(2) $y=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$;

(3) $y=\ln\tan\dfrac{x}{2}-\cos x\cdot\ln\tan x$;

(4) $y=\ln(e^x+\sqrt{1+e^{2x}})$;

(5) $y=\sqrt[x]{x}\quad(x>0)$.

7. 求下列函数的二阶导数：

(1) $y=\cos^2 x \cdot \ln x$；

(2) $y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

8. 求下列函数的 n 阶导数：

(1) $y=\sqrt[m]{1+x}$；

(2) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$.

9. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+xy=e$ 所确定，求 $y''(0)$.

10. 求下列由参数方程所确定的函数的一阶导数 $\dfrac{dy}{dx}$ 及二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$：

(1) $\begin{cases} x=a\cos^3\theta, \\ y=a\sin^3\theta; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=\ln\sqrt{1+t^2}, \\ y=\arctan t. \end{cases}$

11. 求曲线 $\begin{cases} x=2e^t, \\ y=e^{-t} \end{cases}$ 在 $t=0$ 相应的点处的切线方程及法线方程.

12. 甲船以 6km/h 的速率向东行驶，乙船以 8km/h 的速率向南行驶. 在中午十二点正，乙船位于甲船之北 16km 处. 问下午一点正两船相离的速率为多少？

13. 利用函数的微分代替函数的增量求 $\sqrt[3]{1.02}$ 的近似值.

14. 已知单摆的振动周期 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$，其中 $g=980\text{cm/s}^2$，l 为摆长（单位为 cm）. 设原摆长为 20cm，为使周期 T 增大 0.05s，摆长约需加长多少？

第三章　中值定理与导数的应用

上一章里，从分析实际问题中因变量相对于自变量的变化快慢出发，引进了导数概念，并讨论了导数的计算方法. 本章中，我们将应用导数来研究函数以及曲线的某些性态，并利用这些知识解决一些实际问题. 为此，先要介绍微分学的几个中值定理，它们是导数应用的理论基础.

第一节　中值定理

我们先讲罗尔(Rolle)定理，然后根据它推出拉格朗日(Lagrange)中值定理和柯西中值定理.

一、罗尔定理

罗尔定理　如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且在区间端点的函数值相等，即 $f(a)=f(b)$，那末在 (a,b) 内至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$，使得函数 $f(x)$ 在该点的导数等于零：$f'(\xi)=0$.

在证明这个定理之前，先考察一下定理的几何意义. 在图3-1中，设曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的方程为 $y=f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$. 罗尔定理的条件在几何上表示：$\overset{\frown}{AB}$ 是一条连续的曲线弧，除端点外处处具有不垂直于 x 轴的切线，且两个端点的纵坐标相等. 定理的结论表达了这样一个几何事实：在曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上至少有一点 C，在该点处曲线的切线是水平的. 从图中看到，在曲线的最高点或最低点处，切线是水平的，这就启发了我们证明这个定理的思路.

定理的证明　由于 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，根据闭区间

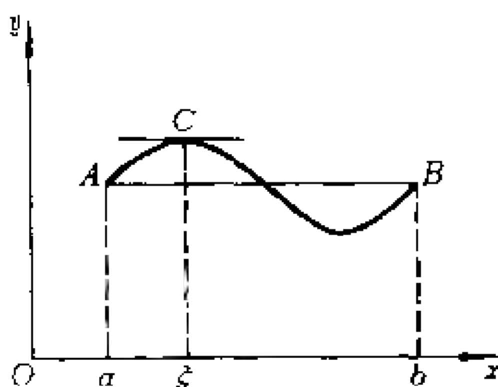


图 3—1

上连续函数的最大值和最小值定理，$f(x)$在闭区间$[a,b]$上必定取得它的最大值 M 和最小值 m. 这样只有两种可能情形：

(1) $M=m$. 这时 $f(x)$在区间$[a,b]$上必然取相同的数值 M：$f(x)=M$. 由此有 $f'(x)=0$，因此可以取(a,b)内任意一点作为 ξ 而有 $f'(\xi)=0$.

(2) $M>m$. 因为 $f(a)=f(b)$，所以 M 和 m 这两个数中至少有一个不等于 $f(x)$在区间$[a,b]$的端点处的函数值. 为确定起见，不妨设 $M\neq f(a)$（如果设 $m\neq f(a)$，证法完全类似），那末必定在开区间(a,b)内有一点 ξ 使 $f(\xi)=M$. 下面证明 $f(x)$在点 ξ 处的导数等于零：$f'(\xi)=0$.

因为 ξ 是开区间(a,b)内的点，根据假设可知 $f'(\xi)$存在，即极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}$$

存在. 而极限存在必定左、右极限都存在并且相等，因此

$$f'(\xi)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}.$$

由于 $f(\xi)=M$ 是 $f(x)$在$[a,b]$上的最大值，因此不论 Δx 是正的还是负的，只要 $\xi+\Delta x$ 在$[a,b]$上，总有，

$$f(\xi-\Delta x)\leqslant f(\xi),$$

即
$$f(\xi+\Delta x)-f(\xi)\leqslant 0.$$

当 $\Delta x>0$ 时，

$$\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}\leqslant 0,$$

从而，根据函数极限的性质（第一章第四节定理 2），有

$$f'(\xi)=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}\leqslant 0.$$

同理，当 $\Delta x<0$ 时，

$$\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}\geqslant 0,$$

从而 $$f'(\xi)=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}\geqslant 0,$$

因此必然有 $$f'(\xi)=0.$$

二、拉格朗日中值定理

罗尔定理中 $f(a)=f(b)$ 这个条件是相当特殊的，它使罗尔定理的应用受到限制. 如果把 $f(a)=f(b)$ 这个条件取消，但仍保留其余两个条件，并相应地改变结论，那末就得到微分学中十分重要的拉格朗日中值定理.

拉格朗日中值定理　如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，那末在 (a,b) 内至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$，使等式

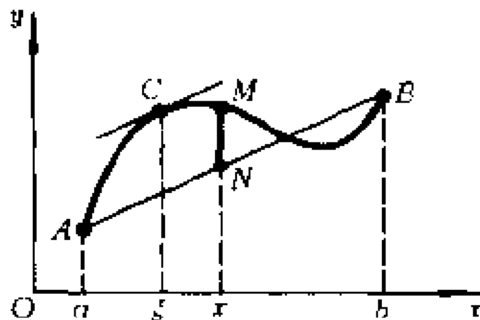


图 3－2

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a) \tag{1}$$

成立.

在证明之前,先看一下定理的几何意义.如果把(1)式改写成

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi),$$

由图3—2可看出,$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$为弦AB的斜率,而$f'(\xi)$为曲线在点C处的切线的斜率.因此拉格朗日中值定理的几何意义是:如果连续曲线$y=f(x)$的弧$\overset{\frown}{AB}$上除端点外处处具有不垂直于x轴的切线,那末这弧上至少有一点C,使曲线在C点处的切线平行于弦AB.

从罗尔定理的几何意义中(图3—1)看出,由于$f(a)=f(b)$,弦AB是平行于x轴的,因此点C处的切线实际上也平行于弦AB.由此可见,罗尔定理是拉格朗日中值定理的特殊情形.

从上述拉格朗日中值定理与罗尔定理的关系,自然想到利用罗尔定理来证明拉格朗日中值定理.但在拉格朗日中值定理中,函数$f(x)$不一定具备$f(a)=f(b)$这个条件,为此我们设想构造一个与$f(x)$有密切联系的函数$\varphi(x)$(称为辅助函数),使$\varphi(x)$满足条件$\varphi(a)=\varphi(b)$.然后对$\varphi(x)$应用罗尔定理,再把对$\varphi(x)$所得的结论转化到$f(x)$上,证得所要的结果.我们从拉格朗日中值定理的几何解释中来寻找辅助函数,从图3—2中看到,有向线段NM的值是x的函数,把它表示为$\varphi(x)$,它与$f(x)$有密切的联系,且当$x=a$及$x=b$时,点M与点N重合,即有$\varphi(a)=\varphi(b)=0$.为求得函数$\varphi(x)$的表达式,设直线AB的方程为$y=L(x)$,则

$$L(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

由于点M、N的纵坐标依次为$f(x)$及$L(x)$,故表示有向线段NM的值的函数

$$\varphi(x)=f(x)-L(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

下面就利用这个辅助函数来证明拉格朗日中值定理.

定理的证明 引进辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

容易验证函数 $\varphi(x)$ 适合罗尔定理的条件：$\varphi(a)=\varphi(b)=0$；$\varphi(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且

$$\varphi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

根据罗尔定理，可知在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使 $\varphi'(\xi)=0$，即

$$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0.$$

由此得
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi),$$

即
$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

定理证毕.

显然，公式(1)对于 $b<a$ 也成立. (1)式叫做拉格朗日中值公式.

设 x 为区间 $[a,b]$ 内一点，$x+\Delta x$ 为这区间内的另一点（$\Delta x>0$ 或 $\Delta x<0$），则公式(1)在区间 $[x,x+\Delta x]$（当 $\Delta x>0$ 时）或在区间 $[x+\Delta x,x]$（当 $\Delta x<0$ 时）上就成为

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\cdot\Delta x \quad (0<\theta<1). \qquad (2)$$

这里数值 θ 是在 0 与 1 之间，所以 $x+\theta\Delta x$ 是在 x 与 $x+\Delta x$ 之间.

如果记 $f(x)$ 为 y，则(2)式又可写成

$$\Delta y=f'(x+\theta\Delta x)\cdot\Delta x \quad (0<\theta<1). \qquad (3)$$

我们知道，函数的微分 $\mathrm{d}y=f'(x)\cdot\Delta x$ 是函数的增量 Δy 的近似表达式，一般说来，以 $\mathrm{d}y$ 近似代替 Δy 时所产生的误差只有当 $\Delta x\to0$ 时才趋于零；而(3)式则表示 $f'(x+\theta\Delta x)\cdot\Delta x$ 在 Δx 为有限时就是增量 Δy 的准确表达式. 因此这个定理也叫做有限增量定理，它在微分学中占有重要地位，有时也叫做微分中值定理，它精确地表达了函数在一个区间上的增量与函数在这区间内某点处的

导数之间的关系．在某些问题中当自变量 x 取得有限增量 Δx 而需要函数增量的准确表达式时，拉格朗日中值定理就显出它的价值．

作为拉格朗日中值定理的一个应用，我们来导出以后讲积分学时很有用的一个定理．我们知道，如果函数 $f(x)$ 在某一区间上是一个常数，那末 $f(x)$ 在该区间上的导数恒为零．它的逆命题也是成立的，这就是：

定理　如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上的导数恒为零，那末 $f(x)$ 在区间 I 上是一个常数．

证　在区间 I 上任取两点 x_1、x_2（$x_1<x_2$），应用(1)式就得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)\quad (x_1<\xi<x_2).$$

由假定，$f'(\xi)=0$，所以 $f(x_2)-f(x_1)=0$，即

$$f(x_2)=f(x_1).$$

因为 x_1、x_2 是 I 上任意两点，所以上面的等式表明：$f(x)$ 在 I 上的函数值总是相等的，这就是说，$f(x)$ 在区间 I 上是一个常数．

从上述论证中可以看出，虽然拉格朗日中值定理中的 ξ 的准确数值不知道，但在这里并不妨碍它的应用．

例 1　证明当 $x>0$ 时，

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$$

证　设 $f(x)=\ln(1+x)$，显然 $f(x)$ 在区间 $[0,x]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，根据定理，应有

$$f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0),0<\xi<x.$$

由于 $f(0)=0$，$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$，因此上式即为

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1+\xi}.$$

又由 $0<\xi<x$，有

$$\frac{x}{1+x}<\frac{x}{1+\xi}<x,$$

即

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$$

三、柯西中值定理

上面已经指出，如果连续曲线弧$\overset{\frown}{AB}$上除端点外处处具有不垂直于横轴的切线，那末这段弧上至少有一点 C，使曲线在点 C 处的切线平行于弦 AB. 设$\overset{\frown}{AB}$由参数方程

$$\begin{cases} X=F(x), \\ Y=f(x) \end{cases} \quad (a\leqslant x\leqslant b)$$

表示(图 3—3)，其中 x 为参数. 那末曲线上点(X,Y)处的切线的斜率为

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{f'(x)}{F'(x)},$$

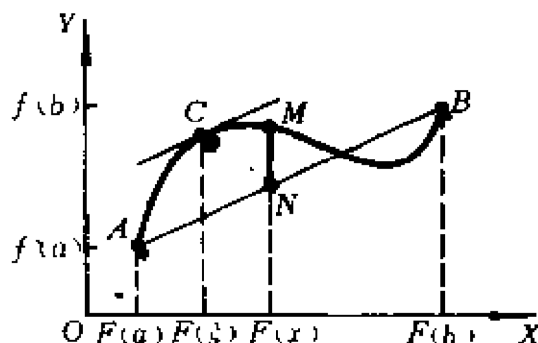


图 3—3

弦 AB 的斜率为

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}.$$

假定点 C 对应于参数 $x=\xi$，那末曲线上点 C 处的切线平行于弦 AB，可表示为

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

与这一事实相应的是

柯西中值定理　如是函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $F'(x)$ 在 (a,b) 内的每一点处均不为零，那末在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使等式

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} \tag{4}$$

成立.

证　首先注意到 $F(b)-F(a)\neq 0$. 这是由于

$$F(b)-F(a)=F'(\eta)(b-a),$$

其中 $a<\eta<b$，根据假定 $F'(\eta)\neq 0$，又 $b-a\neq 0$，所以

$$F(b)-F(a)\neq 0.$$

类似拉格朗日中值定理的证明，我们仍然以表示有向线段 NM 的值的函数 $\varphi(x)$（见图 3—3）作为辅助函数. 这里，点 M 的纵坐标为 $Y=f(x)$，点 N 的纵坐标为

$$Y=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}[F(x)-F(a)],$$

于是

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}[F(x)-F(a)].$$

容易验证，这个辅助函数 $\varphi(x)$ 适合罗尔定理的条件：$\varphi(a)=\varphi(b)=0$；$\varphi(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导且

$$\varphi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}\cdot F'(x).$$

根据罗尔定理，可知在 (a,b) 内必定有一点 ξ 使得 $\varphi'(\xi)=0$，即

$$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}\cdot F'(\xi)=0,$$

由此得

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)},$$

定理证毕.

很明显，如果取 $F(x)=x$，那末 $F(b)-F(a)=b-a$，$F'(x)=1$，因而公式(4)就可以写成：

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)\quad (a<\xi<b),$$

这样就变成拉格朗日中值公式了.

习　题　3—1

1. 验证罗尔定理对函数 $y=\ln\sin x$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上的正确性.

2. 验证拉格朗日中值定理对函数 $y=4x^3-5x^2+x-2$ 在区间 $[0,1]$ 上的正确性.

3. 对函数 $f(x)=\sin x$ 及 $F(x)=x+\cos x$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上验证柯西中值定理的正确性.

4. 试证明对函数 $y=px^2+qx+r$ 应用拉格朗日中值定理时所求得的点 ξ 总是位于区间的正中间.

5. 不用求出函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 的导数,说明方程 $f'(x)=0$ 有几个实根,并指出它们所在的区间.

6. 证明恒等式:$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}\quad(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

7. 若方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x=0$ 有一个正根 $x=x_0$,证明方程 $a_0nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$ 必有一个小于 x_0 的正根.

8. 若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内具有二阶导数,且 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$,其中 $a<x_1<x_2<x_3<b$,证明:在 (x_1,x_3) 内至少有一点 ξ,使得 $f''(\xi)=0$.

9. 设 $a>b>0$,$n>1$,证明:

$$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b).$$

10. 设 $a>b>0$,证明:

$$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}.$$

11. 证明下列不等式:

(1) $|\arctan a-\arctan b|\leqslant|a-b|$;

(2) 当 $x>1$ 时,$e^x>e\cdot x$.

12. 证明方程 $x^5+x-1=0$ 只有一个正根.

13. 设 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,证明在 (a,b) 内有一点 ξ,使 $\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix}=(b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}$.

14. 证明:若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足关系式 $f'(x)=f(x)$,且

$f(0)=1$，则 $f(x)=e^x$.

15. 设函数 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有 n 阶导数，且 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$，试用柯西中值定理证明：

$$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!},\quad (0<\theta<1).$$

第二节 洛必达法则

如果当 $x\to a$（或 $x\to\infty$）时，两个函数 $f(x)$ 与 $F(x)$ 都趋于零或都趋于无穷大，那末极限 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\frac{f(x)}{F(x)}$ 可能存在、也可能不存在。通常把这种极限叫做未定式，并分别简记为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$. 在第一章第七节中讨论过的极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ 就是未定式 $\frac{0}{0}$ 的一个例子. 对于这类极限，即使它存在也不能用"商的极限等于极限的商"这一法则. 下面我们将根据柯西中值定理来推出求这类极限的一种简便且重要的方法.

我们着重讨论 $x\to a$ 时的未定式 $\frac{0}{0}$ 的情形，关于这情形有下列定理：

定理 设

(1) 当 $x\to a$ 时，函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 都趋于零；

(2) 在点 a 的某去心邻域内，$f'(x)$ 及 $F'(x)$ 都存在且 $F'(x)\neq 0$；

(3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在（或为无穷大）；

那末

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

这就是说，当 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在时，$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}$ 也存在且等于 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$；当 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$ 为无穷大时，$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}$ 也是无穷大. 这种在一定条件下通过分子分母分别求导再求极限来确定未定式的值的

方法称为洛必达(L'Hospital)法则.

证 因为求$\dfrac{f(x)}{F(x)}$当$x\to a$时的极限与$f(a)$及$F(a)$无关,所以可以假定$f(a)=F(a)=0$,于是由条件(1)、(2)知道,$f(x)$及$F(x)$在点a的某一邻域内是连续的.设x是这邻域内的一点,那末在以x及a为端点的区间上,柯西中值定理的条件均满足,因此有

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{F(x)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}\quad(\xi\text{ 在 }x\text{ 与 }a\text{ 之间}).$$

令$x\to a$,并对上式两端求极限,注意到$x\to a$时$\xi\to a$,再根据条件(3)便得要证明的结论.

如果$\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$当$x\to a$时仍属$\dfrac{0}{0}$型,且这时$f'(x)$、$F'(x)$能满足定理中$f(x)$,$F(x)$所要满足的条件,那末可以继续施用洛必达法则先确定$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$,从而确定$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}$,即

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{F''(x)},$$

且可以依次类推.

例 1 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}\quad(b\neq 0)$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{a\cos ax}{b\cos bx}=\frac{a}{b}.$$

例 2 求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.

解 $$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{6x}{6x-2}=\frac{3}{2}.$$

注意,上式中的$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x}{6x-2}$已不是未定式,不能对它应用洛必达法则,否则要导致错误结果.以后使用洛必达法则时应当经常注意这一点,如果不是未定式,就不能应用洛必达法则.

例 3 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{6x}=\dfrac{1}{6}.$

我们指出，对于 $x\to\infty$ 时的未定式 $\dfrac{0}{0}$，以及对于 $x\to a$ 或 $x\to\infty$ 时的未定式 $\dfrac{\infty}{\infty}$，也有相应的洛必达法则. 例如，对于 $x\to\infty$ 时的未定式 $\dfrac{0}{0}$ 有：**如果**

(1)当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 都趋于零；

(2)当 $|x|>N$ 时 $f'(x)$ 与 $F'(x)$ 都存在，且 $F'(x)\neq 0$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在(或为无穷大)；

那末

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

例 4 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\dfrac{1}{x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}=1.$

例 5 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}$ $(n>0)$.

解 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{nx^{n-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{nx^n}=0.$

例 6 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^{\lambda x}}$ (n 为正整数，$\lambda>0$).

解 相继应用洛必达法则 n 次，得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^{\lambda x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{\lambda e^{\lambda x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{\lambda^2e^{\lambda x}}=\cdots$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{\lambda^n e^{\lambda x}}=0.$$

事实上，如果例 6 中的 n 不是正整数而是任何正数，那末极限仍为零.

其它尚有一些 $0\cdot\infty$、$\infty-\infty$、0^0、1^∞、∞^0 型的未定式，也可通过 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的未定式来计算，下面用例子说明.

例 7 求 $\lim\limits_{x\to+0} x^n\ln x \quad (n>0)$.

解 这是未定式 $0\cdot\infty$. 因为

$$x^n\ln x=\frac{\ln x}{\frac{1}{x^n}},$$

当 $x\to+0$ 时，上式右端是未定式 $\frac{\infty}{\infty}$，应用洛必达法则，得

$$\lim_{x\to+0} x^n\ln x=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{x^{-n}}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-nx^{-n-1}}=\lim_{x\to+0}\left(\frac{-x^n}{n}\right)=0.$$

例 8 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$.

解 这是未定式 $\infty-\infty$. 因为

$$\sec x-\tan x=\frac{1-\sin x}{\cos x},$$

当 $x\to\frac{\pi}{2}$ 时，上式右端是未定式 $\frac{0}{0}$，应用洛必达法则，得

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0.$$

例 9 求 $\lim\limits_{x\to+0} x^x$.

解 这是未定式 0^0. 设 $y=x^x$，取对数得

$$\ln y=x\ln x,$$

当 $x\to+0$ 时，上式右端是未定式 $0\cdot\infty$. 应用例 7 的结果，得

$$\lim_{x\to+0}\ln y=\lim_{x\to+0}(x\ln x)=0.$$

因为 $y=e^{\ln y}$，而 $\lim y=\lim e^{\ln y}=e^{\lim\ln y}$（当 $x\to+0$），

所以 $$\lim_{x\to+0} x^x=\lim_{x\to+0} y=e^0=1.$$

洛必达法则是求未定式的一种有效方法，但最好能与其他求极限的方法结合使用. 例如能化简时应尽可能先化简，可以应用等

价无穷小替代或重要极限时,应尽可能应用.这样可以使运算简捷.

例 10 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^2\sin x}$.

解 如果直接用洛必达法则,那末分母的导数(尤其是高阶导数)较繁.如果作一个等价无穷小替代,那末运算就方便得多.其运算如下:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}\cdot\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x\tan x}{6x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\frac{1}{3}.$$

最后,我们指出,本节定理给出的是求未定式的一种方法.当定理条件满足时,所求的极限当然存在(或为∞),但当定理条件不满足时,所求极限却不一定不存在,这就是说,当 $\lim\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 不存在时(等于无穷大的情况除外),$\lim\dfrac{f(x)}{F(x)}$ 仍可能存在(见本节习题第 2 题).

习 题 3－2

1. 用洛必达法则求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$;　　(6) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$;

(7) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\tan 7x}{\ln\tan 2x}$;　　(8) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}$;

(9) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot} x}$;　　(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sec x-\cos x}$;

(11) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot 2x$;　　(12) $\lim\limits_{x\to 0}x^2e^{\frac{1}{x^2}}$;

(13) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)$；(14) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{a}{x})^x$；

(15) $\lim\limits_{x\to +0} x^{\sin x}$；　　(16) $\lim\limits_{x\to +0}(\frac{1}{x})^{\tan x}$；

2. 验证极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$存在，但不能用洛必达法则得出.

3. 验证极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$存在，但不能用洛必达法则得出.

4. 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}, & x>0,\\ e^{-\frac{1}{2}}, & x\leqslant 0\end{cases}$$

在点 $x=0$ 处的连续性.

第三节　泰勒公式

对于一些较复杂的函数，为了便于研究，往往希望用一些简单的函数来近似表达.由于用多项式表示的函数，只要对自变量进行有限次加、减、乘三种算术运算，便能求出它的函数值来，因此我们经常用多项式来近似表达函数.

在微分的应用中已经知道，当$|x|$很小时，有如下的近似等式：

$$e^x\approx 1+x,\quad \ln(1+x)\approx x.$$

这些都是用一次多项式来近似表达函数的例子.显然，在 $x=0$ 处这些一次多项式及其一阶导数的值，分别等于被近似表达的函数及其导数的相应值.

但是这种近似表达式还存在着不足之处：首先是精确度不高，它所产生的误差仅是关于 x 的高阶无穷小；其次是用它来作近似计算时，不能具体估算出误差大小.因此，对于精确度要求较高且需要估计误差的时候，就必须用高次多项式来近似表达函数，同时给出误差公式.

于是提出如下的问题：设函数 $f(x)$在含有 x_0 的开区间内具

有直到$(n+1)$阶导数，试找出一个关于$(x-x_0)$的n次多项式

$$p_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n \quad (1)$$

来近似表达$f(x)$，要求$p_n(x)$与$f(x)$之差是比$(x-x_0)^n$高阶的无穷小，并给出误差$|f(x)-p_n(x)|$的具体表达式.

下面我们来讨论这个问题.假设$p_n(x)$在x_0处的函数值及它的直到n阶导数在x_0处的值依次与$f(x_0),f'(x_0),\cdots,f^{(n)}(x_0)$相等，即满足

$$p_n(x_0)=f(x_0),p_n'(x_0)=f'(x_0),$$
$$p_n''(x_0)=f''(x_0),\cdots,p_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0),$$

按这些等式来确定多项式(1)的系数$a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n$.为此，对(1)式求各阶导数，然后分别代入以上等式，得

$$a_0=f(x_0),\quad 1\cdot a_1=f'(x_0),$$
$$2!\ a_2=f''(x_0),\quad \cdots,\quad n!\ a_n=f^{(n)}(x_0),$$

即得

$$a_0=f(x_0),a_1=f'(x_0),a_2=\frac{1}{2!}f''(x_0),\cdots,a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0).$$

将求得的系数$a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n$代入(1)式，有

$$p_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \quad (2)$$

下面的定理表明，多项式(2)的确是所要找的n次多项式.

泰勒(Taylor)中值定理　如果函数$f(x)$在含有x_0的某个开区间(a,b)内具有直到$(n+1)$阶的导数，则当x在(a,b)内时，$f(x)$可以表示为$(x-x_0)$的一个n次多项式与一个余项$R_n(x)$之和：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x), \quad (3)$$

其中

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \tag{4}$$

这里 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值.

证 $R_n(x)=f(x)-p_n(x)$. 只需证明

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间}).$$

由假设可知,$R_n(x)$在(a,b)内具有直到$(n+1)$阶导数,且

$$R_n(x_0)=R_n'(x_0)=R_n''(x_0)=\cdots=R_n^{(n)}(x_0)=0.$$

对两个函数 $R_n(x)$及$(x-x_0)^{n+1}$在以 x_0 及 x 为端点的区间上应用柯西中值定理(显然,这两个函数满足柯西中值定理的条件),得

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{R_n(x)-R_n(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}-0}=\frac{R_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n}$$

$$(\xi_1 \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间}),$$

再对两个函数 $R_n'(x)$与$(n+1)(x-x_0)^n$ 在以 x_0 及 ξ_1 为端点的区间上应用柯西中值定理,得

$$\frac{R_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n}=\frac{R_n'(\xi_1)-R_n'(x_0)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n-0}$$

$$=\frac{R_n''(\xi_2)}{n(n+1)(\xi_2-x_0)^{n-1}}$$

$$(\xi_2 \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } \xi_1 \text{ 之间}).$$

照此方法继续做下去,经过$(n+1)$次后,得

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

$$(\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } \xi_n \text{ 之间,因而也在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间}).$$

注意到 $R_n^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)$(因 $p_n^{(n+1)}(x)=0$),则由上式得

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间}),$$

定理证毕.

多项式(2)称为函数 $f(x)$按$(x-x_0)$的幂展开的 n 次近似多项式,公式(3)称为 $f(x)$按$(x-x_0)$的幂展开的 n 阶泰勒公式,而$R_n(x)$的表达式(4)称为拉格朗日型余项.

当 $n=0$ 时，泰勒公式变成拉格朗日中值公式：

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0) \quad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间}).$$

因此，泰勒中值定理是拉格朗日中值定理的推广.

由泰勒中值定理可知，以多项式 $p_n(x)$ 近似表达函数 $f(x)$ 时，其误差为 $|R_n(x)|$. 如果对于某个固定的 n，当 x 在开区间 (a,b) 内变动时，$|f^{(n+1)}(x)|$ 总不超过一个常数 M，则有估计式：

$$|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\leqslant\frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1} \tag{5}$$

及

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=0.$$

由此可见，当 $x\to x_0$ 时误差 $|R_n(x)|$ 是比 $(x-x_0)^n$ 高阶的无穷小，即

$$R_n(x)=o[(x-x_0)^n].$$

这样，我们提出的问题完满地得到解决.

在不需要余项的精确表达式时，n 阶泰勒公式也可写成

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$
$$+o[(x-x_0)^n].$$

在泰勒公式(3)中，如果取 $x_0=0$，则 ξ 在 0 与 x 之间. 因此可令 $\xi=\theta x(0<\theta<1)$，从而泰勒公式变成较简单的形式，即所谓麦克劳林(Maclaurin)公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$
$$+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0<\theta<1). \tag{6}$$

或写作

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n).$$

由此得近似公式：

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

误差估计式(5)相应地变成

$$|R_n(x)|\leqslant\frac{M}{(n+1)!}|x|^{n+1}.$$

例 1 写出函数 $f(x)=e^x$ 的 n 阶麦克劳林公式.

解 因为

$$f'(x)=f''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=e^x,$$

所以 $$f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1.$$

把这些值代入公式(6),并注意到 $f^{(n+1)}(\theta x)=e^{\theta x}$ 便得

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(0<\theta<1).$$

由这个公式可知,若把 e^x 用它的 n 次近似多项式表达为

$$e^x\approx1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!},$$

这时所产生的误差为

$$|R_n(x)|=\left|\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|<\frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1}\quad(0<\theta<1).$$

如果取 $x=1$,则得无理数 e 的近似式为

$$e\approx1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!},$$

其误差 $$|R_n|<\frac{e}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}.$$

当 $n=10$ 时,可算出 $e\approx2.718282$,其误差不超过 10^{-6}.

例 2 求 $f(x)=\sin x$ 的 n 阶麦克劳林公式.

解 因为

$$f'(x)=\cos x,f''(x)=-\sin x,f'''(x)=-\cos x,$$

$$f^{(4)}(x)=\sin x,\cdots,f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),$$

所以

$$f(0)=0,f'(0)=1,f''(0)=0,f'''(0)=-1,f^{(4)}(0)=0$$

等等.它们顺序循环地取四个数 0,1,0,-1,于是按公式(6)得(令 $n=2m$)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + R_{2m},$$

其中

$$R_{2m}(x) = \frac{\sin\left[\theta x + (2m+1)\frac{\pi}{2}\right]}{(2m+1)!}x^{2m+1} \quad (0<\theta<1).$$

如果取 $m=1$，则得近似公式

$$\sin x \approx x,$$

这时误差为

$$|R_2| = \left|\frac{\sin\left(\theta x + \frac{3}{2}\pi\right)}{3!}x^3\right| \leqslant \frac{|x|^3}{6} \quad (0<\theta<1).$$

如果 m 分别取 2 和 3，则可得 $\sin x$ 的 3 次和 5 次近似多项式

$$\sin x \approx x - \frac{1}{3!}x^3 \text{ 和 } \sin x \approx x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5,$$

其误差的绝对值依次不超过 $\frac{1}{5!}|x|^5$ 和 $\frac{1}{7!}|x|^7$. 以上三个近似多项式及正弦函数的图形都画在图 3—4 中，以便于比较.

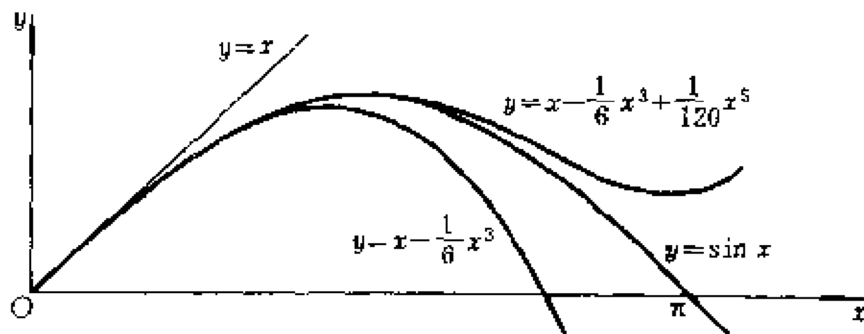


图 3—4

习 题 3—3

1. 按 $(x-4)$ 的乘幂展开多项式 $x^4-5x^3+x^2-3x+4$.

2. 应用麦克劳林公式，按 x 乘幂展开函数

   $f(x)=(x^2-3x+1)^3$.

3. 当 $x_0=-1$ 时，求函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的 n 阶泰勒公式.

4. 求函数 $f(x)=\tan x$ 的二阶麦克劳林公式.

5. 求函数 $f(x)=xe^x$ 的 n 阶麦克劳林公式.

6. 当 $x_0=4$ 时,求函数 $y=\sqrt{x}$ 的二阶泰勒公式.

7. 验证当 $0<x\leqslant\frac{1}{2}$ 时,按公式 $e^x\approx1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$ 计算 e^x 的近似值时,所产生的误差小于 0.01,并求 $\sqrt{e}$ 的近似值,使误差小于 0.01.

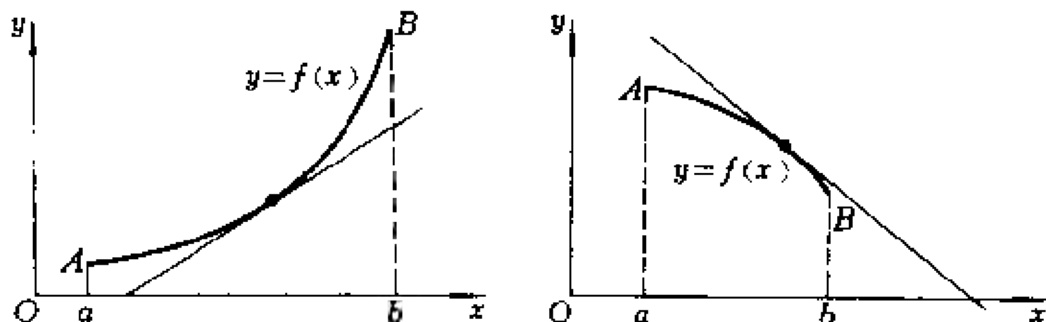
8. 应用三阶泰勒公式求下列各数的近似值,并估计误差:

(1) $\sqrt[3]{30}$;　　(2) $\sin 18°$.

第四节　函数单调性的判定法

第一章第一节中已经介绍了函数在区间上单调的概念.下面利用导数来对函数的单调性进行研究.

如果函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加(单调减少),那末它的图形是一条沿 x 轴正向上升(下降)的曲线.这时,如图 3—5,曲线上各点处的切线斜率是非负的(是非正的),即 $y'=f'(x)\geqslant0$ ($y'=f'(x)\leqslant0$).由此可见,函数的单调性与导数的符号有着密切的联系.



(a) 函数图形上升时切线斜率非负　　(b) 函数图形下降时切线斜率非正

图 3—5

反过来,能否用导数的符号来判定函数的单调性呢?

下面我们利用拉格朗日中值定理来进行讨论.

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,在 $[a,b]$ 上任取

两点 x_1、$x_2(x_1<x_2)$，应用拉格朗日中值定理，得到

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1) \quad (x_1<\xi<x_2). \tag{1}$$

由于在(1)式中，$x_2-x_1>0$，因此，如果在 (a,b) 内导数 $f'(x)$ 保持正号，即 $f'(x)>0$，那末也有 $f'(\xi)>0$. 于是

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)>0,$$

即
$$f(x_1)<f(x_2),$$

表明函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加. 同理，如果在 (a,b) 内导数 $f'(x)$ 保持负号，即 $f'(x)<0$，那末 $f'(\xi)<0$，于是 $f(x_2)-f(x_1)<0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$，表明函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少.

归纳以上讨论，即得

函数单调性的判定法　设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导.

(1) 如果在 (a,b) 内 $f'(x)>0$，那末函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加；

(2) 如果在 (a,b) 内 $f'(x)<0$，那末函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少.

如果把这个判定法中的闭区间换成其他各种区间（包括无穷区间），那末结论也成立.

例 1　判定函数 $y=x-\sin x$ 在 $[0,2\pi]$ 上的单调性.

解　因为在 $(0,2\pi)$ 内

$$y'=1-\cos x>0,$$

所以由判定法可知，函数 $y=x-\sin x$ 在 $[0,2\pi]$ 上单调增加.

例 2　讨论函数 $y=e^x-x-1$ 的单调性.

解　$y'=e^x-1$.

函数 $y=e^x-x-1$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 因为在 $(-\infty,0)$ 内 $y'<0$，所以函数 $y=e^x-x-1$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调减少；因为在 $(0,+\infty)$ 内 $y'>0$，所以函数 $y=e^x-x-1$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加.

例 3 讨论函数 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 的单调性.

解 这函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

当 $x\neq0$ 时,这函数的导数为

$$y'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}},$$

当 $x=0$ 时,函数的导数不存在. 在$(-\infty,0)$内,$y'<0$,因此函数 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 在$(-\infty,0]$上单调减少. 在$(0,+\infty)$内,$y'>0$,因此函数 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 在$[0,+\infty)$上单调增加. 函数的图形如图 3－6 所示.

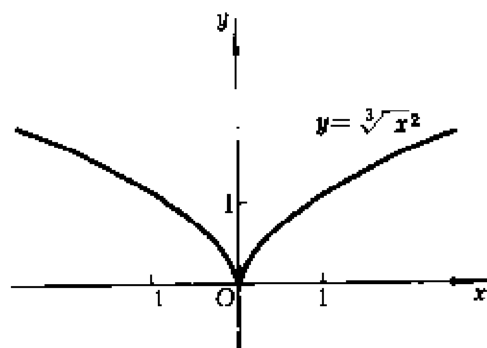


图 3 6

我们注意到,在例 2 中,$x=0$ 是函数 $y=e^x-x-1$ 的单调减少区间$(-\infty,0]$与单调增加区间$[0,+\infty)$的分界点,而在该点处 $y'=0$. 在例 3 中,$x=0$ 是函数 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 的单调减少区间$(-\infty,0]$与单调增加区间$[0,+\infty)$的分界点,而在该点处导数不存在.

从例 2 中看出,有些函数在它的定义区间上不是单调的,但是当我们用导数等于零的点来划分函数的定义区间以后,就可以使函数在各个部分区间上单调. 这个结论对于在定义区间上具有连续导数的函数都是成立的. 从例 3 中可看出,如果函数在某些点处不可导,则划分函数的定义区间的分点,还应包括这些导数不存在的点. 综合上述两种情形,我们有如下结论:

如果函数在定义区间上连续,除去有限个导数不存在的点外导数存在且连续,那末只要用方程 $f'(x)=0$ 的根及 $f'(x)$不存在的点来划分函数 $f(x)$的定义区间,就能保证 $f'(x)$在各个部分区

间内保持固定符号，因而函数 $f(x)$ 在每个部分区间上单调.

例 4 确定函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$ 的单调区间.

解 这函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 求这函数的导数：

$$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2).$$

解方程 $f'(x)=0$，即解

$$6(x-1)(x-2)=0,$$

得出它在函数定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内的两个根 $x_1=1$、$x_2=2$. 这两个根把 $(-\infty,+\infty)$ 分成三个部分区间 $(-\infty,1]$、$[1,2]$ 及 $[2,+\infty)$.

在区间 $(-\infty,1)$ 内，$x-1<0$、$x-2<0$，所以 $f'(x)>0$. 因此，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,1]$ 内单调增加. 在区间 $(1,2)$ 内，$x-1>0$、$x-2<0$，所以 $f'(x)<0$. 因此，函数 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调减少. 在区间 $(2,+\infty)$ 内，$x-1>0$、$x-2>0$，所以 $f'(x)>0$. 因此，函数 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调增加.

函数 $y=f(x)$ 的图形如图 3—7 所示.

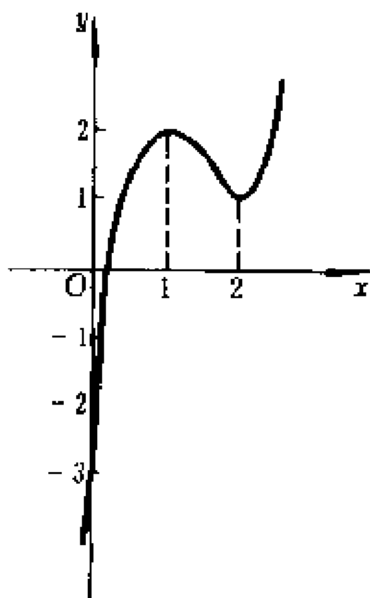


图 3—7

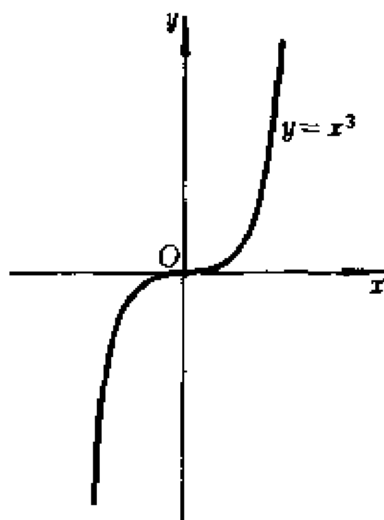


图 3—8

例 5 讨论函数 $y=x^3$ 的单调性.

解 这函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

函数的导数 $y'=3x^2$. 显然，除了点 $x=0$ 使 $y'=0$ 外，在其余各点处均有 $y'>0$. 因此函数 $y=x^3$ 在区间 $(-\infty,0]$ 及 $[0,+\infty)$ 上都是单调增加的，从而在整个定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的. 在 $x=0$ 处曲线有一水平切线. 函数的图形如图 3—8 所示.

一般地，如果 $f'(x)$ 在某区间内的有限个点处为零，在其余各点处均为正(或负)时，那末 $f(x)$ 在该区间上仍旧是单调增加(或单调减少)的.

最后，我们举一个利用函数的单调性证明不等式的例子.

例 6　证明：当 $x>1$ 时，$2\sqrt{x}>3-\frac{1}{x}$.

证　令 $f(x)=2\sqrt{x}-(3-\frac{1}{x})$，则

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2}(x\sqrt{x}-1).$$

$f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续，在 $(1,+\infty)$ 内 $f'(x)>0$，因此在 $[1,+\infty)$ 上 $f(x)$ 单调增加，从而当 $x>1$ 时，$f(x)>f(1)$.

由于 $f(1)=0$，故 $f(x)>f(1)=0$，即

$$2\sqrt{x}-(3-\frac{1}{x})>0,$$

亦即

$$2\sqrt{x}>3-\frac{1}{x}\quad(x>1).$$

习　题　3－4

1. 判定函数 $f(x)=\arctan x-x$ 的单调性.

2. 判定函数 $f(x)=x+\cos x\,(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$ 的单调性.

3. 确定下列函数的单调区间：

(1) $y=2x^3-6x^2-18x-7$；　　(2) $y=2x+\frac{8}{x}\quad(x>0)$；

(3) $y=\frac{10}{4x^3-9x^2+6x}$；　　(4) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；

(5) $y=(x-1)(x+1)^3$；　　(6) $y=\sqrt[3]{(2x-a)(a-x)^2}\quad(a>0)$；

(7) $y=x^n e^{-x}\quad(n>0,x\geqslant 0)$；　　(8) $y=x+|\sin 2x|$.

4. 证明下列不等式：

(1) 当 $x>0$ 时，$1+\frac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$；

(2) 当 $x>0$ 时，$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$；

(3) 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin x+\tan x>2x$；

(4) 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\tan x>x+\frac{1}{3}x^3$；

(5) 当 $x>4$ 时，$2^x>x^2$.

5. 试证方程 $\sin x=x$ 只有一个实根.

6. 讨论方程 $\ln x=ax$（其中 $a>0$）有几个实根？

7. 单调函数的导函数是否必为单调函数？研究下面这个例子：

$$f(x)=x+\sin x.$$

第五节　函数的极值及其求法

在上节例 4 中我们看到，点 $x=1$ 及 $x=2$ 是函数

$$f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$$

的单调区间的分界点. 例如，在点 $x=1$ 的左侧邻近，函数 $f(x)$ 是单调增加的，在点 $x=1$ 的右侧邻近，函数 $f(x)$ 是单调减少的. 因此，存在着点 $x=1$ 的一个去心邻域，对于这去心邻域内的任何点 x，$f(x)<f(1)$ 均成立. 类似地，关于点 $x=2$，也存在着一个去心邻域，对于这去心邻域内的任何点 x，$f(x)>f(2)$ 均成立（参看图 3—7）. 具有这种性质的点如 $x=1$ 及 $x=2$，在应用上有着重要的意义，值得我们对此作一般性的讨论.

定义　设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，x_0 是 (a,b) 内的一个点. 如果存在着点 x_0 的一个去心邻域，对于这去心邻域内的任何点 x，$f(x)<f(x_0)$ 均成立，就称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大值；如果存在着点 x_0 的一个去心邻域，对于这去心邻域内的任何点 x，$f(x)>f(x_0)$ 均成立，就称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极小值.

函数的极大值与极小值统称为函数的极值，使函数取得极值的点称为极值点. 例如，上节例 4 中的函数

$$f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$$

有极大值 $f(1)=2$ 和极小值 $f(2)=1$，点 $x=1$ 和 $x=2$ 是函数 $f(x)$ 的极值点.

函数的极大值和极小值概念是局部性的. 如果 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大值，那只是就 x_0 附近的一个局部范围来说，$f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的一个最大值；如果就 $f(x)$ 的整个定义域来说，$f(x_0)$ 不见得是最大值. 关于极小值也类似.

在图 3—9 中，函数 $f(x)$ 有两个极大值：$f(x_2)$、$f(x_5)$，三个极小值：$f(x_1)$、$f(x_4)$、$f(x_6)$，其中极大值 $f(x_2)$ 比极小值 $f(x_6)$ 还小. 就整个区间 $[a,b]$ 来说，只有一个极小值 $f(x_1)$ 同时也是最小值，而没有一个极大值是最大值.

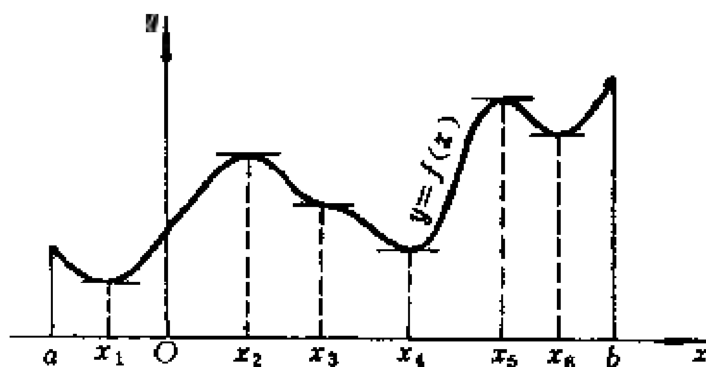


图 3—9

从图中还可看到，在函数取得极值处，曲线上的切线是水平的. 但曲线上有水平切线的地方，函数不一定取得极值. 例如图中 $x=x_3$ 处，曲线上有水平切线，但 $f(x_3)$ 不是极值.

现在就来讨论函数取得极值的必要条件和充分条件.

定理 1（必要条件）　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，且在 x_0 处取得极值，那末这函数在 x_0 处的导数为零，即 $f'(x_0)=0$.

证　为确定起见，假定 $f(x_0)$ 是极大值（极小值的情形可类似地证明）. 根据极大值的定义，在 x_0 的某个去心邻域内，对于任何点 x，$f(x)<f(x_0)$ 均成立. 于是，

当 $x<x_0$ 时

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0,$$

因此 $$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant 0;$$

当 $x>x_0$ 时

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<0,$$

因此 $$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant 0;$$

从而得到 $$f'(x_0)=0.$$

使导数为零的点(即方程 $f'(x)=0$ 的实根)叫做函数 $f(x)$的驻点.定理 1 就是说:可导函数 $f(x)$的极值点必定是它的驻点.但反过来,函数的驻点却不一定是极值点.例如,$f(x)=x^3$ 的导数 $f'(x)=3x^2$,$f'(0)=0$,因此 $x=0$ 是这可导函数的驻点,但 $x=0$ 却不是这函数的极值点.因此,当我们求出了函数的驻点后,还需要判定求得的驻点是不是极值点,如果是的话,还要判定函数在该点究竟取得极大值还是极小值.回想到函数单调性的判定法可以知道,如果在驻点的左侧邻近和右侧邻近函数的导数分别保持一定的符号,那末刚才提出的问题是容易解决的.下面的定理 2 实质上就是利用函数的单调性来判定函数的极值的.

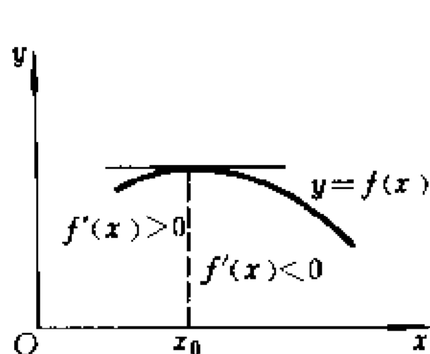
定理 2(第一种充分条件)　设函数 $f(x)$在点 x_0 的一个邻域内可导且 $f'(x_0)=0$.

(1) 如果当 x 取 x_0 左侧邻近的值时,$f'(x)$恒为正;当 x 取 x_0 右侧邻近的值时,$f'(x)$恒为负,那末函数 $f(x)$在 x_0 处取得极大值;

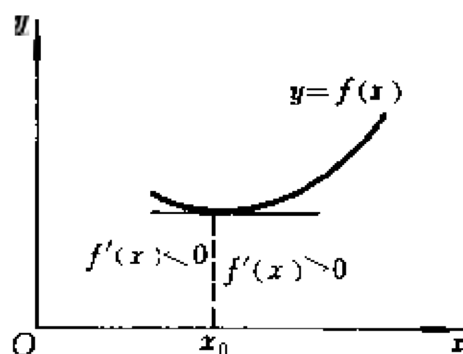
(2) 如果当 x 取 x_0 左侧邻近的值时,$f'(x)$恒为负;当 x 取 x_0 右侧邻近的值时,$f'(x)$恒为正,那末函数 $f(x)$在 x_0 处取得极小值;

(3) 如果当 x 取 x_0 左右两侧邻近的值时,$f'(x)$恒为正或恒为负,那末函数 $f(x)$在 x_0 处没有极值.

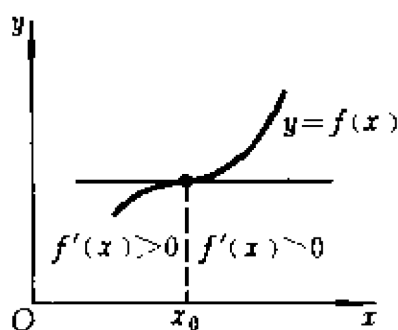
证 事实上，就情形(1)来说，根据函数单调性的判定法，函数 $f(x)$ 在 x_0 的左侧邻近是单调增加的，在 x_0 的右侧邻近是单调减少的，因此 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的一个极大值(图 3－10(a)).



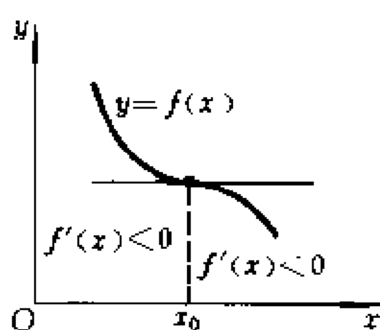
(a)



(b)



(c)



(d)

图 3－10

类似地可论证情形(2)(图 3－10(b))及情形(3)(图 3－10(c)、(d)).

定理 2 也可简单地这样说：当 x 在 x_0 的邻近渐增地经过 x_0 时，如果 $f'(x)$ 的符号由正变负，那末 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值；如果 $f'(x)$ 的符号由负变正，那末 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值；如果 $f'(x)$ 的符号并不改变，那末 $f(x)$ 在 x_0 处没有极值.

根据上面的两个定理，如果函数 $f(x)$ 在所讨论的区间内各点处都具有导数，我们就可以按下列步骤来求 $f(x)$ 的极值点和极值：

(1) 求出导数 $f'(x)$；

(2) 求出 $f(x)$的全部驻点(即求出方程 $f'(x)=0$ 在所讨论的区间内的全部实根)；

(3) 考察 $f'(x)$的符号在每个驻点的左、右邻近的情形，以便确定该驻点是否是极值点，如果是极值点，还要按定理 2 确定对应的函数值是极大值还是极小值；

(4) 求出各极值点处的函数值，就得函数 $f(x)$的全部极值.

例 1 求函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$ 的极值.

解 (1) $f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$.

(2) 令 $3(x+1)(x-3)=0$，求得驻点 $x_1=-1, x_2=3$.

(3) 由 $f'(x)=3(x+1)(x-3)$来确定 $f'(x)$的符号：

当 x 在 -1 的左侧邻近时，$x+1<0, x-3<0$，所以 $f'(x)>0$；

当 x 在 -1 的右侧邻近时，$x+1>0, x-3<0$，所以 $f'(x)<0$；因而，按定理 2，函数 $f(x)$在 $x=-1$ 处取得极大值. 同理，函数在 $x=3$ 处取得极小值.

(4) 算出极大值 $f(-1)=10$，极小值 $f(3)=-22$.

当函数 $f(x)$在驻点处的二阶导数存在且不为零时，也可以利用下列定理来判定 $f(x)$在驻点处取得极大值还是极小值.

定理 3(第二种充分条件) **设函数 $f(x)$在点 x_0 处具有二阶导数且 $f'(x_0)=0, f''(x_0)\neq 0$，那末**

(1) 当 $f''(x_0)<0$ 时，函数 $f(x)$在 x_0 处取得极大值；

(2) 当 $f''(x_0)>0$ 时，函数 $f(x)$在 x_0 处取得极小值.

证 在情形(1)，由于 $f''(x_0)<0$，按二阶导数的定义有

$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}<0.$$

根据函数极限的局部保号性，当 x 在 x_0 的足够小的去心邻域内时，

$$\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}<0.$$

但 $f'(x_0)=0$，所以上式即

$$\frac{f'(x)}{x-x_0}<0.$$

从而知道，对于这去心邻域内的 x 来说，$f'(x)$ 与 $x-x_0$ 符号相反. 因此，当 $x-x_0<0$ 即 $x<x_0$ 时，$f'(x)>0$；当 $x-x_0>0$ 即 $x>x_0$ 时，$f'(x)<0$. 于是根据定理 2 知道，$f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值.

类似地可以证明情形(2).

定理 3 表明，如果函数 $f(x)$ 在驻点 x_0 处的二阶导数 $f''(x_0)\neq 0$，那末该驻点 x_0 一定是极值点，并且可以按二阶导数 $f''(x_0)$ 的符号来判定 $f(x_0)$ 是极大值还是极小值. 但如果 $f''(x_0)=0$，定理 3 就不能应用. 事实上，当 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)=0$ 时，$f(x)$ 在 x_0 处可能有极大值，也可能有极小值，也可能没有极值. 例如，$f_1(x)=-x^4$，$f_2(x)=x^4$，$f_3(x)=x^3$ 这三个函数在 $x=0$ 处就分别属于这三种情况. 因此，如果函数在驻点处的二阶导数为零，那末还得用一阶导数在驻点左右邻近的符号来判别.

例 2 求函数 $f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的极值.

解 (1) $f'(x)=6x(x^2-1)^2$.

(2) 令 $f'(x)=0$，求得驻点 $x_1=-1$，$x_2=0$，$x_3=1$.

(3) $f''(x)=6(x^2-1)(5x^2-1)$.

(4) 因 $f''(0)=6>0$，$f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值，极小值为 $f(0)=0$.

(5) 因 $f''(-1)=f''(1)=0$，用定理 3 无法判别. 考察一阶导数 $f'(x)$ 在驻点 $x_1=-1$ 及 $x_3=1$ 左右邻近的符号：

当 x 取 -1 左侧邻近的值时，$f'(x)<0$；当 x 取 -1 右侧邻近的值时，$f'(x)<0$；因为 $f'(x)$ 的符号没有改变，所以 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处没有极值. 同理，$f(x)$ 在 $x=1$ 处也没有极值(图 3－11).

以上讨论函数的极值时，假定函数在所讨论的区间内可导. 在此条件下，由定理 1 知道，函数的极值点一定是驻点，因此求出全部驻点后，再逐一考察各个驻点是否为极值点就行了. 但如果函数

在个别点处不可导，那末上述条件就不满足，这时便不能肯定极值点一定是驻点了. 事实上，在导数不存在的点处，函数也可能取得极值，下面的例 3 便是这样的例子.

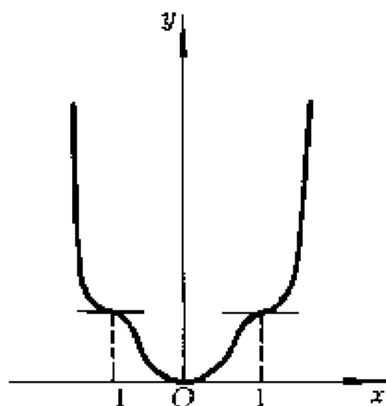


图 3—11

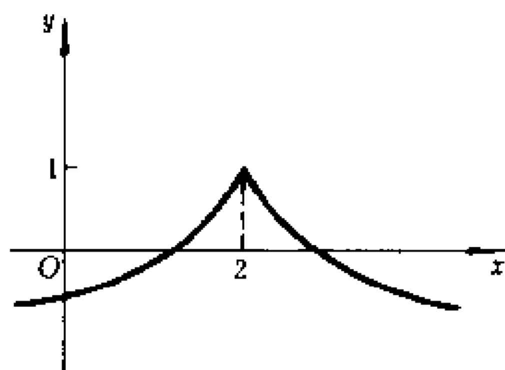


图 3—12

例 3 求函数 $f(x)=1-(x-2)^{2/3}$的极值.

解 当 $x\neq 2$ 时，

$$f'(x)=-\frac{2}{3\sqrt[3]{x-2}};$$

当 $x=2$ 时，$f'(x)$不存在.

当 $x\neq 2$ 时，即在$(-\infty,2)$和$(2,+\infty)$内的各点处，$f'(x)$都存在，且 $f'(x)\neq 0$. 根据定理 1，$f(x)$在这两个区间内没有极值点. 事实上，在$(-\infty,2)$内，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$单调增加；在$(2,+\infty)$内，$f'(x)<0$，函数单调减少.

当 $x=2$ 时，$f'(x)$不存在，但函数 $f(x)$在该点连续，再由上面得到的函数的单调性，可知 $f(2)=1$ 是函数 $f(x)$的极大值. 函数的图形如图 3 12 所示.

习　题　3—5

1. 求下列函数的极值：

(1) $y=x^2-2x+3$;　　(2) $y=2x^3-3x^2$;

(3) $y=2x^3-6x^2-18x+7$;　　(4) $y-x-\ln(1+x)$;

(5) $y=-x^4+2x^2$；　　(6) $y=x+\sqrt{1-x}$；

(7) $y=\dfrac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$；　　(8) $y=\dfrac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$；

(9) $y=e^x\cos x$；　　(10) $y=x^{\frac{1}{x}}$；

(11) $y=2e^x+e^{-x}$；　　(12) $y=2-(x-1)^{\frac{2}{3}}$；

(13) $y=3-2(x+1)^{\frac{1}{3}}$；　　(14) $y=x+\tan x$.

2. 试证明：如果函数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 满足条件 $b^2-3ac<0$，那末这函数没有极值.

3. 试问 a 为何值时，函数 $f(x)=a\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取得极值？它是极大值还是极小值？并求此极值.

第六节　最大值、最小值问题

在工农业生产、工程技术及科学实验中，常常会遇到这样一类问题：在一定条件下，怎样使"产品最多"、"用料最省"、"成本最低"、"效率最高"等问题，这类问题在数学上有时可归结为求某一函数（通常称为目标函数）的最大值或最小值问题.

假定函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且至多在有限个点处导数为零. 在上述条件下，我们来讨论 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值的求法.

首先，由闭区间上连续函数的性质，可知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值一定存在.

其次，如果最大值（或最小值）$f(x_0)$ 在开区间 (a,b) 内的点 x_0 处取得，那末，按 $f(x)$ 在开区间内可导且至多有有限个驻点的假定，可知 $f(x_0)$ 一定也是 $f(x)$ 的极大值（或极小值），从而 x_0 一定是 $f(x)$ 的驻点. 又 $f(x)$ 的最大值和最小值也可能在区间的端点处取得. 因此，可用如下方法求 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值.

设 $f(x)$ 在 (a,b) 内的驻点为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，则比较

$$f(a),f(x_1),\cdots,f(x_n),f(b)$$

的大小，其中最大的便是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值，最小的便是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值.

例 1 求函数 $y=2x^3+3x^2-12x+14$ 在 $[-3,4]$ 上的最大值与最小值.

解

$$f(x)=2x^3+3x^2-12x+14,$$

$$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1).$$

解方程 $f'(x)=0$，得到 $x_1=-2, x_2=1$，由于

$$f(-3)=2(-3)^3+3(-3)^2-12(-3)+14=23;$$

$$f(-2)=2(-2)^3+3(-2)^2-12(-2)+14=34;$$

$$f(1)=2+3-12+14=7;$$

$$f(4)=2\times4^3+3\times4^2-12\times4+14=142.$$

比较可得 $f(x)$ 在 $x=4$ 取得它在 $[-3,4]$ 上的最大值 $f(4)=142$，在 $x=1$ 取得它在 $[-3,4]$ 上的最小值 $f(1)=7$.

例 2 铁路线上 AB 段的距离为 100km. 工厂 C 距 A 处为 20km，AC 垂直于 AB（图 3－13）. 为了运输需要，要在 AB 线上选定一点 D 向工厂修筑一条公路. 已知铁路每公里货运的运费与公路上每公里货运的运费之比为 3∶5. 为了使货物从供应站 B 运到工厂 C 的运费最省，问 D 点应选在何处？



图 3－13

解 设 $AD=x$(km)，那末 $DB=100-x$,

$$CD=\sqrt{20^2+x^2}=\sqrt{400+x^2}.$$

由于铁路上每公里货运的运费与公路上每公里货运的运费之比为 3∶5，因此我们不妨设铁路上每公里的运费为 $3k$，公路上每

公里的运费为 $5k$（k 为某个正数，因它与本题的解无关，所以不必定出）. 设从 B 点到 C 点需要的总运费为 y，那末

$$y=5k\cdot CD+3k\cdot DB,$$

即 $$y=5k\sqrt{400+x^2}+3k(100-x)\quad(0\leqslant x\leqslant 100).$$

现在，问题就归结为：x 在 $[0,100]$ 内取何值时目标函数 y 的值最小.

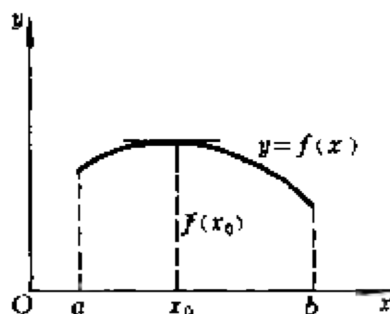
先求 y 对 x 的导数：

$$y'=k\left(\frac{5x}{\sqrt{400+x^2}}-3\right).$$

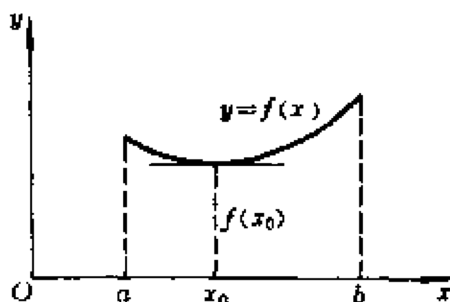
解方程 $y'=0$，得 $x=15(\mathrm{km})$.

由于 $y|_{x=0}=400k$，$y|_{x=15}=380k$，$y|_{x=100}=500k\sqrt{1+\frac{1}{5^2}}$，其中以 $y|_{x=15}=380k$ 为最小，因此，当 $AD=x=15\mathrm{km}$ 时，总运费为最省.

在求函数的最大值（或最小值）时，特别值得指出的是下述情形：$f(x)$ 在一个区间（有限或无限，开或闭）内可导且只有一个驻点 x_0，并且这个驻点 x_0 是函数 $f(x)$ 的极值点，那末，当 $f(x_0)$ 是极大值时，$f(x_0)$ 就是 $f(x)$ 在该区间上的最大值（图 3－14(a)）；当 $f(x_0)$ 是极小值时，$f(x_0)$ 就是 $f(x)$ 在该区间上的最小值（图 3－14(b)）. 在应用问题中往往遇着这样的情形.



(a)



(b)

图 3－14

还要指出，实际问题中，往往根据问题的性质就可以断定可导函数 $f(x)$ 确有最大值或最小值，而且一定在定义区间内部取得. 这时如果 $f(x)$ 在定义区间内部只有一个驻点 x_0，那末不必讨论 $f(x_0)$ 是不是极值，就可以断定 $f(x_0)$ 是最大值或最小值.

例 3 把一根直径为 d 的圆木锯成截面为矩形的梁(图 3—15). 问矩形截面的高 h 和宽 b 应如何选择才能使梁的抗弯截面模量最大?

解 由力学分析知道：矩形梁的抗弯截面模量为

$$W=\frac{1}{6}bh^2.$$

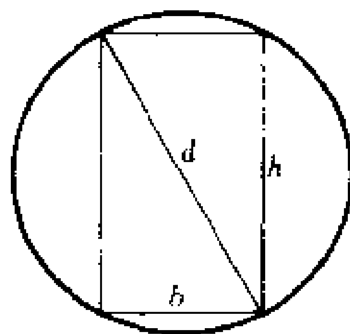


图 3—15

由图 3—15 看出，b 与 h 有下面的关系：

$$h^2=d^2-b^2,$$

因而

$$W=\frac{1}{6}(d^2b-b^3).$$

这样，W 就是自变量 b 的函数，b 的变化范围是 $(0,d)$. 现在，问题化为：b 等于多少时目标函数 W 取最大值? 为此，求 W 对 b 的导数：

$$W'=\frac{1}{6}(d^2-3b^2).$$

解方程，令 $W'=0$，得

$$b=\sqrt{\frac{1}{3}}d.$$

由于梁的最大抗弯截面模量一定存在，而且在 $(0,d)$ 内部取得；现在，$W'=0$ 在 $(0,d)$ 内只有一个根 $b=\sqrt{\frac{1}{3}}d$，所以，当 $b=\sqrt{\frac{1}{3}}d$ 时，W 的值最大. 这时，

$$h^2=d^2-b^2=d^2-\frac{1}{3}d^2=\frac{2}{3}d^2,$$

即

$$h=\sqrt{\frac{2}{3}}d.$$

$$d:h:b=\sqrt{3}:\sqrt{2}:1.$$

习 题 3—6

1. 求下列函数的最大值、最小值：

(1) $y=2x^3-3x^2$, $-1\leqslant x\leqslant 4$;

(2) $y=x^4-8x^2+2$, $-1\leqslant x\leqslant 3$;

(3) $y=x+\sqrt{1-x}$, $-5\leqslant x\leqslant 1$.

2. 设 $y=x^2-2x-1$. 问 x 等于多少时，y 的值最小？并求出它的最小值.

3. 设 $y=2x-5x^2$. 问 x 等于多少时，y 的值最大？并求出它的最大值.

4. 问函数 $y=2x^3-6x^2-18x-7(1\leqslant x\leqslant 4)$ 在何处取得最大值？并求出它的最大值.

5. 问函数 $y=x^2-\frac{54}{x}(x<0)$ 在何处取得最小值？

6. 问函数 $y=\frac{x}{x^2+1}(x\geqslant 0)$ 在何处取得最大值？

7. 某车间靠墙壁要盖一间长方形小屋，现有存砖只够砌 20m 长的墙壁. 问应围成怎样的长方形才能使这间小屋的面积最大？

8. 要造一圆柱形油罐，体积为 V，问底半径 r 和高 h 等于多少时，才能使表面积最小？这时底直径与高的比是多少？

9. 某地区防空洞的截面拟建成矩形加半圆(图 3—16). 截面的面积为 5m². 问底宽 x 为多少时才能使截面的周长最小，从而使建造时所用的材料最省？

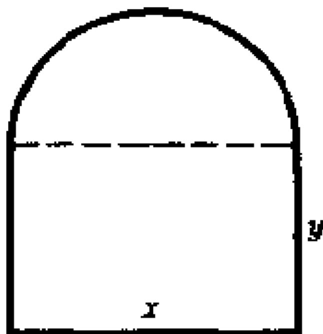


图 3—16

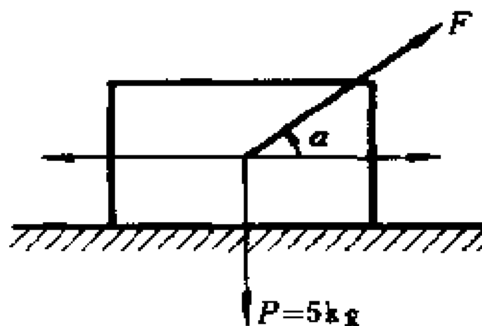


图 3—17

10. 设有重量为 5kg 的物体，置于水平面上，受力 F 的作用而开始移动(图 3—17). 设摩擦系数 $\mu=0.25$，问力 F 与水平线的交角 α 为多少时，才可使力

F 的大小为最小.

11. 有一杠杆，支点在它的一端. 在距支点 0.1m 处挂一重量为 49kg 的物体. 加力于杠杆的另一端使杠杆保持水平(图 3－18). 如果杠杆每 m 的重量为 5kg，求最省力的杆长?

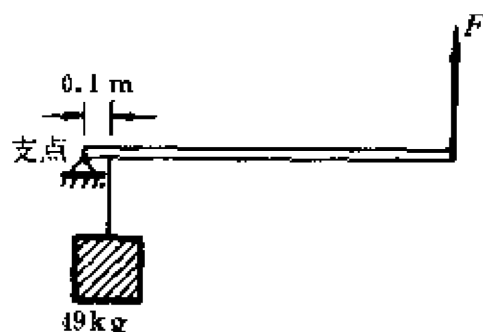


图 3－18

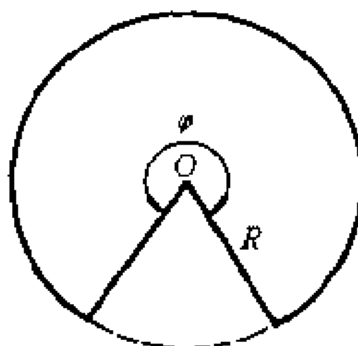
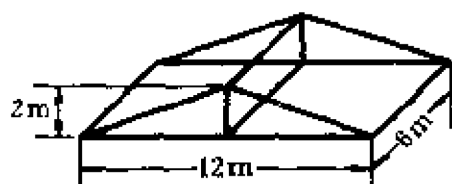


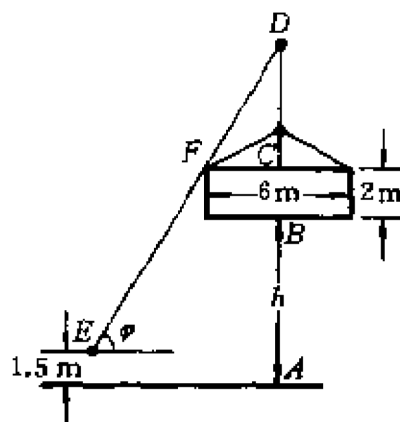
图 3－19

12. 从一块半径为 R 的圆铁片上挖去一个扇形做成一个漏斗(图 3－19). 问留下的扇形的中心角 φ 取多大时，做成的漏斗的容积最大?

13. 某吊车的车身高为 1.5m，吊臂长 15m. 现在要把一个 6m 宽、2m 高的屋架，水平地吊到 6m 高的柱子上去(图 3－20)，问能否吊得上去?



(a)



(b)

图 3－20

第七节　曲线的凹凸与拐点

在第四节及第五节里，我们研究了函数的单调性与极值，这对于描绘函数的图形有很大的作用. 但是，仅仅知道这些，还不能比

较准确地描绘函数的图形. 例如，图3—21中有两条曲线弧，虽然它们都是上升的，但图形却有显著的不同，$\overset{\frown}{ACB}$是向上凸的曲线弧，而$\overset{\frown}{ADB}$是向上凹的曲线弧，它们的凹凸性不同，下面我们就来研究曲线的凹凸性及其判别法.

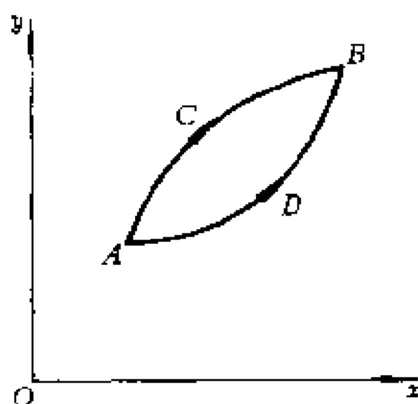


图 3—21

我们从几何上看到，在有的曲线弧上，如果任取两点，则联接这两点

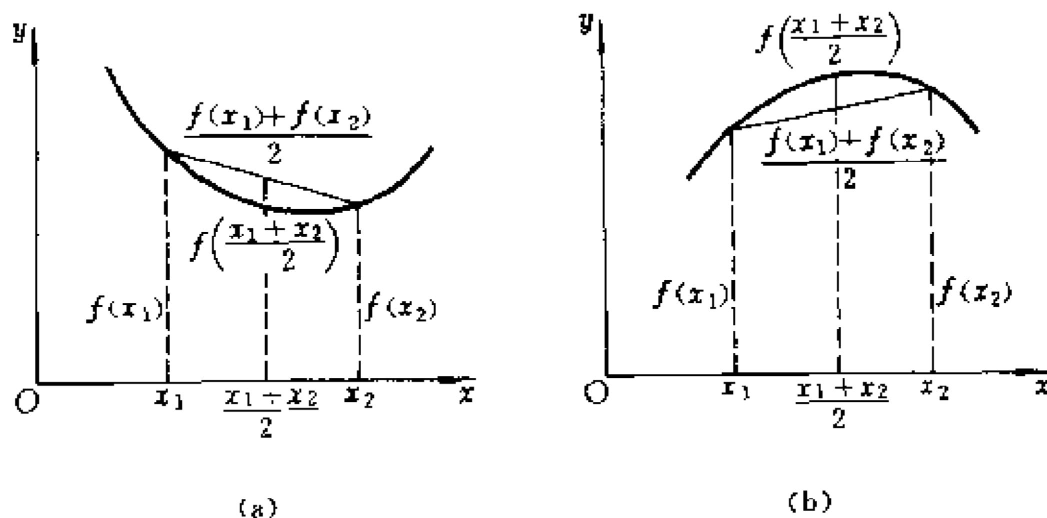


图 3—22

间的弦总位于这两点间的弧段的上方(图 3—22(a))，而有的曲线弧，则正好相反(图 3—22(b)). 曲线的这种性质就是曲线的凹凸性. 因此曲线的凹凸性可以用联接曲线弧上任意两点的弦的中点与曲线弧上相应点(即具有相同横坐标的点)的位置关系来描述. 下面给出曲线凹凸性的定义.

定义 **设 $f(x)$ 在区间 I 上连续，如果对 I 上任意两点 x_1, x_2，恒有**

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

那末称 $f(x)$ 在 I 上的图形是(向上)凹的(或凹弧)；如果恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

那末称 $f(x)$ 在 I 上的图形是(向上)凸的(或凸弧).

如果函数 $f(x)$ 在 I 内具有二阶导数，那末可以利用二阶导数的符号来判定曲线的凹凸性，这就是下面的曲线凹凸性的判定定理. 我们仅就 I 为闭区间的情形来叙述定理，当 I 不是闭区间时，定理类同.

定理 **设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有一阶和二阶导数，那末**

(1) 若在 (a,b) 内 $f''(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凹的;

(2) 若在 (a,b) 内 $f''(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凸的.

证明 在情形(1)，设 x_1 和 x_2 为 $[a,b]$ 内任意两点，且 $x_1<x_2$，记 $\frac{x_1+x_2}{2}=x_0$，并记 $x_2-x_0=x_0-x_1=h$，则 $x_1=x_0-h$，$x_2=x_0+h$，由拉格朗日中值公式，得

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0+\theta_1 h)h,$$
$$f(x_0)-f(x_0-h)=f'(x_0-\theta_2 h)h,$$

其中 $0<\theta_1<1$，$0<\theta_2<1$. 两式相减，即得

$$f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)=[f'(x_0+\theta_1 h)-f'(x_0-\theta_2 h)]h.$$

对 $f'(x)$ 在区间 $[x_0-\theta_2 h, x_0+\theta_1 h]$ 上再利用拉格朗日中值公式，得

$$[f'(x_0+\theta_1 h)-f'(x_0-\theta_2 h)]h=f''(\xi)(\theta_1+\theta_2)h^2,$$

其中 $x_0-\theta_2 h<\xi<x_0+\theta_1 h$. 按情形(1)的假设，$f''(\xi)>0$，故有

$$f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)>0,$$

即
$$\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)}{2}>f(x_0),$$

亦即
$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right),$$

所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凹的.

类似地可证明情形(2).

例 1 判断曲线 $y=\ln x$ 的凹凸性.

解 因为 $y'=\dfrac{1}{x}, y''=-\dfrac{1}{x^2}$. 所以在函数 $y=\ln x$ 的定义域 $(0,+\infty)$ 内, $y''<0$, 由曲线凹凸性的判定定理可知, 曲线 $y=\ln x$ 是凸的.

例 2 判断曲线 $y=x^3$ 的凹凸性.

解 因为 $y'=3x^2$, $y''=6x$, 当 $x<0$ 时, $y''<0$, 所以曲线在 $(-\infty,0]$ 内为凸弧; 当 $x>0$ 时, $y''>0$, 所以曲线在 $[0,+\infty)$ 内为凹弧(参看图 3—8).

本例中, 点 $(0,0)$ 是曲线由凸变凹的分界点, 称为曲线的拐点. 一般地, 连续曲线 $y=f(x)$ 上凹弧与凸弧的分界点称为这曲线的拐点.

如何来寻找曲线 $y=f(x)$ 的拐点呢?

前已知道, 由 $f''(x)$ 的符号可以判定曲线的凹凸性. 如果 $f''(x_0)=0$, 而 $f''(x)$ 在 x_0 的左右两侧邻近异号, 那末点 $(x_0, f(x_0))$ 就是一个拐点. 因此, 如果 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内具有二阶导数, 我们就可以按下列步骤来判定曲线 $y=f(x)$ 的拐点:

(1) 求 $f''(x)$;

(2) 令 $f''(x)=0$, 解出这方程在区间 (a,b) 内的实根;

(3) 对于(2)中解出的每一个实根 x_0, 检查 $f''(x)$ 在 x_0 左、右两侧邻近的符号, 如果 $f''(x)$ 在 x_0 的左、右两侧邻近分别保持一定的符号, 那末当两侧的符号相反时, 点 $(x_0, f(x_0))$ 是拐点. 当两侧的符号相同时, 点 $(x_0, f(x_0))$ 不是拐点.

例 3 求曲线 $y=2x^3+3x^2-12x+14$ 的拐点.

解 $y'=6x^2+6x-12, y''=12x+6=12\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$.

解方程 $y''=0$, 得 $x=-\dfrac{1}{2}$. 当 $x<-\dfrac{1}{2}$ 时, $y''<0$; 当 $x>-\dfrac{1}{2}$ 时, y''

>0. 因此，点$\left(-\frac{1}{2}, 20\frac{1}{2}\right)$是这曲线的拐点.

例 4 求曲线 $y=3x^4-4x^3+1$ 的拐点及凹、凸的区间.

解 函数 $y=3x^4-4x^3+1$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

$$y'-12x^3-12x^2,$$

$$y''=36x^2-24x=36x\left(x-\frac{2}{3}\right).$$

解方程 $y''=0$，得 $x_1=0, x_2=\frac{2}{3}$.

$x_1=0$ 及 $x_2=\frac{2}{3}$把函数的定义域$(-\infty,+\infty)$分成三个部分区间：$(-\infty,0]$、$\left[0,\frac{2}{3}\right]$、$\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$.

在$(-\infty,0)$内，$y''>0$，因此在区间$(-\infty,0]$上这曲线是凹的. 在$\left(0,\frac{2}{3}\right)$内，$y''<0$，因此在区间$\left[0,\frac{2}{3}\right]$上这曲线是凸的. 在$\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$内，$y''>0$，因此在区间$\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$上这曲线是凹的.

$x=0$ 时，$y=1$，点$(0,1)$是这曲线的一个拐点. $x=\frac{2}{3}$时 $y=\frac{11}{27}$，点$\left(\frac{2}{3},\frac{11}{27}\right)$也是这曲线的拐点.

例 5 问曲线 $y=x^4$ 是否有拐点？

解 $y'=4x^3, y''=12x^2$.

显然，只有 $x=0$ 是方程 $y''=0$ 的根. 但当 $x\neq 0$ 时，无论 $x<0$ 或 $x>0$ 都有 $y''>0$，因此点$(0,0)$不是这曲线的拐点. 曲线 $y=x^4$ 没有拐点，它在$(-\infty,+\infty)$内是凹的.

例 6 求曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 的拐点.

解 这函数在$(-\infty,+\infty)$内连续，当 $x\neq 0$ 时

$$y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, y''=-\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}},$$

当 $x-0$ 时，y', y''都不存在. 故二阶导数在$(-\infty,+\infty)$内不连续且不具有零点. 但 $x=0$ 是 y''不存在的点，它把$(-\infty,+\infty)$分成

两个部分区间：$(-\infty,0]$、$[0,+\infty)$.

在$(-\infty,0)$内，$y''>0$，这曲线在$(-\infty,0]$上是凹的．在$(0,+\infty)$内，$y''<0$，这曲线在$[0,+\infty)$上是凸的．

$x=0$时，$y=0$，点$(0,0)$是这曲线的一个拐点．

习　题　3—7

1．判定下列曲线的凹凸性：

(1) $y=4x-x^2$；　　(2) $y=\operatorname{sh} x$；

(3) $y=x+\frac{1}{x}\quad(x>0)$；　　(4) $y=x\arctan x$.

2．求下列函数图形的拐点及凹或凸的区间：

(1) $y=x^3-5x^2+3x+5$；　　(2) $y=xe^{-x}$；

(3) $y=(x+1)^4+e^x$；　　(4) $y=\ln(x^2+1)$；

(5) $y=e^{\arctan x}$；　　(6) $y=x^4(12\ln x-7)$.

3．利用函数图形的凹凸性，证明下列不等式：

(1) $\frac{1}{2}(x^n+y^n)>\left(\frac{x+y}{2}\right)^n\quad(x>0,y>0,x\neq y,n>1)$；

(2) $\frac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}}\quad(x\neq y)$；

(3) $x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}\quad(x>0,y>0,x\neq y)$.

4．求下列曲线的拐点：

(1) $x=t^2,y=3t+t^3$；

(2) $x=2a\cot\theta,y=2a\sin^2\theta$.

5．试证明曲线$y=\frac{x-1}{x^2+1}$有三个拐点位于同一直线上．

6．问a、b为何值时，点$(1,3)$为曲线$y=ax^3+bx^2$的拐点？

7．试决定曲线$y=ax^3+bx^2+cx+d$中的a、b、c、d，使得点$(-2,44)$为驻点，$(1,-10)$为拐点．

8．试决定$y=k(x^2-3)^2$中k的值，使曲线的拐点处的法线通过原点．

9．设$y=f(x)$在$x=x_0$的某邻域内具有三阶连续导数，如果$f'(x_0)=0$，$f''(x_0)=0$，而$f'''(x_0)\neq0$，试问$x=x_0$是否为极值点？为什么？又$(x_0,f(x_0))$是否为拐点？为什么？

第八节　函数图形的描绘

借助于一阶导数的符号，可以确定函数图形在哪个区间上上升，在哪个区间上下降，在什么地方有极值点；借助于二阶导数的符号，可以确定函数图形在哪个区间上为凹，在哪个区间上为凸，在什么地方有拐点．知道了函数图形的升降、凹凸以及极值点和拐点后，也就可以掌握函数的性态，并把函数的图形画得比较准确．

利用导数描绘函数图形的一般步骤如下：

第一步　确定函数 $y=f(x)$ 的定义域，并求出函数的一阶导数 $f'(x)$ 和二阶导数 $f''(x)$；

第二步　求出方程 $f'(x)=0$ 和 $f''(x)=0$ 在函数定义域内的全部实根，用这些根把函数的定义域划分成几个部分区间①；

第三步　确定在这些部分区间内 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的符号，并由此确定函数图形的升降和凹凸，极值点和拐点；

第四步　确定函数图形的水平、铅直渐近线以及其他变化趋势；

第五步　算出方程 $f'(x)=0$ 和 $f''(x)=0$ 的根所对应的函数值，定出图形上相应的点；为了把图形描得准确些，有时还需要补充一些点；然后结合第三、四步中得到的结果，联结这些点画出函数 $y=f(x)$ 的图形．

例 1　画出函数 $y=x^3-x^2-x+1$ 的图形．

解　(1) 所给函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，而

$$f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1),$$

$$f''(x)=6x-2=2(3x-1).$$

(2) $f'(x)=0$ 的根为 $x=-\frac{1}{3}$ 和 1；$f''(x)=0$ 的根为 $x=\frac{1}{3}$．将点 $x=-\frac{1}{3},\frac{1}{3},1$ 由小到大排列，依次把定义域 $(-\infty,+\infty)$ 划

① 如果函数有间断点或导数不存在的点，这些点也要作为分点．

分成下列四个部分区间：

$$\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right],\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right],\left[\frac{1}{3},1\right],[1,+\infty).$$

(3) 在 $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$ 内，$f'(x)>0$，$f''(x)<0$，所以在 $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right]$ 上的曲线弧上升而且是凸的.

在 $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ 内，$f'(x)<0$，$f''(x)<0$，所以在 $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$ 上的曲线弧下降而且是凸的.

同样，可以讨论在区间 $\left[\frac{1}{3},1\right]$ 上及在区间 $[1,+\infty)$ 上相应的曲线弧的升降和凹凸. 为了明确起见，我们把所得的结论列成下表：

x	$\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$	$-\frac{1}{3}$	$\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3},1\right)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	−	−	0	+
$f''(x)$	−	−	−	0	+	+	+
$y=f(x)$ 的图形	↗	极大	↘	拐点	↘	极小	↗

这里记号↗表示曲线弧上升而且是凸的，↘表示曲线弧下降而且是凸的，↘表示曲线弧下降而且是凹的，↗表示曲线弧上升而且是凹的.

(4) 当 $x\to+\infty$ 时，$y\to+\infty$；当 $x\to-\infty$ 时，$y\to-\infty$；

(5) 算出 $x=-\frac{1}{3},\frac{1}{3},1$ 处的函数值：

$$f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{32}{27},f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{16}{27},f(1)=0.$$

从而得到函数 $y=x^3-x^2-x+1$ 图形上的三个点：

$$\left(-\frac{1}{3},\frac{32}{27}\right),\left(\frac{1}{3},\frac{16}{27}\right),(1,0).$$

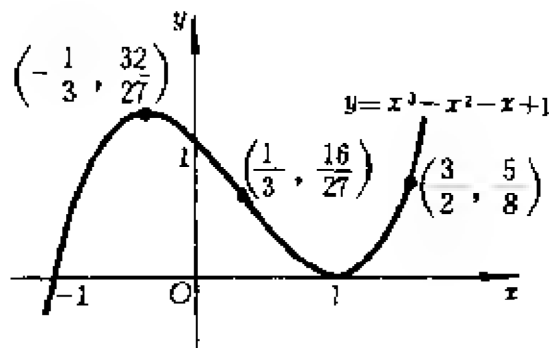


图 3—23

适当补充一些点.例如,计算出

$$f(-1)=0,f(0)=1,f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{8},$$

就可补充描出点$(-1,0)$,点$(0,1)$和点$\left(\frac{3}{2},\frac{5}{8}\right)$.结合(3)、(4)中得到的结果,就可以画出

$$y=x^3-x^2-x+1$$

的图形(图 3—23).

如果所讨论的函数是奇函数或偶函数,那末,描绘函数图形时可以利用函数图形的对称性.

例 2 描绘函数 $y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$的图形.

解 (1) 所给函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

由于

$$f(-x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(-x)^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=f(x),$$

所以 $f(x)$是偶函数,它的图形关于 y 轴对称.因此可以只讨论$[0,+\infty)$上该函数的图形.求出

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot(-x)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}xe^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$f''(x)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{-\frac{x^2}{2}}+xe^{-\frac{x^2}{2}}\cdot(-x)\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1).$$

(2) 在$[0,+\infty)$上，方程 $f'(x)=0$ 的根为 $x=0$；方程 $f''(x)=0$ 的根为 $x=1$. 用点 $x=1$ 把$[0,+\infty)$划分成两个区间$[0,1]$和$[1,+\infty)$.

(3) 在$(0,1)$内，$f'(x)<0$，$f''(x)<0$，所以在$[0,1]$上的曲线弧下降而且是凸的. 结合 $f'(0)=0$ 以及图形关于 y 轴对称可知，$x=0$ 处函数 $f(x)$ 有极大值.

在$(1,+\infty)$内，$f'(x)<0$，$f''(x)>0$，所以在$[1,+\infty)$上的曲线弧下降而且是凹的.

上述的这些结果，可以列成下表：

x	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$y=f(x)$的图形	极大	[illegible]	拐点	[illegible]

(4) 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，所以图形有一条水平渐近线 $y=0$.

(5) 算出 $f(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$，$f(1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$. 从而得到函数

$$y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

图形上的两点 $M_1\left(0,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$ 和 $M_2\left(1,\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right)$. 又由 $f(2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}e^2}$

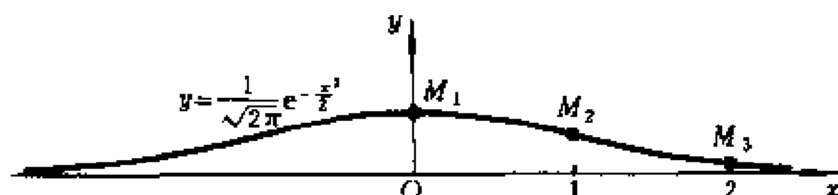


图 3—24

得 $M_3\left(2, \frac{1}{\sqrt{2\pi e^2}}\right)$. 结合(3)、(4)的讨论，画出函数 $y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 在 $[0,+\infty)$ 上的图形. 最后，利用图形的对称性，便可得到函数在 $(-\infty,0]$ 上的图形(图 3－24).

例 3 描绘函数 $y=1+\frac{36x}{(x+3)^2}$ 的图形.

解 (1) 所给函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-3)$，$(-3,+\infty)$.

$$f'(x)=\frac{36(3-x)}{(x+3)^3};f''(x)=\frac{72(x-6)}{(x+3)^4}.$$

(2) $f'(x)=0$ 的根为 $x=3$；$f''(x)=0$ 的根为 $x=6$. 点 $x=-3$、$x=3$ 和 $x=6$ 把定义域划分成四个部分区间：

$$(-\infty,-3),(-3,3],[3,6],[6,+\infty).$$

(3) 在各部分区间内 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 的符号、相应曲线弧的升降及凹凸，以及极值点和拐点等如下表：

x	$(-\infty,-3)$	$(-3,3)$	3	$(3,6)$	6	$(6,+\infty)$
$f'(x)$	－	＋	0	－	－	－
$f''(x)$	－	－	－	－	0	＋
$y=f(x)$ 的图形	↘	↗	极大	↘	拐点	↘

(4) 由于 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to-3}f(x)=-\infty$，所以图形有一条水平渐近线 $y=1$ 和一条铅直渐近线 $x=-3$.

(5) 算出 $x=3,6$ 处的函数值：

$$f(3)=4,f(6)=\frac{11}{3},$$

从而得到图形上的两个点：

$$M_1(3,4),\quad M_2\left(6,\frac{11}{3}\right).$$

又由于

$$f(0)=1,f(-1)=-8,f(-9)=-8,$$

$$f(-15)=-\frac{11}{4},$$

得图形上的四个点：

$$M_3(0,1)\qquad M_4(-1,-8),$$

$$M_5(-9,-8),\qquad M_6\left(-15,-\frac{11}{4}\right).$$

函数 $y=1+\frac{36x}{(x+3)^2}$的图形如图 3－25 所示．

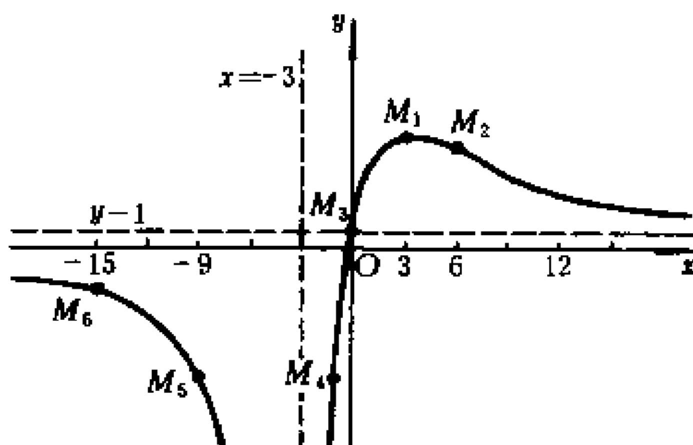


图 3－25

习 题 3－8

描绘下列函数的图形：

1．$y=\frac{1}{5}(x^4-6x^2+8x+7)$；

2．$y=\frac{x}{1+x^2}$；

3．$y=e^{-(x-1)^2}$；

4．$y=x^2+\frac{1}{x}$；

5．$y=\frac{\cos x}{\cos 2x}$．

第九节　曲　　率

一、弧微分

作为曲率的预备知识，先介绍弧微分的概念.

设函数 $f(x)$在区间(a,b)内具有连续导数. 在曲线 $y=f(x)$上取固定点 $M_0(x_0,y_0)$作为度量弧长的基点(图 3－26)，并规定依 x 增大的方向作为曲线的正向. 对曲线上任一点 $M(x,y)$，规定有向弧段$\overset{\frown}{M_0M}$的值 s(简称为弧 s)①如下：s 的绝对值等于这弧段的长度，当有向弧段$\overset{\frown}{M_0M}$的方向与曲线的正向一致时 $s>0$，相反时 $s<0$. 显然，弧 $s=\overset{\frown}{M_0M}$是 x 的函数：$s=s(x)$，而且 $s(x)$是 x 的单调增加函数. 下面来求 $s(x)$的导数及微分.

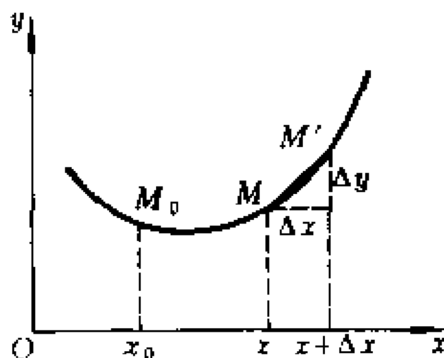


图　3－26

设 $x,x+\Delta x$ 为(a,b)内两个邻近的点，它们在曲线 $y=f(x)$上的对应点为 M,M'(图 3－26)，并设对应于 x 的增量 Δx，弧 s 的增量为 Δs，那末

$$\Delta s=\overset{\frown}{M_0M'}-\overset{\frown}{M_0M}=\overset{\frown}{MM'}.$$

① 有向弧段$\overset{\frown}{M_0M}$的值也常记作$\overset{\frown}{M_0M}$，即记号$\overset{\frown}{M_0M}$既表示有向弧段，又表示有向弧段的值.

于是 $$\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2=\left(\frac{\widehat{MM'}}{\Delta x}\right)^2=\left(\frac{\widehat{MM'}}{|MM'|}\right)^2\cdot\frac{|MM'|^2}{(\Delta x)^2}$$

$$=\left(\frac{\widehat{MM'}}{|MM'|}\right)^2\cdot\frac{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}$$

$$=\left(\frac{\widehat{MM'}}{|MM'|}\right)^2\left[1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right],$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta x}=\pm\sqrt{\left(\frac{\widehat{MM'}}{|MM'|}\right)^2\cdot\left[1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right]}.$$

令 $\Delta x\to 0$ 取极限，由于 $\Delta x\to 0$ 时，$M'\to M$，这时弧的长度与弦的长度之比的极限等于 1，即

$$\lim_{M'\to M}\frac{|\widehat{MM'}|}{|MM'|}=1,$$

又 $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y',$$

因此得 $$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}=\pm\sqrt{1+y'^2}.$$

由于 $s=s(x)$ 是单调增加函数，从而根号前应取正号，于是有

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

这就是弧微分公式.

二、曲率及其计算公式

我们直觉地认识到：直线不弯曲，半径较小的圆弯曲得比半径较大的圆厉害些，而其他曲线的不同部分有不同的弯曲程度，例如抛物线 $y=x^2$ 在顶点附近弯曲得比远离顶点的部分厉害些.

在工程技术中，有时需要研究曲线的弯曲程度. 例如，船体结构中的钢梁，机床的转轴等，它们在荷载作用下要产生弯曲变形，在设计时对它们的弯曲必须有一定的限制，这就要定量地研究它们的弯曲程度. 为此首先要讨论如何用数量来描述曲线的弯曲程度.

在图 3－27 中可以看出，弧段$\overset{\frown}{M_1M_2}$比较平直，当动点沿这段弧从 M_1 移动到 M_2 时，切线转过的角度 φ_1 不大，而弧段$\overset{\frown}{M_2M_3}$弯曲得比较厉害，角 φ_2 就比较大.

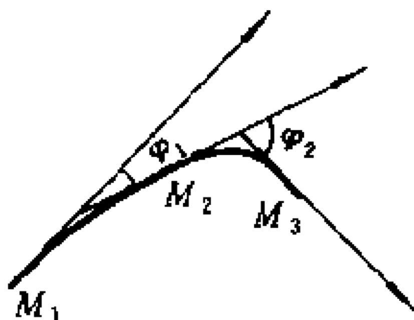


图 3－27

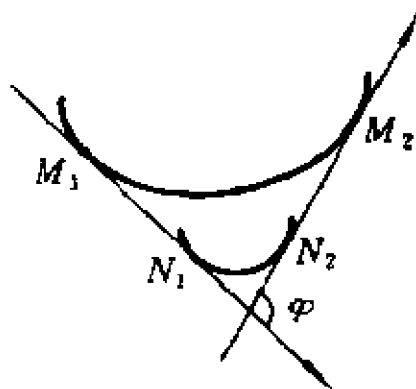


图 3－28

但是，切线转过的角度的大小还不能完全反映曲线弯曲的程度. 例如，从图 3－28 中可以看出，两段曲线弧$\overset{\frown}{M_1M_2}$及$\overset{\frown}{N_1N_2}$尽管切线转过的角度都是 φ，然而弯曲程度并不相同，短弧段比长弧段弯曲得厉害些. 由此可见，曲线弧的弯曲程度还与弧段的长度有关.

按上面的分析，我们引入描述曲线弯曲程度的曲率概念如下.

设曲线 C 是光滑的[①]，在曲线 C 上选定一点 M_0 作为度量弧 s 的基点. 设曲线上点 M 对应于弧 s，在点 M 处切线的倾角为 α（这里假定曲线 C 所在的平面上已设立了 xOy 坐标系），曲线上另外一点 M' 对应于弧 $s+\Delta s$，在点 M' 处切线的倾角为 $\alpha+\Delta\alpha$（图 3－29），那末，弧段$\overset{\frown}{MM'}$的长度为 $|\Delta s|$，当动点从 M 移动到 M' 时切线转过的角度为 $|\Delta\alpha|$.

---

① 当曲线上每一点处都具有切线，且切线随切点的移动而连续转动，这样的曲线称为光滑曲线.

我们用比值$\frac{|\Delta\alpha|}{|\Delta s|}$，即单位弧段上切线转过的角度的大小来表达弧段$\overset{\frown}{MM'}$的平均弯曲程度，把这比值叫做弧段$\overset{\frown}{MM'}$的平均曲率，并记作$\overline{K}$，即

$$\overline{K}=\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|.$$

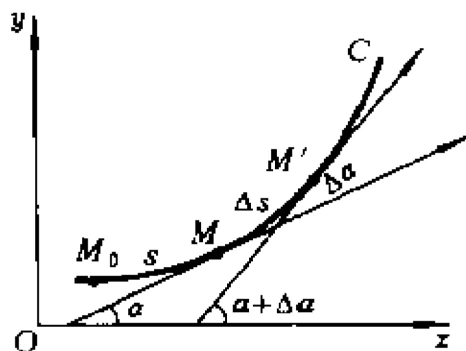


图 3-29

类似于从平均速度引进瞬时速度的方法，当$\Delta s\to 0$时（即$M'\to M$时），上述平均曲率的极限叫做曲线C在点M处的曲率，记作K，即

$$K=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|.$$

在$\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}=\frac{d\alpha}{ds}$存在的条件下，$K$也可以表示为

$$K=\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|. \tag{2}$$

对于直线来说，切线与直线本身重合，当点沿直线移动时，切线的倾角α不变（图 3-30），$\Delta\alpha=0$，$\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}=0$，从而$K=\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|=0$. 这就是说，直线上任意点$M$处的曲率都等于零，这与我们直觉认识到的“直线不弯曲”一致.

设圆的半径为a. 由图 3-31 可见在点M、M'处圆的切线所夹的角$\Delta\alpha$等于中心角MDM'. 但$\angle MDM'=\frac{\Delta s}{a}$，于是

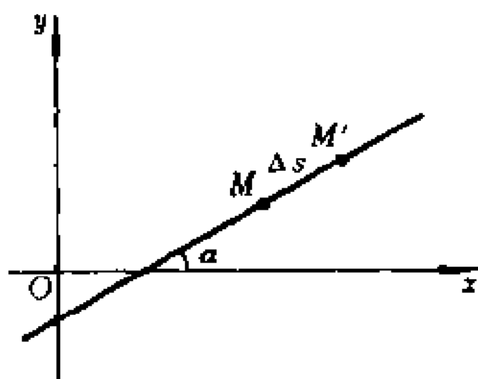


图 3—30

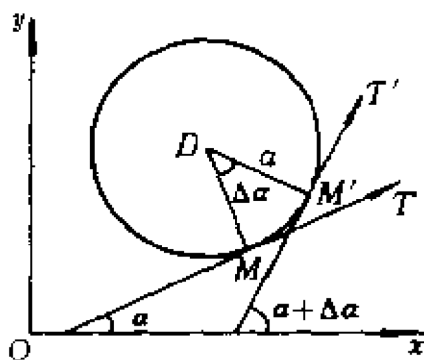


图 3—31

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}=\frac{\frac{\Delta s}{a}}{\Delta s}=\frac{1}{a},$$

从而
$$K=\left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|=\frac{1}{a}.$$

因为点 M 是圆上任意取定的一点，上述结论表示圆上各点处的曲率都等于半径 a 的倒数 $\frac{1}{a}$，这就是说，圆的弯曲程度到处一样，且半径越小曲率越大，即圆弯曲得越厉害.

在一般情况下，我们根据(2)式来导出便于实际计算曲率的公式.

设曲线的直角坐标方程是 $y=f(x)$，且 $f(x)$ 具有二阶导数(这时 $f'(x)$ 连续，从而曲线是光滑的). 因为 $\tan\alpha=y'$，所以

$$\sec^2\alpha\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=y'',$$

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=\frac{y''}{1+\tan^2\alpha}=\frac{y''}{1+y'^2},$$

于是
$$\mathrm{d}\alpha=\frac{y''}{1+y'^2}\mathrm{d}x.$$

又由(1)知道
$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x.$$

从而，根据曲率 K 的表达式(2)，有

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}. \tag{3}$$

设曲线由参数方程

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases}$$

给出，则可利用由参数方程所确定的函数的求导法，求出 y_x' 及 y_x''，代入(3)便得

$$K=\frac{|\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)|}{[\psi'^2(t)+\psi'^2(t)]^{3/2}}. \tag{4}$$

例 1 计算等边双曲线 $xy=1$ 在点(1,1)处的曲率.

解 由 $y=\frac{1}{x}$，得

$$y'=-\frac{1}{x^2}, y''=\frac{2}{x^3}.$$

因此，

$$y'|_{x=1}=-1, y''|_{x=1}=2.$$

把它们代入公式(3)，便得曲线 $xy=1$ 在点(1,1)处的曲率为

$$K=\frac{2}{[1+(-1)^2]^{3/2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例 2 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 上哪一点处的曲率最大？

解 由 $y=ax^2+bx+c$，得

$$y'=2ax+b, y''=2a,$$

代入公式(3)，得

$$K=\frac{|2a|}{[1+(2ax+b)^2]^{3/2}}.$$

因为 K 的分子是常数 $|2a|$，所以只要分母最小，K 就最大. 容易看出，当 $2ax+b=0$，即 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，K 的分母最小，因而 K 有最大值 $|2a|$. 而 $x=-\frac{b}{2a}$ 所对应的点为抛物线的顶点. 因此，抛物线在顶点处的曲率最大.

在有些实际问题中，$|y'|$ 同 1 比较起来是很小的(有的工程技术书上把这种关系记成 $|y'|\ll 1$)，可以忽略不计. 这时，由

$$1+y'^2\approx 1,$$

而有曲率的近似计算公式

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}\approx|y''|.$$

这就是说，当$|y'|\ll 1$时，曲率K近似于$|y''|$. 经过这样简化之后，对一些复杂问题的计算和讨论就方便多了.

三、曲率圆与曲率半径

设曲线$y=f(x)$在点$M(x,y)$处的曲率为$K(K\neq 0)$. 在点M

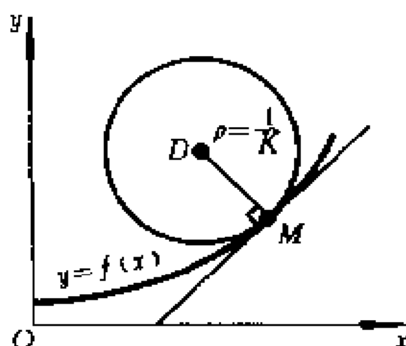


图 3－32

处的曲线的法线上，在凹的一侧取一点D，使$|DM|=\frac{1}{K}=\rho$. 以D为圆心，ρ为半径作圆(图 3－32)，这个圆叫做曲线在点M处的曲率圆，曲率圆的圆心D叫做曲线在点M处的曲率中心，曲率圆的半径ρ叫做曲线在点M处的曲率半径.

按上述规定可知，曲率圆与曲线在点M有相同的切线和曲率，且在点M邻近有相同的凹向. 因此，在实际问题中，常常用曲率圆在点M邻近的一段圆弧来近似代替曲线弧，以使问题简化.

按上述规定，曲线在点M处的曲率$K(K\neq 0)$与曲线在点M处的曲率半径ρ有如下关系：

$$\rho=\frac{1}{K},K=\frac{1}{\rho}.$$

这就是说：曲线上一点处的曲率半径与曲线在该点处的曲率互为倒数.

例 3 设工件内表面的截线为抛物线 $y=0.4x^2$（图 3—33）. 现在要用砂轮磨削其内表面. 问用直径多大的砂轮才比较合适？

解 为了在磨削时不使砂轮与工件接触处附近的那部分工件磨去太多，砂轮的半径应不大于抛物线上各点处曲率半径中的最小值. 由本节例 2 知道，抛物线在其顶点处的曲率最大，也就是说，抛物线在其顶点处的曲率半径最小. 因此，只要求出抛物线 $y=0.4x^2$ 在顶点 $O(0,0)$ 处的曲率半径. 由

$$y'=0.8x, y''=0.8,$$

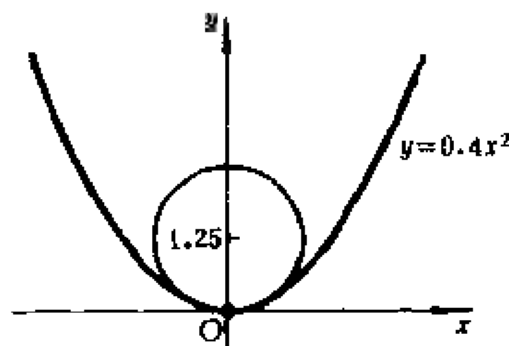


图 3—33

而有 $$y'|_{x=0}=0, y''|_{x=0}=0.8.$$

把它们代入公式(3)，得

$$K=0.8.$$

因而求得抛物线顶点处的曲率半径

$$\rho=\frac{1}{K}=1.25.$$

所以选用砂轮的半径不得超过 1.25 单位长，即直径不得超过 2.50 单位长.

对于用砂轮磨削一般工件的内表面时，也有类似的结论，即选用的砂轮的半径不应超过这工件内表面的截线上各点处曲率半径中的最小值.

*四、曲率中心的计算公式 渐屈线与渐伸线

设已知曲线的方程是 $y=f(x)$，且其二阶导数 y'' 在点 x 不为

零，则曲线在对应点 $M(x,y)$ 的曲率中心 $D(\alpha,\beta)$ 的坐标为

$$\begin{cases}\alpha=x-\dfrac{y'(1+y'^2)}{y''},\\ \beta=y+\dfrac{1+y'^2}{y''}.\end{cases} \tag{5}$$

这是因为，曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x,y)$ 的曲率圆的方程为

$$(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2=\rho^2,$$

其中 ξ,η 是曲率圆上的动点坐标，且

$$\rho^2=\frac{1}{K^2}=\frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}.$$

因为点 M 在曲率圆上，所以

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2; \tag{6}$$

又因为曲线在点 M 的切线与曲率圆的半径 DM 相垂直(图 3－32)，所以

$$y'=-\frac{x-\alpha}{y-\beta}. \tag{7}$$

由(6)和(7)消去 $x-\alpha$，解出

$$(y-\beta)^2=\frac{\rho^2}{1+y'^2}=\frac{(1+y'^2)^2}{y''^2}.$$

由于当 $y''>0$ 时曲线为凹弧，$y-\beta<0$；当 $y''<0$ 时曲线为凸弧，$y-\beta>0$. 总之，y'' 与 $y-\beta$ 异号. 因此取上式两边的平方根，得

$$y-\beta=-\frac{1+y'^2}{y''}.$$

又

$$x-\alpha=-y'(y-\beta)=\frac{y'(1+y'^2)}{y''}.$$

从而有公式(5).

当点 $(x,f(x))$ 沿曲线 C 移动时，相应的曲率中心 D 的轨迹曲线 G 称为曲线 C 的渐屈线，而曲线 C 称为曲线 G 的渐伸线(图 3－34). 所以曲线 $y=f(x)$ 的渐屈线的参数方程为

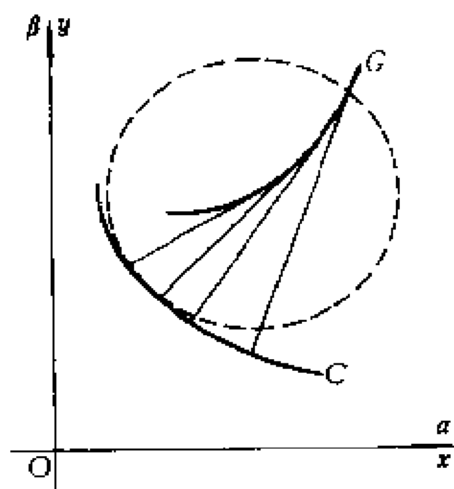


图 3—34

$$
\begin{cases}
\alpha = x - \dfrac{y'(1+y'^2)}{y''}, \\[2mm]
\beta = y + \dfrac{1+y'^2}{y''},
\end{cases}
\tag{8}
$$

其中 $y=f(x)$，$y'=f'(x)$，$y''=f''(x)$，x 为参数，直角坐标系 $\alpha O\beta$ 与 xOy 坐标系重合.

例 4 求摆线

$$
\begin{cases}
x = a(t-\sin t), \\
y = a(1-\cos t)
\end{cases}
$$

的渐屈线方程.

解 $\dfrac{dx}{dt}=a(1-\cos t)$，$\dfrac{dy}{dt}=a\sin t$，所以

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin t}{1-\cos t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{\dfrac{\cos t-1}{(1-\cos t)^2}}{a(1-\cos t)}=-\frac{1}{a(1-\cos t)^2}.$$

将这些结果代入(8)式并化简，便得摆线的渐屈线的参数方程：

$$
\begin{cases}
\alpha = a(t+\sin t), \\
\beta = a(\cos t-1),
\end{cases}
\tag{9}
$$

其中 t 为参数，直角坐标系 $\alpha O\beta$ 与 xOy 坐标系重合. 为了作出渐屈线(9)，令 $t=\pi+\tau$，代入(9)式得

$$\begin{cases}\alpha-\pi a=a(\tau-\sin\tau),\\ \beta+2a=a(1-\cos\tau),\end{cases}$$

再令 $\alpha-\pi a=\xi,\beta+2a=\eta$，则得

$$\begin{cases}\xi=a(t-\sin\tau),\\ \eta=a(1-\cos^?\tau).\end{cases}\tag{10}$$

在新坐标系 $\xi O_1\eta$ 中，曲线(10)为一摆线，其中新坐标系 $\xi O_1\eta$ 由旧坐标系 xOy 平移到新原点 $O_1(\pi a,-2a)$得到. 由此可知摆线的渐屈线仍为一摆线，如图 3－35 所示.

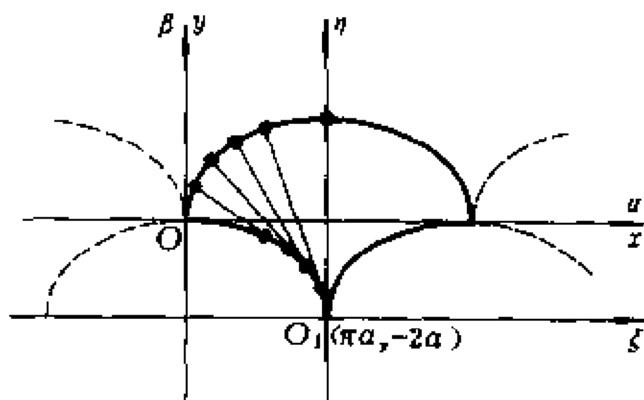


图 3－35

习 题 3—9

1. 求椭圆 $4x^2+y^2=4$ 在点(0,2)处的曲率.

2. 求曲线 $y=\ln(\sec x)$在点(x,y)处的曲率及曲率半径.

3. 求抛物线 $y=x^2-4x+3$ 在其顶点处的曲率及曲率半径.

4. 求曲线 $x=a\cos^3 t,y=a\sin^3 t$ 在 $t=t_0$ 处的曲率.

5. 对数曲线 $y=\ln x$ 上哪一点处的曲率半径最小？求出该点处的曲率半径.

6. 证明曲线 $y=a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$ 在点(x,y)处的曲率半径为$\dfrac{y^2}{a}$.

7. 一飞机沿抛物线路径 $y=\dfrac{x^2}{10000}$(y 轴铅直向上，单位为 m)作俯冲飞

行. 在坐标原点 O 处飞机的速度为 $v=200\text{m/s}$. 飞行员体重 $G=70\text{kg}$. 求飞机俯冲至最低点即原点 O 处时座椅对飞行员的反力.

8. 汽车连同载重共 5t, 在抛物线拱桥上行驶, 速度为 21.6km/h, 桥的跨度为 10m, 拱的矢高为 0.25m(图 3－36). 求汽车越过桥顶时对桥的压力.

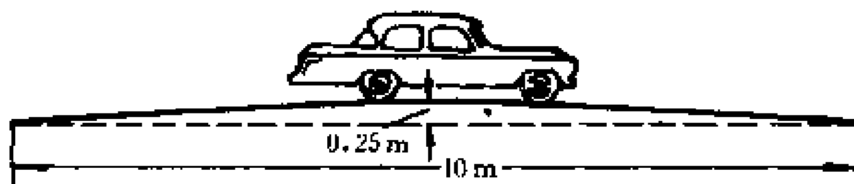


图 3－36

9*. 求曲线 $y=\ln x$ 在与 x 轴交点处的曲率圆方程.

10*. 求曲线 $y=\tan x$ 在点 $\left(\frac{\pi}{4},1\right)$ 处的曲率圆方程.

11*. 求抛物线 $y^2=2px$ 的渐屈线方程.

第十节 方程的近似解

在科学技术问题中, 经常会遇到求解高次代数方程或其他类型的方程的问题. 要求得这类方程的实根的精确值, 往往比较困难, 因此就需要寻求方程的近似解.

求方程的近似解, 可分两步来做.

第一步是确定根的大致范围. 具体地说, 就是确定一个区间 $[a,b]$, 使所求的根是位于这个区间内的唯一实根. 这一步工作称为根的隔离, 区间 $[a,b]$ 称为所求实根的隔离区间. 由于方程 $f(x)=0$ 的实根在几何上表示曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴交点的横坐标, 因此为了确定根的隔离区间, 可以先较精确地画出 $y=f(x)$ 的图形, 然后从图上定出它与 x 轴交点的大概位置. 由于作图和读数的误差, 这种做法得不出根的高精确度的近似值, 但一般已可以确定出根的隔离区间.

第二步是以根的隔离区间的端点作为根的初始近似值, 逐步改善根的近似值的精确度, 直至求得满足精确度要求的近似解. 完成这一步工作有多种方法, 这里我们介绍两种常用的方法—— 二

分法和切线法.

一、二分法

设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, $f(a)\cdot f(b)<0$, 且方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内仅有一个实根 ξ, 于是 $[a,b]$ 即是这个根的一个隔离区间.

取 $[a,b]$ 的中点 $\xi_1=\frac{a+b}{2}$, 计算 $f(\xi_1)$.

如果 $f(\xi_1)=0$, 那末 $\xi=\xi_1$;

如果 $f(\xi_1)$ 与 $f(a)$ 同号, 那末取 $a_1=\xi_1, b_1=b$, 由 $f(a_1)\cdot f(b_1)<0$, 即知 $a_1<\xi<b_1$, 且 $b_1-a_1=\frac{1}{2}(b-a)$;

如果 $f(\xi_1)$ 与 $f(b)$ 同号, 那末取 $a_1=a, b_1=\xi_1$, 也有 $a_1<\xi<b_1$ 及 $b_1-a_1=\frac{1}{2}(b-a)$;

总之, 当 $\xi\neq\xi_1$ 时, 可求得 $a_1<\xi<b_1$, 且 $b_1-a_1=\frac{1}{2}(b-a)$.

以 $[a_1,b_1]$ 作为新的隔离区间, 重复上述做法, 当 $\xi\neq\xi_2=\frac{1}{2}(a_1+b_1)$ 时, 可求得 $a_2<\xi<b_2$, 且 $b_2-a_2=\frac{1}{2^2}(b-a)$.

如此重复 n 次, 可求得 $a_n<\xi<b_n$, 且 $b_n-a_n=\frac{1}{2^n}(b-a)$. 由此可知, 如果以 a_n 或 b_n 作为 ξ 的近似值, 那末其误差小于 $\frac{1}{2^n}(b-a)$.

例 1 用二分法求方法 $x^3+1.1x^2+0.9x-1.4=0$ 的实根的近似值, 使误差不超过 10^{-3}.

解 令 $f(x)=x^3+1.1x^2+0.9x-1.4$, 显然 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\infty)$ 内连续.

由 $f'(x)=3x^2+2.2x+0.9$, 根据判别式 $\left(\frac{B}{2}\right)^2-AC=1.1^2-3\times0.9=-1.49<0$, 知 $f'(x)>0$. 故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加, $f(x)=0$ 至多有一个实根.

由 $f(0)=-1.4<0, f(1)=1.6>0$，知 $f(x)=0$ 在 $[0,1]$ 内有唯一的实根. 取 $a=0, b=1$，$[0,1]$ 即是一个隔离区间.

计算得：

$\xi_1=0.5$，　　$f(\xi_1)=-0.55<0$，

　　故 $a_1=0.5, b_1=1$；

$\xi_2=0.75$，　　$f(\xi_2)=0.32>0$，

　　故 $a_2=0.5, b_2=0.75$；

$\xi_3=0.625$，　　$f(\xi_3)=-0.16<0$，

　　故 $a_3=0.625, b_3-0.75$；

$\xi_4=0.687$①，　　$f(\xi_4)=0.062>0$，

　　故 $a_4=0.625, b_4=0.687$；

$\xi_5=0.656$，　　$f(\xi_5)=-0.054<0$，

　　故 $a_5=0.656, b_5=0.687$；

$\xi_6=0.672$，　　$f(\xi_6)=0.005>0$，

　　故 $a_6=0.656, b_6=0.672$；

$\xi_7=0.664$，　　$f(\xi_7)=-0.025<0$，

　　故 $a_7=0.664, b_7=0.672$；

$\xi_8=0.668$，　　$f(\xi_8)=-0.010<0$，

　　故 $a_8=0.668, b_8=0.672$；

$\xi_9=0.670$，　　$f(\xi_9)=-0.002<0$，

　　故 $a_9=0.670, b_9=0.672$；

$\xi_{10}=0.671$，　　$f(\xi_{10})=0.001>0$，

　　故 $a_{10}=0.670, b_{10}=0.671$.

于是

$$0.670<\xi<0.671.$$

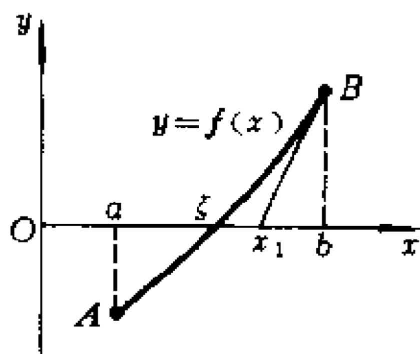
即 0.670 作为根的不足近似值，0.671 作为根的过剩近似值，其误差都小于 10^{-3}.

---

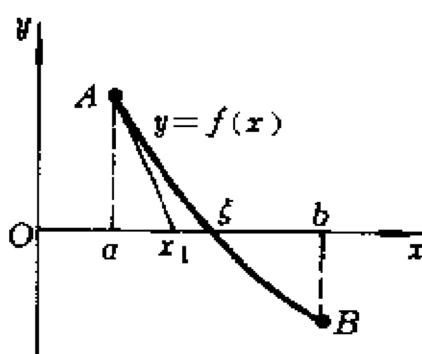
① 按本例误差不超过 10^{-3} 的要求，计算时只取 3 位小数.

二、切线法

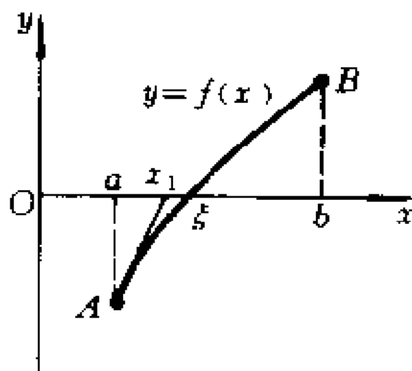
设 $f(x)$在$[a,b]$上具有二阶导数，$f(a)\cdot f(b)<0$ 且 $f'(x)$及



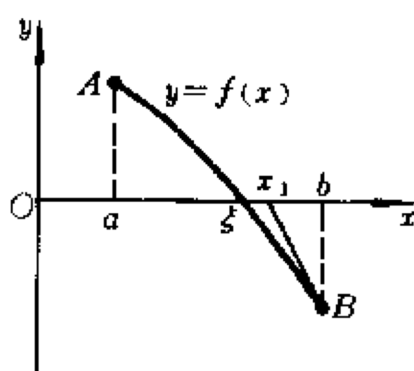
(a) $f(a)<0,f(b)>0$
$f'(x)>0,f''(x)>0$



(b) $f(a)>0,f(b)<0$
$f'(x)<0,f''(x)>0$



(c) $f(a)<0,f(b)>0$
$f'(x)>0,f''(x)<0$



(d) $f(a)>0,f(b)<0$
$f'(x)<0,f''(x)<0$

图 3—37

$f''(x)$在$[a,b]$上保持定号. 在上述条件下，方程 $f(x)=0$ 在(a,b)内有唯一的实根 ξ，$[a,b]$为根的一个隔离区间. 此时，$y=f(x)$在$[a,b]$上的图形$\overset{\frown}{AB}$只有如图 3—37 所示的四种不同情形.

考虑用曲线弧一端的切线来代替曲线弧，从而求出方程实根的近似值，这种方法叫做切线法. 从图 3—37 中看出，如果在纵坐标与 $f''(x)$同号的那个端点（此端点记作$(x_0,f(x_0))$）作切线，这

切线与 x 轴的交点的横坐标 x_1 就比 x_0 更接近方程的根 ξ①.

下面以图 3－37(c)：$f(a)<0, f(b)>0, f'(x)>0, f''(x)<0$ 的情形为例进行讨论. 此时因为 $f(a)$ 与 $f''(x)$ 同号，所以令 $x_0=a$，在端点 $(x_0, f(x_0))$ 作切线，这切线的方程为

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

令 $y=0$，从上式中解出 x，就得到切线与 x 轴交点的横坐标为

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

它比 x_0 更接近方程的根 ξ.

再在点 $(x_1, f(x_1))$ 作切线，可得根的近似值 x_2. 如此继续，一般地，在点 $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ 作切线，得根的近似值

$$x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}. \tag{1}$$

如果 $f(b)$ 与 $f''(x)$ 同号，切线作在端点 B(如情形(a)及(d))，可记 $x_0=b$，仍按公式(1)计算切线与 x 轴交点的横坐标.

例 2 用切线法求方程 $x^3+1.1x^2+0.9x-1.4=0$ 的实根的近似值，使误差不超过 10^{-3}.

解 令 $f(x)=x^3+1.1x^2+0.9x-1.4$. 由例 1 知 $[0,1]$ 是根的一个隔离区间. $f(0)<0, f(1)>0$.

在 $[0,1]$ 上，

$$f'(x)=3x^2+2.2x+0.9>0,$$

$$f''(x)=6x+2.2>0,$$

① 如图 3－38 所示，如果把切线作在纵坐标与 $f''(x)$ 异号的那个端点，就不能保证切线与 x 轴的交点的横坐标 x_1 比原来的近似值 a 或 b 更接近于方程的根 ξ.

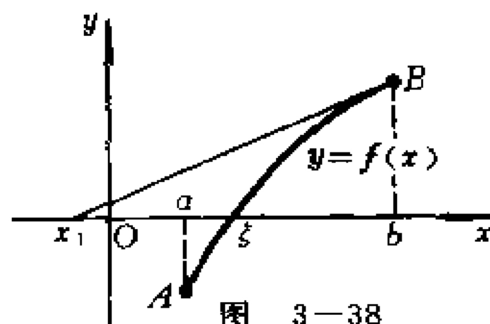


图 3－38

故 $f(x)$在$[0,1]$上的图形属于图 3—37 中情形(a). 按 $f''(x)$与 $f(1)$同号，所以令 $x_0=1$.

连续应用公式(1)，得

$$x_1=1-\frac{f(1)}{f'(1)}\approx 0.738;$$

$$x_2=0.738-\frac{f(0.738)}{f'(0.738)}\approx 0.674;$$

$$x_3=0.674-\frac{f(0.674)}{f'(0.674)}\approx 0.671;$$

$$x_4=0.671-\frac{f(0.671)}{f'(0.671)}\approx 0.671.$$

至此，计算不能再继续. 注意到 $f(x_i)(i=0,1,\cdots)$与 $f''(x)$同号，知 $f(0.671)>0$，经计算可知 $f(0.670)<0$，于是有

$$0.670<\xi<0.671.$$

以 0.670 或 0.671 作为根的近似值，其误差都小于 10^{-3}.

习　题　3－10

1. 试证明方程 $x^3-3x^2+6x-1=0$ 在区间$(0,1)$内有唯一的实根，并用二分法求这个根的近似值，使误差不超过 0.01.

2. 试证明方程 $x^5+5x+1=0$ 在区间$(-1,0)$内有唯一的实根，并用切线法求这个根的近似值，使误差不超过 0.01.

3. 求方程 $x^3+3x-1=0$ 的近似根，使误差不超过 0.01.

4. 求方程 $x\lg x=1$ 的近似根，使误差不超过 0.01.

总 习 题 三

1. 列举一个函数 $f(x)$满足：$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内除某一点外处处可导，但在(a,b)内不存在点 ξ，使 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

2. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=k$，求 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+a)-f(x)]$.

3. 证明多项式 $f(x)=x^3-3x+a$ 在$[0,1]$上不可能有两个零点.

4. 设 $a_0+\dfrac{a_1}{2}+\cdots+\dfrac{a_n}{n+1}=0$，证明多项式

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

在(0,1)内至少有一个零点.

5. 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，在 $(0,a)$ 内可导，且 $f(a)=0$，证明存在一点 $\xi\in(0,a)$，使 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

6. 设 $0<a<b$，函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，试利用柯西中值定理，证明存在一点 $\xi\in(a,b)$，使

$$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}.$$

7. 设 $f(x)$、$g(x)$ 都是可导函数，且 $|f'(x)|<g'(x)$，证明：当 $x>a$ 时，$|f(x)-f(a)|<g(x)-g(a)$.

8. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^x}{1-x+\ln x}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right]$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$；

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}\right)/n\right]^{nx}$ （其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n>0$）.

9. 写出函数 $f(x)=\ln x$ 在 $x=2$ 处的 n 阶泰勒公式 $(n>3)$.

10. 证明下列不等式：

(1) 当 $0<x_1<x_2<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\dfrac{\tan x_2}{\tan x_1}>\dfrac{x_2}{x_1}$；

(2) 当 $x>0$ 时，$\ln(1+x)>\dfrac{\arctan x}{1+x}$.

11. 设 $f(x)=\begin{cases}x^{2x}, & x>0\\ x+2, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 求 $f(x)$ 的极值.

12. 求椭圆 $x^2-xy+y^2=3$ 上纵坐标最大和最小的点.

13. 求数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的最大项.

14. 描绘下列函数的图形：

(1) $y=\ln(x^2+1)$；　　(2) $y^2=x(x-1)^2$.

15. 曲线弧 $y=\sin x\,(0<x<\pi)$ 上哪一点处的曲率半径最小？求出该点处的曲率半径.

16. 证明方程 $x^3-5x-2=0$ 只有一个正根，并求此正根的近似值，使精确到 10^{-3}.

17. 设 $f''(x_0)$存在，证明

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=f''(x_0).$$

18. 设 $f^{(n)}(x_0)$存在，且 $f(x_0)=f'(x_0)=\cdots=f^{(n)}(x_0)=0$，证明

$$f(x)=o[(x-x_0)^n]\quad(x\to x_0).$$

19. 设 $f(x)$在(a,b)内二阶可导，且 $f''(x)\geqslant 0$. 证明对于(a,b)内任意两点 x_1、x_2 及 $0\leqslant t\leqslant 1$，有

$$f[(1-t)x_1+tx_2]\leqslant(1-t)f(x_1)+tf(x_2).$$

第四章 不定积分

在第二章中，我们讨论了如何求一个函数的导函数问题，本章将讨论它的反问题，即要寻求一个可导函数，使它的导函数等于已知函数. 这是积分学的基本问题之一.

第一节 不定积分的概念与性质

一、原函数与不定积分的概念

定义 1 如果在区间 I 上，可导函数 $F(x)$ 的导函数为 $f(x)$，即对任一 $x\in I$，都有

$$F'(x)=f(x) \text{或} \mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x,$$

那末函数 $F(x)$ 就称为 $f(x)$（或 $f(x)\mathrm{d}x$）在区间 I 上的原函数.

例如，因 $(\sin x)'=\cos x$，故 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的原函数.

又如当 $x\in(1,+\infty)$ 时，

$$[\ln(x+\sqrt{x^2-1})]'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$$

故 $\ln(x+\sqrt{x^2-1})$ 是 $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内的原函数.

关于原函数，我们首先要问：一个函数具备什么条件，能保证它的原函数一定存在？这个问题将在下一章中讨论，这里先介绍一个结论.

原函数存在定理 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，那末在区间 I 上存在可导函数 $F(x)$，使对任一 $x\in I$ 都有

$$F'(x)=f(x).$$

简单地说就是：**连续函数一定有原函数.**

下面还要说明两点.

第一,如果 $f(x)$ 在区间 I 上有原函数,即有一个函数 $F(x)$,使对任一 $x\in I$,都有 $F'(x)=f(x)$,那末,对任何常数 C,显然也有

$$[F(x)+C]'=f(x),$$

即对任何常数 C,函数 $F(x)+C$ 也是 $f(x)$ 的原函数. 这说明,如果 $f(x)$ 有一个原函数,那末 $f(x)$ 就有无限多个原函数.

第二,如果在区间 I 上 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,那末 $f(x)$ 的其他原函数与 $F(x)$ 有什么关系?

设 $\Phi(x)$ 是 $f(x)$ 的另一个原函数,即对任一 $x\in I$ 有

$$\Phi'(x)=f(x),$$

于是

$$[\Phi(x)-F(x)]'=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0.$$

在第二章第一节中已经知道,在一个区间上导数恒为零的函数必为常数,所以

$$\Phi(x)-F(x)=C_0 \quad (C_0\text{ 为某个常数}).$$

这表明 $\Phi(x)$ 与 $F(x)$ 只差一个常数. 因此,当 C 为任意的常数时,表达式

$$F(x)+C$$

就可表示 $f(x)$ 的任意一个原函数. 也就是说,$f(x)$ 的全体原函数所组成的集合,就是函数族

$$\{F(x)+C\mid -\infty<C<+\infty\}.$$

由以上两点说明,我们引进下述定义.

定义 2　在区间 I 上,函数 $f(x)$ 的带有任意常数项的原函数称为 $f(x)$(或 $f(x)\mathrm{d}x$)在区间 I 上的不定积分,记作

$$\int f(x)\mathrm{d}x.$$

其中记号 $\int$ 称为积分号,$f(x)$ 称为被积函数,$f(x)\mathrm{d}x$ 称为被积表达式,x 称为积分变量.

由此定义及前面的说明可知,如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上

的一个原函数，那末 $F(x)+C$ 就是 $f(x)$ 的不定积分，即

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C.$$

因而不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 可以表示 $f(x)$ 的任意一个原函数.

例 1 求 $\int x^2\mathrm{d}x$.

解 由于 $\left(\frac{x^3}{3}\right)'=x^2$，所以 $\frac{x^3}{3}$ 是 x^2 的一个原函数. 因此

$$\int x^2\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+C.$$

例 2 求 $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

解 当 $x>0$ 时，由于 $(\ln x)'=\frac{1}{x}$，所以 $\ln x$ 是 $\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内的一个原函数. 因此，在 $(0,+\infty)$ 内，

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x+C.$$

当 $x<0$ 时，由于 $[\ln(-x)]'=\frac{1}{-x}(-1)=\frac{1}{x}$，所以 $\ln(-x)$ 是 $\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)$ 内的一个原函数. 因此，在 $(-\infty,0)$ 内，

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln(-x)+C.$$

把在 $x>0$ 及 $x<0$ 内的结果合起来，可写作

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C.$$

例 3 设曲线通过点(1,2)，且其上任一点处的切线斜率等于这点横坐标的两倍，求此曲线的方程.

解 设所求的曲线方程为 $y=f(x)$，按题设，曲线上任一点 (x,y) 处的切线斜率为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x,$$

即 $f(x)$ 是 $2x$ 的一个原函数.

因为 $$\int 2x\mathrm{d}x = x^2 + C.$$
故必有某个常数 C 使 $f(x)=x^2+C$，即曲线方程为 $y=x^2+C$. 因所求曲线通过点(1,2)，故

$$2=1+C, C-1.$$

于是所求曲线方程为

$$y=x^2+1.$$

函数 $f(x)$ 的原函数的图形称为 $f(x)$ 的积分曲线. 本例即是求函数 $2x$ 的通过点(1,2)的那条积分曲线. 显然，这条积分曲线可以由另一条积分曲线(例如 $y=x^2$)经 y 轴方向平移而得(图 4—1).

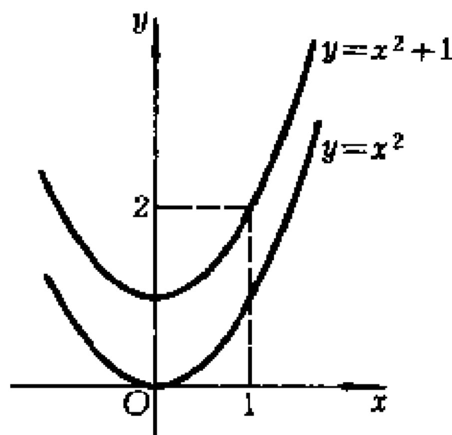


图 4—1

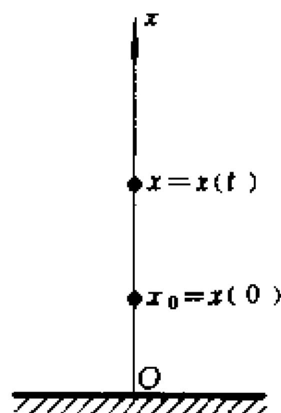


图 4—2

例 4 质点以初速 v_0 铅直上抛，不计阻力，求它的运动规律.

解 所谓运动规律，是指质点的位置关于时间 t 的函数关系. 为表示质点的位置，取坐标系如下：把质点所在的铅直线取作坐标轴，指向朝上，轴与地面的交点取作坐标原点. 设质点抛出时刻为 $t=0$，当 $t=0$ 时质点所在位置的坐标为 x_0，在时刻 t 时坐标为 x(图 4—2)，$x=x(t)$ 就是要求的函数.

按导数的物理意义知道，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v(t)$$

即为质点在时刻 t 时向上运动的速度(如果 $v(t)<0$,那末运动方向实际朝下). 又知

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=a(t)$$

即为质点在时刻 t 时向上运动的加速度,按题意,有 $a(t)=-g$,即

$$\frac{dv}{dt}=-g \text{ 或 } \frac{d^2x}{dt^2}=-g.$$

先求 $v(t)$. 由 $\frac{dv}{dt}=-g$,即 $v(t)$是$(-g)$的原函数,故

$$v(t)=\int(-g)dt=-gt+C_1,$$

由 $v(0)=v_0$,得 $v_0=C_1$,于是

$$v(t)=-gt+v_0.$$

再求 $x(t)$. 由 $\frac{dx}{dt}=v(t)$,即 $x(t)$是 $v(t)$的原函数,故

$$x(t)=\int v(t)dt=\int(-gt+v_0)dt=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+C_2,$$

由 $x(0)=x_0$,得 $x_0=C_2$,于是所求运动规律为

$$x=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+x_0,\ t\in[0,T],$$

其中 T 表示质点落地的时刻.

从不定积分的定义,即可知下述关系:

由于 $\int f(x)dx$ 是 $f(x)$的原函数,所以

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right]=f(x),$$

或

$$d\left[\int f(x)dx\right]=f(x)dx; \tag{1}$$

又由于 $F(x)$是 $F'(x)$的原函数,所以

$$\int F'(x)dx=F(x)+C,$$

或记作

$$\int dF(x)=F(x)+C. \tag{2}$$

由此可见，微分运算（以记号 d 表示）与求不定积分的运算（简称积分运算，以记号 $\int$ 表示）是互逆的. 当记号 $\int$ 与 d 连在一起时，或者抵消，或者抵消后差一个常数.

二、基本积分表

既然积分运算是微分运算的逆运算，那末很自然地可以从导数公式得到相应的积分公式.

例如，因为 $\left(\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\right)'=x^{\mu}$，所以 $\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}$ 是 x^{μ} 的一个原函数，于是

$$\int x^{\mu}\mathrm{d}x=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C \quad (\mu\neq-1).$$

类似地可以得到其他积分公式. 下面我们把一些基本的积分公式列成一个表，这个表通常叫做基本积分表.

① $\int k\mathrm{d}x=kx+C$ （k 是常数），

② $\int x^{\mu}\mathrm{d}x=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C \quad (\mu\neq-1)$，

③ $\int \frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln|x|+C$，

④ $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x+C$，

⑤ $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$，

⑥ $\int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$，

⑦ $\int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$，

⑧ $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=\int \sec^2 x\mathrm{d}x=\tan x+C$，

⑨ $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}=\int \csc^2 x\mathrm{d}x=-\cot x+C$，

⑩ $\int \sec x\tan x\mathrm{d}x=\sec x+C$，

⑪ $\int \csc x \cot x \mathrm{d}x = -\csc x + C$,

⑫ $\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$,

⑬ $\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$,

⑭ $\int \operatorname{sh} x \mathrm{d}x = \operatorname{ch} x + C$,

⑮ $\int \operatorname{ch} x \mathrm{d}x = \operatorname{sh} x + C$.

以上十五个基本积分公式，是求不定积分的基础，必须熟记，下面举几个应用幂函数的积分公式②的例子.

例 5 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3}$.

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = \int x^{-3} \mathrm{d}x = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$.

例 6 求 $\int x^2 \sqrt{x} \mathrm{d}x$.

解
$$\int x^2 \sqrt{x} \mathrm{d}x = \int x^{\frac{5}{2}} \mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} + C = \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + C$$
$$= \frac{2}{7} x^3 \sqrt{x} + C.$$

例 7 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x \sqrt[3]{x}}$.

解
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x \sqrt[3]{x}} = \int x^{-\frac{4}{3}} \mathrm{d}x = \frac{x^{-\frac{4}{3}+1}}{-\frac{4}{3}+1} + C = -3x^{-\frac{1}{3}} + C$$
$$= -\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + C.$$

上面三个例子表明，有时被积函数实际是幂函数，但用分式或根式表示. 遇此情形，应先把它化为 x^μ 的形式，然后应用幂函数的积分公式②来求不定积分.

三、不定积分的性质

根据不定积分的定义，可以推得它有如下两个性质：

性质 1　函数的和的不定积分等于各个函数的不定积分的和，即

$$\int [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x+\int g(x)\mathrm{d}x. \tag{3}$$

证　将(3)式右端求导，得

$$\left[\int f(x)\mathrm{d}x+\int g(x)\mathrm{d}x\right]'=\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]'+\left[\int g(x)\mathrm{d}x\right]'$$
$$=f(x)+g(x).$$

这表示，(3)式右端是 $f(x)+g(x)$ 的原函数，又(3)式右端有两个积分记号，形式上含两个任意常数，由于任意常数之和仍为任意常数，故实际上含一个任意常数，因此(3)式右端是 $f(x)+g(x)$ 的不定积分.

性质 1 对于有限个函数都是成立的.

类似地可以证明不定积分的第二个性质.

性质 2　求不定积分时，被积函数中不为零的常数因子可以提到积分号外面来，即

$$\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x \quad (k\text{ 是常数}, k\neq 0).$$

利用基本积分表以及不定积分的这两个性质，可以求出一些简单函数的不定积分.

例 8　求 $\int \sqrt{x}(x^2-5)\mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x}(x^2-5)\mathrm{d}x &= \int (x^{\frac{5}{2}}-5x^{\frac{1}{2}})\mathrm{d}x \\ &= \int x^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}x-\int 5x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x \\ &= \int x^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}x-5\int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}-5\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C\end{aligned}$$

$$=\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}-\frac{10}{3}x\sqrt{x}+C.$$

注意 检验积分结果是否正确，只要对结果求导，看它的导数是否等于被积函数，相等时结果是正确的，否则结果是错误的. 如就例 8 的结果来看，由于

$$\left(\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}-\frac{10}{3}x\sqrt{x}+C\right)'=\left(\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}-\frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}}+C\right)'$$

$$=x^{\frac{5}{2}}-5x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}\,(x^2-5),$$

所以结果是正确的.

例 9 求 $\int\frac{(x-1)^3}{x^2}\mathrm{d}x$.

解
$$\int\frac{(x-1)^3}{x^2}\mathrm{d}x=\int\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2}\mathrm{d}x$$
$$=\int\left(x-3+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\int x\mathrm{d}x-3\int\mathrm{d}x+3\int\frac{\mathrm{d}x}{x}-\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$
$$=\frac{x^2}{2}-3x+3\ln|x|+\frac{1}{x}+C.$$

例 10 求 $\int(\mathrm{e}^x-3\cos x)\mathrm{d}x$.

解
$$\int(\mathrm{e}^x-3\cos x)\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x-3\int\cos x\mathrm{d}x$$
$$=\mathrm{e}^x-3\sin x+C.$$

例 11 求 $\int 2^x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

解 因为

$$2^x\mathrm{e}^x=(2\mathrm{e})^x,$$

所以可把 2e 看作 a，并利用积分公式⑬，便得

$$\int 2^x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int(2\mathrm{e})^x\mathrm{d}x=\frac{(2\mathrm{e})^x}{\ln(2\mathrm{e})}+C=\frac{2^x\mathrm{e}^x}{1+\ln 2}+C.$$

例 12 求 $\int\frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$.

解 基本积分表中没有这种类型的积分，可以先把被积函数

变形，化为表中所列类型的积分之后，再逐项求积分：

$$\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x = \int \frac{x+(1+x^2)}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x = \int (\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{x})\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \arctan x + \ln |x| + C.$$

例 13 求 $\int \frac{x^4}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解 基本积分表中也没有这种类型的积分，同上题一样，经过变形，化为表中所列类型之后，就可以逐项求积分：

$$\int \frac{x^4}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int \frac{x^4-1+1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int \frac{(x^2+1)(x^2-1)+1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \int \left(x^2-1+\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int x^2\mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x + \int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x^3}{3} - x + \arctan x + C.$$

例 14 求 $\int \tan^2 x\mathrm{d}x$.

解 基本积分表中没有这种类型的积分，先利用三角恒等式变形，然后再求积分：

$$\int \tan^2 x\mathrm{d}x = \int (\sec^2 x - 1)\mathrm{d}x = \int \sec^2 x\mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x = \tan x - x + C.$$

例 15 求 $\int \sin^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x$.

解 基本积分表中也没有这种类型的积分，同上例一样，可以先利用三角恒等式变形，然后再求积分：

$$\int \sin^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}(1-\cos x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (1-\cos x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int \mathrm{d}x - \int \cos x\mathrm{d}x\right] = \frac{1}{2}(x - \sin x) + C.$$

例 16 求 $\int \frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$.

解 同上例一样，先利用三角恒等式变形，然后再求积分：

$$\int \frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\left(\frac{\sin x}{2}\right)^2}\mathrm{d}x$$

$$= 4\int \csc^2 x\mathrm{d}x = -4\cot x + C.$$

习 题 4—1

1. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$；　(2) $\int x\sqrt{x}\mathrm{d}x$；

(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$；　(4) $\int x^2\sqrt[3]{x}\mathrm{d}x$；

(5) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x}}$；　(6) $\int \sqrt[m]{x^n}\mathrm{d}x$；

(7) $\int 5x^3\mathrm{d}x$；　(8) $\int (x^2-3x+2)\mathrm{d}x$；

(9) $\int \frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{2gh}}$（$g$ 是常数）；　(10) $\int (x-2)^2\mathrm{d}x$；

(11) $\int (x^2+1)^2\mathrm{d}x$；　(12) $\int (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x^3}-1)\mathrm{d}x$；

(13) $\int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；　(14) $\int \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}\mathrm{d}x$；

(15) $\int \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$；　(16) $\int \left(2e^x+\frac{3}{x}\right)\mathrm{d}x$；

(17) $\int \left(\frac{3}{1+x^2}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x$；　(18) $\int e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$；

(19) $\int 3^x e^x\mathrm{d}x$；　(20) $\int \frac{2\cdot 3^x-5\cdot 2^x}{3^x}\mathrm{d}x$；

(21) $\int \sec x(\sec x-\tan x)\mathrm{d}x$；　(22) $\int \cos^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x$；

(23) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos 2x}$；　(24) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}\mathrm{d}x$；

(25) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}\mathrm{d}x$；　(26) $\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

2. 一曲线通过点$(e^2,3)$，且在任一点处的切线的斜率等于该点横坐标的倒数，求该曲线的方程.

3. 一物体由静止开始运动，经 t 秒后的速度是 $3t^2$(m/s)，问

(1) 在 3 秒后物体离开出发点的距离是多少?

(2) 物体走完 360m 需要多少时间?

4. 证明函数$\frac{1}{2}e^{2x}$,$e^x\text{sh } x$和$e^x\text{ch } x$都是$\frac{e^x}{\text{ch } x-\text{sh } x}$的原函数.

第二节 换元积分法

利用基本积分表与积分的性质,所能计算的不定积分是非常有限的.因此,有必要进一步来研究不定积分的求法.本节把复合函数的微分法反过来用于求不定积分,利用中间变量的代换,得到复合函数的积分法,称为换元积分法,简称换元法.换元法通常分成两类,下面先讲第一类换元法.

一、第一类换元法

设 $f(u)$具有原函数 $F(u)$,即

$$F'(u)=f(u),\quad \int f(u)\mathrm{d}u=F(u)+C.$$

如果 u 是另一变量 x 的函数 $u=\varphi(x)$,且设 $\varphi(x)$可微,那末,根据复合函数微分法,有

$$\mathrm{d}F[\varphi(x)]=f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x,$$

从而根据不定积分的定义就得

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x=F[\varphi(x)]+C=\left[\int f(u)\mathrm{d}u\right]_{u=\varphi(x)}.$$

于是有下述定理:

定理 1 设 $f(u)$具有原函数,$u=\varphi(x)$可导,则有换元公式

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x=\left[\int f(u)\mathrm{d}u\right]_{u=\varphi(x)}. \tag{1}$$

由此定理可见,虽然 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x$ 是一个整体的记号,但如同导数记号$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$中的 $\mathrm{d}x$ 及 $\mathrm{d}y$ 可看作微分一样,被积表达式中的 $\mathrm{d}x$ 也可当作变量 x 的微分来对待.从而微分等式 $\varphi'(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$ 可以方便地应用到被积表达式中来,我们在上节第一目中已经这

样用了，那里把积分 $\int F'(x)\mathrm{d}x$ 记作 $\int \mathrm{d}F(x)$，就是按微分 $F'(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}F(x)$，把被积表达式 $F'(x)\mathrm{d}x$ 记作 $\mathrm{d}F(x)$.

如何应用公式(1)来求不定积分？设要求 $\int g(x)\mathrm{d}x$，如果函数 $g(x)$ 可以化为 $g(x)=f[\varphi(x)]\varphi'(x)$ 的形式，那么

$$\int g(x)\mathrm{d}x=\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x=\left[\int f(u)\mathrm{d}u\right]_{u=\varphi(x)},$$

这样，函数 $g(x)$ 的积分即转化为函数 $f(u)$ 的积分. 如果能求得 $f(u)$ 的原函数，那末也就得到了 $g(x)$ 的原函数.

例 1 求 $\int 2\cos 2x\mathrm{d}x$.

解 被积函数中，$\cos 2x$ 是一个复合函数：$\cos 2x=\cos u$，$u=2x$，常数因子恰好是中间变量 u 的导数. 因此，作变换 $u=2x$，便有

$$\int 2\cos 2x\mathrm{d}x=\int \cos 2x\cdot 2\mathrm{d}x=\int \cos 2x\cdot(2x)'\mathrm{d}x$$
$$=\int \cos u\mathrm{d}u=\sin u+C,$$

再以 $u=2x$ 代入，即得

$$\int 2\cos 2x\mathrm{d}x=\sin 2x+C.$$

例 2 求 $\int \frac{1}{3+2x}\mathrm{d}x$.

解 被积函数 $\frac{1}{3+2x}=\frac{1}{u}$，$u=3+2x$. 这里缺少 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=2$ 这样一个因子，但由于 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ 是个常数，故可改变系数凑出这个因子：

$$\frac{1}{3+2x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3+2x}\cdot 2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3+2x}(3+2x)',$$

从而令 $u=3+2x$，便有

$$\int\frac{1}{3+2x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3+2x}(3+2x)'\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u}\mathrm{d}u$$
$$=\frac{1}{2}\ln|u|+C=\frac{1}{2}\ln|3+2x|+C.$$

一般地，对于积分 $\int f(ax+b)\mathrm{d}x$，总可作变换 $u=ax+b$，把它

化为

$$\int f(ax+b)\mathrm{d}x=\int \frac{1}{a}f(ax+b)\mathrm{d}(ax+b)$$
$$=\frac{1}{a}\left[\int f(u)\mathrm{d}u\right]_{u=ax+b}.$$

例 3 求 $\int 2x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$.

解 被积函数中的一个因子为 $\mathrm{e}^{x^2}=\mathrm{e}^u$, $u=x^2$；剩下的因子 $2x$ 恰好是中间变量 $u=x^2$ 的导数，于是有

$$\int 2x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}(x^2)=\int \mathrm{e}^u\mathrm{d}u=\mathrm{e}^u+C=\mathrm{e}^{x^2}+C.$$

例 4 求 $\int x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.

解 设 $u=1-x^2$，则 $\mathrm{d}u=-2x\mathrm{d}x$，即 $-\frac{1}{2}\mathrm{d}u=x\mathrm{d}x$，因此，

$$\int x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\int u^{\frac{1}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}u=-\frac{1}{2}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C$$
$$=-\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}+C=-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C.$$

例 5 求 $\int \tan x\mathrm{d}x$.

解 $\int \tan x\mathrm{d}x=\int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x$.

因为 $-\sin x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\cos x$，所以如果设 $u=\cos x$，那末 $\mathrm{d}u=-\sin x\mathrm{d}x$，即 $-\mathrm{d}u=\sin x\mathrm{d}x$，因此

$$\int \tan x\mathrm{d}x=\int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x=-\int \frac{\mathrm{d}u}{u}=-\ln|u|+C$$
$$=-\ln|\cos x|+C.$$

类似地可得 $\int \cot x\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+C$.

在对变量代换比较熟练以后，就不一定写出中间变量 u.

例 6 求 $\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x$.

解 $\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\mathrm{d}\,\frac{x}{a} = \frac{1}{a}\arctan\,\frac{x}{a}+C.$$

在上例中，我们实际上已经用了变量代换 $u=\frac{x}{a}$，并在求出积分 $\frac{1}{a}\int \frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u$ 之后，代回了原积分变量 x，只是没有把这些步骤写出来而已.

例 7 求 $\int \mathrm{ch}\,\frac{x}{a}\mathrm{d}x$.

解 $\int \mathrm{ch}\,\frac{x}{a}\mathrm{d}x = a\int \mathrm{ch}\,\frac{x}{a}\mathrm{d}\,\frac{x}{a} = a\mathrm{sh}\,\frac{x}{a}+C.$

例 8 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}\quad(a>0)$.

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{1}{a}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \int \frac{\mathrm{d}\,\frac{x}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}$

$$= \arcsin\,\frac{x}{a}+C.$$

例 9 求 $\int \frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x$.

解 由于

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right),$$

所以

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2a}\left(\int \frac{1}{x-a}\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x+a}\mathrm{d}x\right)$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\int \frac{1}{x-a}\mathrm{d}(x-a) - \int \frac{1}{x+a}\mathrm{d}(x+a)\right]$$

$$=\frac{1}{2a}(\ln|x-a|-\ln|x+a|)+C$$

$$=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.$$

例 10 求 $\int\frac{dx}{x(1+2\ln x)}$.

解 $\int\frac{dx}{x(1+2\ln x)}=\int\frac{d\ln x}{1+2\ln x}=\frac{1}{2}\int\frac{d(2\ln x)}{1+2\ln x}$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(1+2\ln x)}{1+2\ln x}=\frac{1}{2}\ln|1+2\ln x|+C.$$

例 11 求 $\int\frac{e^{3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

解 由于 $d\sqrt{x}=\frac{1}{2}\frac{dx}{\sqrt{x}}$,因此,

$$\int\frac{e^{3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=2\int e^{3\sqrt{x}}d\sqrt{x}=\frac{2}{3}\int e^{3\sqrt{x}}d(3\sqrt{x})$$

$$=\frac{2}{3}e^{3\sqrt{x}}+C.$$

下面再举一些积分的例子,它们的被积函数中含有三角函数,在计算这种积分的过程中,往往要用到一些三角恒等式.

例 12 求 $\int\sin^3 x dx$.

解 $\int\sin^3 x dx=\int\sin^2 x\sin x dx=-\int(1-\cos^2 x)d(\cos x)$

$$=-\int d(\cos x)+\int\cos^2 x d(\cos x)$$

$$=-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+C.$$

例 13 求 $\int\sin^2 x\cos^5 x dx$.

解 $\int\sin^2 x\cos^5 x dx=\int\sin^2 x\cos^4 x\cos x dx$

$$=\int\sin^2 x(1-\sin^2 x)^2 d\sin x$$

$$=\int(\sin^2 x-2\sin^4 x+\sin^6 x)d\sin x$$

$$=\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{2}{5}\sin^5 x+\frac{1}{7}\sin^7 x+C.$$

例 14 求 $\int\cos^2 x\mathrm{d}x$.

解 $\int\cos^2 x\mathrm{d}x=\int\frac{1+\cos 2x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\int\mathrm{d}x+\int\cos 2x\mathrm{d}x\right)$

$$=\frac{1}{2}\int\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int\cos 2x\mathrm{d}(2x)$$

$$=\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C.$$

类似地可得 $\int\sin^2 x\mathrm{d}x=\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C.$

例 15 求 $\int\cos^4 x\mathrm{d}x$

解 由于

$$\begin{aligned}\cos^4 x&=(\cos^2 x)^2\\&=\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2\\&=\frac{1}{4}(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)\\&=\frac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)\\&=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}+2\cos 2x+\frac{\cos 4x}{2}\right),\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\int\cos^4 x\mathrm{d}x&=\frac{1}{4}\int\left(\frac{3}{2}+2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\int\mathrm{d}x+\int 2\cos 2x\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\cos 4x\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{1}{4}\left[\frac{3x}{2}+\int\cos 2x\mathrm{d}(2x)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\int\cos 4x\mathrm{d}(4x)\right]\\&=\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.\end{aligned}$$

例 16 求 $\int\csc x\mathrm{d}x$.

解 $\int \csc x\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$

$$= \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin \frac{x}{2}\cos \frac{x}{2}}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}\,\frac{x}{2}}{\tan \frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}\tan \frac{x}{2}}{\tan \frac{x}{2}}$$

$$=\ln \left|\tan \frac{x}{2}\right|+C.$$

因为

$$\tan \frac{x}{2}=\frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin x}=\frac{1-\cos x}{\sin x}=\csc x-\cot x,$$

所以上述不定积分又可表为：

$$\int \csc x\mathrm{d}x=\ln |\csc x-\cot x|+C.$$

例 17 求 $\int \sec x\mathrm{d}x$.

解 $\int \sec x\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$

$$= \int \frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin \left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$=\ln \left|\csc \left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cot \left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|+C$$

$$=\ln |\sec x+\tan x|+C.$$

例 18 求 $\int \sec^6 x\mathrm{d}x$.

解 $\int \sec^6 x dx = \int (\sec^2 x)^2 \sec^2 x dx$

$$= \int (1+\tan^2 x)^2 d\tan x$$

$$= \int (1+2\tan^2 x+\tan^4 x) d\tan x$$

$$= \tan x+\frac{2}{3}\tan^3 x+\frac{1}{5}\tan^5 x+C.$$

例 19 求 $\int \tan^5 x \sec^3 x dx$.

解 $\int \tan^5 x\sec^3 x dx = \int \tan^4 x\sec^2 x\sec x\tan x dx$

$$= \int (\sec^2 x-1)^2\sec^2 x d\sec x$$

$$= \int (\sec^6 x-2\sec^4 x+\sec^2 x) d\sec x$$

$$= \frac{1}{7}\sec^7 x-\frac{2}{5}\sec^5 x+\frac{1}{3}\sec^3 x+C.$$

例 20 求 $\int \cos 3x\cos 2x dx$.

解 利用三角学中的积化和差公式

$$\cos A\cos B=\frac{1}{2}[\cos(A-B)+\cos(A+B)]$$

得
$$\cos 3x\cos 2x=\frac{1}{2}(\cos x+\cos 5x),$$

于是 $\int \cos 3x\cos 2x dx = \frac{1}{2}\int (\cos x+\cos 5x) dx$

$$= \frac{1}{2}\left(\int \cos x dx+\frac{1}{5}\int \cos 5x d(5x)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{10}\sin 5x+C.$$

上面所举的例子，可以使我们认识到公式(1)在求不定积分中所起的作用. 象复合函数的求导法则在微分学中一样，公式(1)在积分学中也是经常使用的. 但利用公式(1)来求不定积分，一般却比利用复合函数的求导法则求函数的导数要来得困难，因为其中需要一定的技巧，而且如何适当地选择变量代换 $u=\varphi(x)$ 没有一

般途径可循，因此要掌握换元法，除了熟悉一些典型的例子外，还要做较多的练习才行.

上述各例用的都是第一类换元法，即形如 $u=\varphi(x)$ 的变量代换. 下面介绍另一种形式的变量代换 $x=\psi(t)$，即所谓第二类换元法.

二、第二类换元法

上面介绍的第一类换元法是通过变量代换 $u=\varphi(x)$，将积分 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x$ 化为积分 $\int f(u)\mathrm{d}u$.

下面将介绍的第二类换元法是：适当地选择变量代换 $x=\psi(t)$，将积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 化为积分 $\int f[\psi(t)]\psi'(t)\mathrm{d}t$. 这是另一种形式的变量代换，换元公式可表为

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f[\psi(t)]\psi'(t)\mathrm{d}t.$$

这公式的成立是需要一定条件的. 首先，等式右边的不定积分要存在，即 $f[\psi(t)]\psi'(t)$ 有原函数；其次，$\int f[\psi(t)]\psi'(t)\mathrm{d}t$ 求出后必须用 $x=\psi(t)$ 的反函数 $t=\bar{\psi}(x)$ 代回去，为了保证这反函数存在而且是单值可导的，我们假定直接函数 $x=\psi(t)$ 在 t 的某一个区间（这区间和所考虑的 x 的积分区间相对应）上是单调的、可导的，并且 $\psi'(t)\neq 0$.

归纳上述，我们给出下面的定理.

定理 2 **设** $x=\psi(t)$ **是单调的、可导的函数，并且** $\psi'(t)\neq 0$. **又设** $f[\psi(t)]\psi'(t)$ **具有原函数，则有换元公式**

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\left[\int f[\psi(t)]\psi'(t)\mathrm{d}t\right]_{t=\bar{\psi}(x)},\tag{2}$$

其中 $\bar{\psi}(x)$ **是** $x=\psi(t)$ **的反函数.**

证 设 $f[\psi(t)]\psi'(t)$ 的原函数为 $\Phi(t)$，记 $\Phi[\bar{\psi}(x)]=F(x)$，利用复合函数的求导法则及反函数的导数公式，得到

$$F'(x)=\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=f[\psi(t)]\psi'(t)\cdot\frac{1}{\psi'(t)}$$
$$=f[\psi(t)]=f(x),$$
即 $F(x)$是 $f(x)$的原函数. 所以有

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)-C=\Phi[\bar{\psi}(x)]+C$$
$$=\left[\int f[\psi(t)]\psi'(t)\mathrm{d}t\right]_{t=\bar{\psi}(x)}.$$
这就证明了公式(2).

下面举例说明换元公式(2)的应用.

例 21 求 $\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x\quad(a>0)$.

解 求这个积分的困难在于有根式 $\sqrt{a^2-x^2}$,但我们可以利用三角公式

$$\sin^2 t+\cos^2 t=1$$
来化去根式.

设 $x=a\sin t,-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$,那末 $\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\cos t$,$\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$,于是根式化成了三角式,所求积分化为

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\int a\cos t\cdot a\cos t\mathrm{d}t=a^2\int\cos^2 t\mathrm{d}t.$$
利用例 14 的结果得

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=a^2\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right)+C$$
$$=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{2}\sin t\cos t+C.$$

由于 $x=a\sin t,-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$,所以

$$t=\arcsin\frac{x}{a},$$

$$\cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}-\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a},$$
于是所求积分为

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

例 22 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}\quad(a>0)$.

解 和上例类似，可以利用三角公式

$$1+\tan^2 t=\sec^2 t$$

来化去根式.

设 $x=a\tan t\quad\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$，那末 $\sqrt{x^2+a^2}=\sqrt{a^2+a^2\tan^2 t}$ $=a\sqrt{1+\tan^2 t}=a\sec t$，$\mathrm{d}x=a\sec^2 t\mathrm{d}t$，于是

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\int \frac{a\sec^2 t}{a\sec t}\mathrm{d}t=\int \sec t\mathrm{d}t.$$

利用例 17 的结果得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln|\sec t+\tan t|+C.$$

为了要把 $\sec t$ 及 $\tan t$ 换成 x 的函数，可以根据 $\tan t=\frac{x}{a}$ 作辅助三角形(图 4－3)，便有

$$\sec t=\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a},$$

且 $\sec t+\tan t>0$，因此，

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln\left(\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right)+C$$
$$=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C_1,$$

其中 $C_1=C-\ln a$.

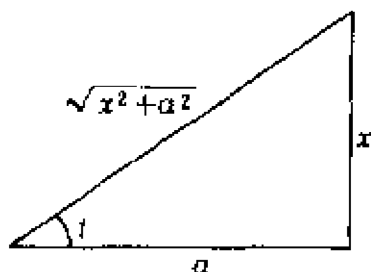


图 4—3

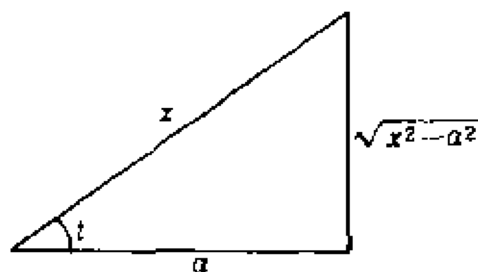


图 4—4

例 23 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $(a>0)$.

解 和以上两例类似，可以利用公式

$$\sec^2 t-1=\tan^2 t$$

来化去根式. 注意到被积函数的定义域是 $x>a$ 和 $x<-a$ 两个区间，我们在两个区间内分别求不定积分.

当 $x>a$ 时，设 $x=a\sec t$ $\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$，那末

$$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2\sec^2 t-a^2}=a\sqrt{\sec^2 t-1}=a\tan t,$$

$$\mathrm{d}x=a\sec t\tan t\mathrm{d}t,$$

于是

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\int \frac{a\sec t\tan t}{a\tan t}\mathrm{d}t=\int \sec t\mathrm{d}t$$

$$=\ln(\sec t+\tan t)+C.$$

为了把 $\sec t$ 及 $\tan t$ 换成 x 的函数，我们根据 $\sec t=\frac{x}{a}$ 作辅助三角形(图 4—4)，得到

$$\tan t=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a},$$

因此，

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln\left(\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)+C$$

$$=\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C_1,$$

其中 $C_1=C-\ln a$.

当 $x<-a$ 时，令 $x=-u$，那末 $u>a$. 由上段结果，有

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}=-\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2-a^2}}=-\ln\ (u+\sqrt{u^2-a^2})+C$$

$$=-\ln\ (-x+\sqrt{x^2-a^2})+C$$

$$=\ln \frac{-x-\sqrt{x^2-u^2}}{a^2}-C$$

$$=\ln\ (-x-\sqrt{x^2-a^2})+C_1,$$

其中 $C_1=C-2\ln a$.

把在 $x>a$ 及 $x<-a$ 内的结果合起来，可写作

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln\ |x+\sqrt{x^2-a^2}|+C.$$

从上面的三个例子可以看出：如果被积函数含有 $\sqrt{a^2-x^2}$，可以作代换 $x=a\sin t$ 化去根式；如果被积函数含有 $\sqrt{x^2+a^2}$，可以作代换 $x=a\tan t$ 化去根式；如果被积函数含有 $\sqrt{x^2-a^2}$，可以作代换 $x=\pm a\sec t$ 化去根式. 但具体解题时要分析被积函数的具体情况，选取尽可能简捷的代换，不要拘泥于上述的变量代换(如例 4、例 8).

当被积函数含有 $\sqrt{x^2\pm a^2}$ 时，为了化去根式，除采用三角代换 $x=a\tan t$ 或 $x=\pm a\sec t$ 外，还可利用公式

$$\mathrm{ch}^2 t-\mathrm{sh}^2 t=1,$$

采用双曲代换 $x=a\,\mathrm{sh}\ t$、$x=\pm a\,\mathrm{ch}\ t$ 来化去根式.

例如，在例 22 中，可设 $x=a\,\mathrm{sh}\ t$，那末 $\sqrt{x^2+a^2}=\sqrt{a^2\mathrm{sh}^2 t+a^2}=a\,\mathrm{ch}\ t$，$\mathrm{d}x=a\,\mathrm{ch}\ t\mathrm{d}t$，于是

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\int \frac{a\,\mathrm{ch}\ t}{a\,\mathrm{ch}\ t}\mathrm{d}t=\int \mathrm{d}t=t+C$$

$$=\mathrm{arsh}\ \frac{x}{a}+C$$

$$=\ln\left[\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\right]+C$$

$$=\ln\ (x+\sqrt{x^2+a^2})+C_1,$$

其中 $C_1=C-\ln a$.

在例 23 中，当 $x>a$ 时，可设 $x=a\text{ch }t(t>0)$，那末

$$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2\text{ch}^2 t-a^2}=a\text{sh }t,$$

$$\mathrm{d}x=a\text{sh }t\mathrm{d}t,$$

于是当 $x>a$ 时，

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}&=\int\frac{a\text{sh }t}{a\text{sh }t}\mathrm{d}t=\int\mathrm{d}t=t+C\\&=\text{arch }\frac{x}{a}+C\\&=\ln\left[\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\right]+C\\&=\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C_1,\end{aligned}$$

其中 $C_1=C-\ln a$.

当 $x<-a$ 时，令 $x=-a\text{ch }t\quad(t>0)$，类似可得

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln(-x-\sqrt{x^2-a^2})+C_1.$$

下面我们通过例子来介绍一种也很有用的代换——倒代换，利用它常可消去在被积函数的分母中的变量因子 x.

例 24 求 $\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}\mathrm{d}x$.

解 设 $x=\frac{1}{t}$，那末 $\mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$，于是

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}\mathrm{d}x&=\int\frac{\sqrt{a^2-\frac{1}{t^2}}\cdot\left(-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\right)}{\frac{1}{t^4}}\\&=-\int(a^2t^2-1)^{\frac{1}{2}}|t|\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

当 $x>0$ 时，有

$$\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2a^2}\int(a^2t^2-1)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(a^2t^2-1)$$

$$=-\frac{(a^2t^2-1)^{\frac{3}{2}}}{3a^2}+C$$

$$=-\frac{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3a^2x^3}+C,$$

当 $x<0$ 时，有相同的结果.

在本节的例题中，有几个积分是以后经常会遇到的.所以它们通常也被当作公式使用.这样，常用的积分公式，除了基本积分表中的几个外，再添加下面几个(其中常数 $a>0$)：

⑯ $\int \tan x\mathrm{d}x=-\ln|\cos x|+C$,

⑰ $\int \cot x\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+C$,

⑱ $\int \sec x\mathrm{d}x=\ln|\sec x+\tan x|+C$,

⑲ $\int \csc x\mathrm{d}x=\ln|\csc x-\cot x|+C$,

⑳ $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$,

㉑ $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$,

㉒ $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$,

㉓ $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$,

㉔ $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$.

例 25 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+3}$.

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+3}=\int \frac{1}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}\mathrm{d}(x+1)$,

利用公式⑳，便得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+3}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

例 26 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}}$.

解 $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}}=\int \frac{dx}{\sqrt{(2x)^2+3^2}}=\frac{1}{2}\int \frac{d(2x)}{\sqrt{(2x)^2+3^2}}$,

利用公式㉓,便得

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}}=\frac{1}{2}\ln\left(2x+\sqrt{4x^2+9}\right)+C.$$

例 27 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$.

解 $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}=\int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}$,

利用公式㉒,便得

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}=\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C.$$

习 题 4—2

1. 在下列各式等号右端的空白处填入适当的系数,使等式成立(例如:$dx=\frac{1}{4}d(4x+7)$):

(1) $dx=\quad d(ax)$;

(2) $dx=\quad d(7x-3)$;

(3) $xdx=\quad d(x^2)$;

(4) $xdx=\quad d(5x^2)$;

(5) $xdx=\quad d(1-x^2)$;

(6) $x^3dx=\quad d(3x^4-2)$;

(7) $e^{2x}dx=\quad d(e^{2x})$;

(8) $e^{-\frac{x}{2}}dx=\quad d(1+e^{-\frac{x}{2}})$;

(9) $\sin\frac{3}{2}xdx=\quad d(\cos\frac{3}{2}x)$;

(10) $\frac{dx}{x}=\quad d(5\ln|x|)$;

(11) $\frac{dx}{x}=\quad d(3-5\ln|x|)$;

(12) $\frac{dx}{1+9x^2}=\quad d(\arctan 3x)$;

(13) $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\quad d(1-\arcsin x)$;

(14) $\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=\quad d(\sqrt{1-x^2})$.

2. 求下列不定积分(其中 a、b、ω、φ 均为常数):

(1) $\int e^{5t}dt$;

(2) $\int (3-2x)^3dx$;

(3) $\int \frac{dx}{1-2x}$;

(4) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-3x}}$;

(5) $\int (\sin ax - e^{\frac{x}{b}})dx$;

(6) $\int \frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$;

(7) $\int \tan^{10} x \cdot \sec^2 x dx$;

(8) $\int \frac{dx}{x\ln x\ln\ln x}$;

(9) $\int \tan\sqrt{1+x^2} \cdot \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$;

(10) $\int \frac{dx}{\sin x\cos x}$;

(11) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$;

(12) $\int xe^{-x^2}dx$;

(13) $\int x\cos(x^2)dx$;

(14) $\int \frac{x}{\sqrt{2-3x^2}}dx$;

(15) $\int \frac{3x^3}{1-x^4}dx$;

(16) $\int \cos^2(\omega t+\varphi)\sin(\omega t+\varphi)dt$;

(17) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$;

(18) $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx$;

(19) $\int \frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}}dx$;

(20) $\int \frac{x^3}{9+x^2}dx$;

(21) $\int \frac{dx}{2x^2-1}$;

(22) $\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)}$;

(23) $\int \cos^3 x dx$;

(24) $\int \cos^2(\omega t+\varphi)dt$;

(25) $\int \sin 2x\cos 3x dx$;

(26) $\int \cos x\cos\frac{x}{2}dx$;

(27) $\int \sin 5x\sin 7x dx$;

(28) $\int \tan^3 x\sec x dx$;

(29) $\int \frac{10^{2\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

(30) $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$;

(31) $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$;

(32) $\int \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}dx$;

(33) $\int \frac{\ln\tan x}{\cos x\sin x}dx$;

(34) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $(a>0)$;

(35) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;

(36) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$;

(37) $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx$;

(38) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{2x}}$;

(39) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}}$;　　(40) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}$.

第三节　分部积分法

前面我们在复合函数求导法则的基础上，得到了换元积分法．现在我们利用两个函数乘积的求导法则，来推得另一个求积分的基本方法——分部积分法．

设函数 $u=u(x)$ 及 $v=v(x)$ 具有连续导数．那末，两个函数乘积的导数公式为

$$(uv)'=u'v+uv',$$

移项，得

$$uv'=(uv)'-u'v.$$

对这个等式两边求不定积分，得

$$\int uv'\mathrm{d}x=uv-\int u'v\mathrm{d}x. \tag{1}$$

公式(1)称为分部积分公式．如果求 $\int uv'\mathrm{d}x$ 有困难，而求 $\int u'v\mathrm{d}x$ 比较容易时，分部积分公式就可以发挥作用了．

为简便起见，也可把公式(1)写成下面的形式：

$$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u. \tag{2}$$

现在通过例子说明如何运用这个重要公式．

例1　求 $\int x\cos x\mathrm{d}x$.

解　这个积分用换元积分法不易求得结果．现在试用分部积分法来求它．但是怎样选取 u 和 $\mathrm{d}v$ 呢？如果设 $u=x$，$\mathrm{d}v=\cos x\mathrm{d}x$，那末 $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$，$v=\sin x$，代入分部积分公式(2)，得

$$\int x\cos x\mathrm{d}x=x\sin x-\int \sin x\mathrm{d}x,$$

而 $\int v\mathrm{d}u=\int \sin x\mathrm{d}x$ 容易积出，所以

$$\int x\cos x\mathrm{d}x=x\sin x+\cos x+C.$$

求这个积分时，如果设 $u=\cos x$，$\mathrm{d}v=x\mathrm{d}x$，那末

$$du=-\sin x dx, v=\frac{x^2}{2}.$$

于是 $$\int x\cos x dx=\frac{x^2}{2}\cos x+\int\frac{x^2}{2}\sin x dx.$$

上式右端的积分比原积分更不容易求出.

由此可见，如果 u 和 dv 选取不当，就求不出结果. 所以应用分部积分法时，恰当选取 u 和 dv 是一个关键. 选取 u 和 dv 一般要考虑下面两点：

(1) v 要容易求得；

(2) $\int v du$ 要比 $\int u dv$ 容易积出.

例 2 求 $\int xe^x dx$.

解 设 $u=x, dv=e^x dx$，那末 $du=dx, v=e^x$. 于是

$$\int xe^x dx=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+C=e^x(x-1)+C.$$

例 3 求 $\int x^2e^x dx$.

解 设 $u=x^2, dv=e^x dx$，那末 $du=2x dx, v=e^x$. 于是

$$\int x^2e^x dx=x^2e^x-2\int xe^x dx.$$

这里 $\int xe^x dx$ 比 $\int x^2e^x dx$ 容易积出，因为被积函数中 x 的幂次前者比后者降低了一次. 由例 2 可知，对 $\int xe^x dx$ 再使用一次分部积分法就可以了. 于是

$$\begin{aligned}\int x^2e^x dx&=x^2e^x-2\int xe^x dx\\&=x^2e^x-2(xe^x-e^x)+C\\&=e^x(x^2-2x+2)+C.\end{aligned}$$

总结上面三个例子可以知道，如果[被积函数是幂函数和正(余)弦函数或幂函数和指数函数的乘积，就可以考虑用分部积分法，并设幂函数为 u. 这样用一次分部积分法就可以使幂函数的幂次降低一次. 这里假定幂指数是正整数.]

例 4 求 $\int x\ln x\mathrm{d}x$.

解 设 $u=\ln x, \mathrm{d}v=x\mathrm{d}x$，那末 $\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x, v=\frac{x^2}{2}$，利用分部积分公式得

$$\int x\ln x\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int x\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C.$$

例 5 求 $\int \arccos x\mathrm{d}x$.

解 设 $u=\arccos x, \mathrm{d}v=\mathrm{d}x$，那末 $\mathrm{d}u=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x, v=x$. 于是

$$\begin{aligned}\int \arccos x\mathrm{d}x &=x\arccos x+\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\\ &=x\arccos x-\frac{1}{2}\int \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}(1-x^2)\\ &=x\arccos x-\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C\\ &=x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C.\end{aligned}$$

例 6 求 $\int x\arctan x\mathrm{d}x$.

解 设 $u=\arctan x, \mathrm{d}v=x\mathrm{d}x$，那末 $\mathrm{d}u=\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x, v=\frac{x^2}{2}$.

于是

$$\begin{aligned}\int x\arctan x\mathrm{d}x &=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x\\ &=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\mathrm{d}x\\ &=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\int \left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x\\ &=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}(x-\arctan x)+C\\ &=\frac{1}{2}(x^2+1)\arctan x-\frac{1}{2}x+C.\end{aligned}$$

总结上面三个例子可以知道，如果被积函数是幂函数和对数函数或幂函数和反三角函数的乘积，就可以考虑用分部积分法，并设对数函数或反三角函数为 u.

下面几个例子中所用的方法也是比较典型的.

例 7 求 $\int e^x \sin x\,dx$.

解 设 $u=e^x$，$dv=\sin x\,dx$，那末 $du=e^x dx$，$v=-\cos x$. 于是

$$\int e^x \sin x\,dx=-e^x\cos x+\int e^x\cos x\,dx.$$

等式右端的积分与等式左端的积分是同一类型的. 对右端的积分再用一次分部积分法：设 $u=e^x$，$dv=\cos x\,dx$，那末 $du=e^x dx$，$v=\sin x$. 于是

$$\int e^x\sin x\,dx=-e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\sin x\,dx.$$

由于上式右端的第三项就是所求的积分 $\int e^x\sin x\,dx$，把它移到等号左端去，再两端同除以 2，便得

$$\int e^x\sin x\,dx=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C.$$

因上式右端已不包含积分项，所以必须加上任意常数 C.

例 8 求 $\int \sec^3 x\,dx$.

解 设 $u=\sec x$，$dv=\sec^2 x\,dx$，那末 $du=\sec x\tan x\,dx$，$v=\tan x$. 于是

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x\,dx&=\sec x\tan x-\int\sec x\tan^2 x\,dx\\&=\sec x\tan x-\int\sec x(\sec^2 x-1)dx\\&=\sec x\tan x-\int\sec^3 x\,dx+\int\sec x\,dx\\&=\sec x\tan x+\ln|\sec x+\tan x|-\int\sec^3 x\,dx.\end{aligned}$$

由于上式右端的第三项就是所求的积分 $\int\sec^3 x\,dx$，把它移到等号

左端去，再两端各除以 2，便得

$$\int \sec^3 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\sec x\tan x+\ln|\sec x+\tan x|)+C.$$

例 9 求 $I_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$，其中 n 为正整数.

解 用分部积分法，当 $n>1$ 时有

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n-1}}=\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}+2(n-1)\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}+2(n-1)\int\left[\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}-\frac{a^2}{(x^2+a^2)^n}\right]\mathrm{d}x,$$

即
$$I_{n-1}=\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}+2(n-1)(I_{n-1}-a^2I_n),$$

于是
$$I_n=\frac{1}{2a^2(n-1)}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}+(2n-3)I_{n-1}\right].$$

以此作递推公式，并由 $I_1=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$，即可得 I_n.

在积分的过程中往往要兼用换元法与分部积分法，如例 5，下面再来举一个例子.

例 10 求 $\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解 令 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2$，$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$. 于是

$$\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t.$$

利用例 2 的结果，并用 $t=\sqrt{x}$ 代回，便得所求积分：

$$\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=2\mathrm{e}^t(t-1)+C$$

$$=2\mathrm{e}^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C.$$

习 题 4—3

求下列不定积分：

1. $\int x\sin x\mathrm{d}x$.　　2. $\int \ln x\mathrm{d}x$.

3. $\int \arcsin x\mathrm{d}x$.　　4. $\int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.

5. $\int x^2\ln x\mathrm{d}x$.　　　　6. $\int \mathrm{e}^{-x}\cos x\mathrm{d}x$.

7. $\int \mathrm{e}^{-2x}\sin\dfrac{x}{2}\mathrm{d}x$.　　　　8. $\int x\cos\dfrac{x}{2}\mathrm{d}x$.

9. $\int x^2\arctan x\mathrm{d}x$.　　　　10. $\int x\tan^2 x\mathrm{d}x$.

11. $\int x^2\cos x\mathrm{d}x$.　　　　12. $\int t\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t$.

13. $\int \ln^2 x\mathrm{d}x$.　　　　14. $\int x\sin x\cos x\mathrm{d}x$.

15. $\int x^2\cos^2\dfrac{x}{2}\mathrm{d}x$.　　　　16. $\int x\ln(x-1)\mathrm{d}x$.

17. $\int (x^2-1)\sin 2x\mathrm{d}x$.　　　　18. $\int \dfrac{\ln^3 x}{x^2}\mathrm{d}x$.

19. $\int \mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$.　　　　20. $\int \cos\ln x\mathrm{d}x$.

21. $\int (\arcsin x)^2\mathrm{d}x$.　　　　22. $\int \mathrm{e}^x\sin^2 x\mathrm{d}x$.

第四节　几种特殊类型函数的积分

前面已经介绍了求不定积分的两个基本方法——换元积分法与分部积分法.下面讨论几种比较简单的特殊类型函数的积分.

一、有理函数的积分

有理函数是指由两个多项式的商所表示的函数,即具有如下形式的函数:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}, \tag{1}$$

其中 m 和 n 都是非负整数;$a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n$ 及 $b_0,b_1,b_2,\cdots,b_m$ 都是实数,并且 $a_0\neq 0,b_0\neq 0$.

我们总假定在分子多项式 $P(x)$ 与分母多项式 $Q(x)$ 之间是没有公因式的.当有理函数(1)的分子多项式的次数 n 小于其分母多项式的次数 m,即 $n<m$ 时,称这有理函数是真分式;而当 $n\geqslant m$ 时,称这有理函数是假分式.

利用多项式的除法,总可以将一个假分式化成一个多项式和

一个真分式之和的形式. 例如

$$\frac{x^3+x+1}{x^2+1}=x+\frac{1}{x^2+1}.$$

多项式的积分容易求得，而要计算真分式的积分需要用到真分式的下列性质：

如果多项式 $Q(x)$ 在实数范围内能分解成一次因式和二次质因式的乘积，如

$$Q(x)=b_0(x-a)^\alpha\cdots(x-b)^\beta(x^2+px+q)^\lambda\cdots(x^2+rx+s)^\mu$$

（其中 $p^2-4q<0,\cdots,r^2-4s<0$），那末真分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 可以分解成如下部分分式之和：

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)}=&\frac{A_1}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}}+\cdots+\frac{A_\alpha}{x-a}\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+\frac{B_1}{(x-b)^\beta}+\frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}}+\cdots+\frac{B_\beta}{x-b}\\&+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^\lambda}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{\lambda-1}}+\cdots+\frac{M_\lambda x+N_\lambda}{x^2+px+q}\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+\frac{R_1x+S_1}{(x^2+rx+s)^\mu}+\frac{R_2x+S_2}{(x^2+rx+s)^{\mu-1}}+\cdots+\frac{R_\mu x+S_\mu}{x^2+rx+s},\end{aligned}\tag{2}$$

其中 A_i、…、B_i、M_i、N_i、…、R_i 及 S_i 等都是常数.

对于(2)式应注意到下列两点：

1）分母 $Q(x)$ 中如果有因式 $(x-a)^k$，那末分解后有下列 k 个部分分式之和：

$$\frac{A_1}{(x-a)^k}+\frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_k}{x-a},$$

其中 A_1、A_2、…、A_k 都是常数. 特别地，如果 $k=1$，那末分解后有 $\frac{A}{x-a}$；

2）分母 $Q(x)$ 中如果有因式 $(x^2+px-q)^k$，其中 $p^2-4q<0$，

那末分解后有下列 k 个部分分式之和：

$$\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^k}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{k-1}}+\cdots+\frac{M_kx+N_k}{x^2+px+q}.$$

其中 M_i、N_i 都是常数．特别地，如果 $k=1$，那末分解后有 $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$.

例如，真分式 $\dfrac{x+3}{x^2-5x+6}=\dfrac{x+3}{(x-2)(x-3)}$ 可分解成

$$\frac{x+3}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3},$$

其中 A、B 为待定常数，可以用如下的方法求出待定系数．

第一种方法　两端去分母后，得

$$x+3=A(x-3)+B(x-2), \tag{3}$$

或

$$x+3=(A+B)x-(3A+2B).$$

因为这是恒等式，等式两端 x 的系数和常数项必须分别相等，于是有

$$\begin{cases}A+B=1,\\-(3A+2B)=3,\end{cases}$$

从而解得

$$A=-5, B=6.$$

第二种方法　在恒等式(3)中，代入特殊的 x 值，从而求出待定的常数．在(3)式中

令 $x=2$，得 $A=-5$；

令 $x=3$，得 $B=6$.

同样得到

$$\frac{x+3}{(x-2)(x-3)}=\frac{-5}{x-2}+\frac{6}{x-3}.$$

又如，真分式 $\dfrac{1}{x(x-1)^2}$ 可分解成

$$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1},$$

再求待定系数 A、B、C．两端去分母后，得

$$1=A(x-1)^2+Bx+Cx(x-1). \tag{4}$$

在(4)式中，令 $x=0$，得 $A=1$；令 $x=1$，得 $B=1$. 把 A,B 的值代人(4)式，并令 $x=2$，得 $1=1+2+2C$，即 $C=-1$. 所以

$$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}.$$

再如，真分式 $\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}$ 可分解成

$$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\frac{A}{1+2x}+\frac{Bx+C}{1+x^2},$$

两端去分母后，得

$$1=A(1+x^2)+(Bx+C)(1+2x),$$

或

$$1=(A+2B)x^2+(B+2C)x+C+A. \tag{5}$$

比较(5)式两端 x 的各同次幂的系数及常数项，有

$$\begin{cases}A+2B=0,\\B+2C=0,\\A+C=1.\end{cases}$$

解之得
$$A=\frac{4}{5}, B=-\frac{2}{5}, C=\frac{1}{5}.$$

于是
$$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\frac{\frac{4}{5}}{1+2x}+\frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2}.$$

下面举几个有理真分式的积分例子.

例 1 求 $\int\frac{x+3}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x$.

解 因为

$$\frac{x+3}{x^2-5x+6}=\frac{x+3}{(x-2)(x-3)}=\frac{-5}{x-2}+\frac{6}{x-3},$$

所以

$$\int\frac{x+3}{(x-2)(x-3)}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{-5}{x-2}+\frac{6}{x-3}\right)\mathrm{d}x$$
$$=-5\int\frac{1}{x-2}\mathrm{d}x+6\int\frac{1}{x-3}\mathrm{d}x$$
$$=-5\ln|x-2|+6\ln|x-3|+C.$$

例 2 求 $\int\frac{x-2}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x$.

解 由于被积函数的分母是二次质因式，所以应另想别的方法. 因为分子是一次式 $x-2$，而分母的导数也是一个一次式：$(x^2+2x+3)'=2x+2$，所以可以把分子拆成两部分之和：一部分是分母的导数乘上一个常数因子；另一部分是常数，即

$$x-2=\left[\frac{1}{2}(2x+2)-1\right]-2$$
$$=\frac{1}{2}(2x+2)-3.$$

这样，所求的积分可计算如下：

$$\int\frac{x-2}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x$$
$$=\int\frac{\frac{1}{2}(2x+2)-3}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x-3\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+3}$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+2x+3)}{x^2+2x+3}-3\int\frac{\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}$$
$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)-\frac{3}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

例 3 求 $\int\frac{1}{x(x-1)^2}\mathrm{d}x$.

解 因为

$$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1},$$

所以

$$\int \frac{1}{x(x-1)^2}dx = \int \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right]dx$$

$$= \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx$$

$$= \ln |x| - \ln |x-1| - \frac{1}{x-1} + C.$$

例 4 求 $\int \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}dx$.

解 因为

$$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)} = \frac{\frac{4}{5}}{1+2x} + \frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2},$$

所以

$$\int \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}dx$$

$$= \int \left(\frac{\frac{4}{5}}{1+2x} + \frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \frac{2}{5}\int \frac{2}{1+2x}dx - \frac{1}{5}\int \frac{2x}{1+x^2}dx + \frac{1}{5}\int \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{2}{5}\int \frac{1}{1+2x}d(1+2x) - \frac{1}{5}\int \frac{1}{1+x^2}d(1+x^2) + \frac{1}{5}\int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \frac{2}{5}\ln |1+2x| - \frac{1}{5}\ln (1+x^2) + \frac{1}{5}\arctan x + C.$$

当有理函数分解为多项式及部分分式之和以后，只出现多项式、$\frac{A}{(x-a)^n}$及$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$等三类函数. 前两类函数的积分很简单，下面讨论积分 $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx$.

把分母中的二次质因式配方得

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4},$$

故令 $x+\frac{p}{2}=t$，并记 $x^2+px+q=t^2+a^2$，$Mx+N=Mt+b$，其中 $a^2=q-\frac{p^2}{4}$，$b=N-\frac{Mp}{2}$，于是

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x=\int \frac{Mt\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^n}+\int \frac{b\mathrm{d}t}{(t^2-a^2)^n}.$$

当 $n=1$ 时(如例 2),有

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\mathrm{d}x=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{b}{a}\arctan\frac{x+\frac{p}{2}}{a}+C.$$

当 $n>1$ 时,

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x=-\frac{M}{2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}}+b\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^n},$$

上式最后一个积分的求法见上节例 9.

总之,有理函数分解为多项式及部分分式之和以后,各个部分都能积出,且原函数都是初等函数.此外,由代数学知道,从理论上说,多项式 $Q(x)$ 总可以在实数范围内分解成一次因式及二次质因式的乘积,从而把有理函数$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$分解为多项式与部分分式之和.因此,**有理函数的原函数都是初等函数**.

二、三角函数有理式的积分

所谓三角函数有理式是指由三角函数和常数经过有限次四则运算所构成的函数.由于各种三角函数都可用 $\sin x$ 及 $\cos x$ 的有理式表示,故三角函数有理式也就是 $\sin x$、$\cos x$ 的有理式,记作 $R(\sin x,\cos x)$,其中 $R(u,v)$表示 u、v 两个变量的有理式.下面举一个比较简单的三角函数有理式的积分的例子.

例 5 求 $\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x$.

解 由三角学知道,$\sin x$ 与 $\cos x$ 都可以用 $\tan\dfrac{x}{2}$的有理式表示,即

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}},$$

$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}.$$

所以如果作变换 $u=\tan\frac{x}{2}$，那末

$$\sin x=\frac{2u}{1+u^2},$$

$$\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2},$$

而 $x=2\arctan u$，从而

$$\mathrm{d}x=\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u.$$

于是

$$\begin{aligned}\int\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x&=\int\frac{\left(1+\frac{2u}{1+u^2}\right)\frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}}{\frac{2u}{1+u^2}\left(1+\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)}\\&=\frac{1}{2}\int\left(u+2+\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{2}+2u+\ln|u|\right)+C\\&=\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|\\&\quad+C.\end{aligned}$$

变量代换 $u=\tan\frac{x}{2}$ 对三角函数有理式的积分都可以应用. 事实上，经变换 $u=\tan\frac{x}{2}$ 后，有

$$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x=\int R\left(\frac{2u}{1+u^2},\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u,$$

即化为 u 的有理函数的积分. 不过，化出的有理函数的积分往往比较繁，因此这种代换不一定是最简捷的代换.

例如，求积分

$$\int \frac{\cos x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$$

时，只要设 $u=1+\sin x$，即可得

$$\int \frac{\cos x}{1+\sin x}\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{d}(1+\sin x)}{1+\sin x}$$
$$=\ln (1+\sin x)+C.$$

三、简单无理函数的积分

这里，我们只讨论 $R(x,\sqrt[n]{ax+b})$ 及 $R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}}\right)$ 这两类函数的积分，其中 $R(x,u)$ 表示 x、u 两个变量的有理式.

例 6 求 $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}\mathrm{d}x$.

解 为了去掉根号，可以设 $\sqrt{x-1}=u$，于是 $x=u^2+1$，$\mathrm{d}x=2u\mathrm{d}u$，从而所求积分为

$$\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}\mathrm{d}x=\int \frac{u}{u^2+1}\cdot 2u\mathrm{d}u=2\int \frac{u^2}{u^2+1}\mathrm{d}u$$
$$=2\int\left(1-\frac{1}{1+u^2}\right)\mathrm{d}u=2(u-\arctan u)+C$$
$$=2(\sqrt{x-1}-\arctan \sqrt{x-1})+C.$$

例 7 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x+2}}$.

解 为了去掉根号，可以设 $\sqrt[3]{x+2}=u$. 于是 $x=u^3-2$，$\mathrm{d}x=3u^2\mathrm{d}u$，从而所求积分为

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x+2}}=\int \frac{3u^2}{1+u}\mathrm{d}u=3\int \frac{u^2-1+1}{1+u}\mathrm{d}u$$
$$=3\int\left(u-1+\frac{1}{1+u}\right)\mathrm{d}u=3\left(\frac{u^2}{2}-u+\ln|1+u|\right)+C$$
$$=\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+2)^2}-3\sqrt[3]{x+2}+3\ln|1+\sqrt[3]{x+2}|+C.$$

例 8 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$.

解 被积函数中出现了两个根式 $\sqrt{x}$ 及 $\sqrt[3]{x}$. 为了能同时消去这两个根式，可令 $x=t^6$. 于是 $dx=6t^5dt$，从而所求积分为

$$\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}=\int \frac{6t^5}{(1+t^2)t^3}dt=6\int \frac{t^2}{1+t^2}dt$$

$$=6\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=6(t-\arctan t)+C$$

$$=6(\sqrt[6]{x}-\arctan \sqrt[6]{x})+C.$$

例 9 求 $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx$.

解 为了去掉根号，可以设 $\sqrt{\frac{1+x}{x}}=t$，于是 $\frac{1+x}{x}=t^2$，$x=\frac{1}{t^2-1}$，$dx=-\frac{2tdt}{(t^2-1)^2}$，从而所求积分为

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx=\int (t^2-1)t\cdot\frac{-2t}{(t^2-1)^2}dt=-2\int \frac{t^2}{t^2-1}dt$$

$$=-2\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=-2t-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$=-2t+2\ln(t+1)-\ln|t^2-1|+C$$

$$=-2\sqrt{\frac{1+x}{x}}+2\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}+1\right)+\ln|x|+C.$$

习 题 4—4

求下列不定积分：

1. $\int \frac{x^3}{x+3}dx$.
2. $\int \frac{2x+3}{x^2+3x-10}dx$.
3. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-x}dx$.
4. $\int \frac{3}{x^3+1}dx$.
5. $\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.
6. $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx$.
7. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$.
8. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$.
9. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$.
10. $\int \frac{1}{x^4+1}dx$.

11. $\int \frac{x^2-2}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x$.　　12. $\int \frac{\mathrm{d}x}{3+\sin^2 x}$.

13. $\int \frac{\mathrm{d}x}{3+\cos x}$.　　14. $\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x}$.

15. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x+\cos x}$.　　16. $\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x-\cos x+5}$.

17. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.　　18. $\int \frac{(\sqrt{x})^3+1}{\sqrt{x}+1}\mathrm{d}x$.

19. $\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x-1}+1}\mathrm{d}x$.　　20. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$.

21. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{\mathrm{d}x}{x}$.　　22. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$.

第五节　积分表的使用

通过前面的讨论可以看出，积分的计算要比导数的计算来得灵活、复杂. 为了实用的方便，往往把常用的积分公式汇集成表，这种表叫做积分表. 积分表是按照被积函数的类型来排列的. 求积分时，可根据被积函数的类型直接地或经过简单的变形后，在表内查得所需的结果.

本书末附录Ⅱ有一个简单的积分表，以供查阅.

我们先举几个可以直接从积分表中查得结果的积分例子.

例 1　求 $\int \frac{x}{(3x+4)^2}\mathrm{d}x$.

解　被积函数含有 $ax+b$，在积分表(一)中查得公式(7)

$$\int \frac{x}{(ax+b)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{a^2}\left(\ln|ax+b|+\frac{b}{ax+b}\right)+C.$$

现在 $a=3$、$b=4$，于是

$$\int \frac{x}{(3x+4)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{9}\left(\ln|3x+4|+\frac{4}{3x+4}\right)+C.$$

例 2　求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{5-4\cos x}$.

解　被积函数含有三角函数，在积分表(十一)中查得关于积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x}$ 的公式，但是公式有两个，要看 $a^2>b^2$ 或 $a^2<b^2$ 而决

定采用哪一个.

现在 $a=5$、$b=-4$，$a^2>b^2$，所以用公式(105)

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x}$$

$$=\frac{2}{a+b}\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right)+C\quad(a^2>b^2).$$

于是

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{5-4\cos x}$$

$$=\frac{2}{5+(-4)}\sqrt{\frac{5+(-4)}{5-(-4)}}\arctan\left[\sqrt{\frac{5-(-4)}{5+(-4)}}\tan\frac{x}{2}\right]+C$$

$$=\frac{2}{3}\arctan\left(3\tan\frac{x}{2}\right)+C.$$

下面再举一个需要先进行变量代换，然后再查表求积分的例子.

例 3 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4x^2+9}}$.

解 这个积分不能在表中直接查到，需要先进行变量代换.

令 $2x=u$，那末 $\sqrt{4x^2+9}=\sqrt{u^2+3^2}$，$x=\frac{u}{2}$，$\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}u$. 于是

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4x^2+9}}=\int\frac{\frac{1}{2}\mathrm{d}u}{\frac{u}{2}\sqrt{u^2+3^2}}=\int\frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2+3^2}}.$$

被积函数中含有 $\sqrt{u^2+3^2}$，在积分表(六)中查到公式(37)

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{1}{a}\ln\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{|x|}+C.$$

现在 $a=3$，x 相当于 u，于是

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2+3^2}}=\frac{1}{3}\ln\frac{\sqrt{u^2+3^2}-3}{|u|}+C.$$

再把 $u=2x$ 代入，最后得到

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4x^2+9}}=\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2+3^2}}=\frac{1}{3}\ln \frac{\sqrt{u^2+3^2}-3}{|u|}+C.$$

$$=\frac{1}{3}\ln \frac{\sqrt{4x^2+9}-3}{2|x|}+C.$$

最后，举一个用递推公式求积分的例子.

例 4 求 $\int \sin^4 x\mathrm{d}x$.

解 在积分表(十一)中查到公式(95)

$$\int \sin^n x\mathrm{d}x=-\frac{\sin^{n-1} x\cos x}{n}+\frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x\mathrm{d}x.$$

利用这个公式可以使被积函数中正弦的幂次减少两次，只要重复使用这个公式，可以使正弦的幂次继续减少，直到求出最后结果为止，这种公式叫做递推公式.

现在 $n=4$，于是

$$\int \sin^4 x\mathrm{d}x=-\frac{\sin^3 x\cos x}{4}+\frac{3}{4}\int \sin^2 x\mathrm{d}x.$$

对积分 $\int \sin^2 x\mathrm{d}x$ 用公式(93)

$$\int \sin^2 x\mathrm{d}x=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x+C,$$

从而所求积分为

$$\int \sin^4 x\mathrm{d}x=-\frac{\sin^3 x\cos x}{4}+\frac{3}{4}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x\right)+C.$$

一般说来，查积分表可以节省计算积分的时间，但是，只有掌握了前面学过的基本积分方法才能灵活地使用积分表，而且对一些比较简单的积分，应用基本积分方法来计算比查表更快些，例如，对 $\int \sin^2 x\cos^2 x\mathrm{d}x$，用变换 $u=\sin x$ 很快就可得到结果. 所以，求积分时究竟是直接计算，还是查表，或是两者结合使用，应该作具体分析，不能一概而论.

在本章结束之前，我们还要指出：对初等函数来说，在其定义区间上，它的原函数一定存在，但原函数不一定都是初等函数，如

$$\int e^{-x^2}dx,\qquad \int \frac{\sin x}{x}dx,\qquad \int \frac{dx}{\ln x},\qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$$

等等，就都不是初等函数.

习 题 4-5

利用积分表计算下列不定积分：

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-9}}$.
2. $\int \frac{1}{x^2+2x+5}dx$.
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x+x^2}}$.
4. $\int \sqrt{2x^2+9}dx$.
5. $\int \sqrt{3x^2-2}dx$.
6. $\int e^{2x}\cos x dx$.
7. $\int x\arcsin \frac{x}{2}dx$.
8. $\int \frac{dx}{(x^2+9)^2}$.
9. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.
10. $\int e^{-2x}\sin 3x dx$.
11. $\int \sin 3x\sin 5x dx$.
12. $\int \ln^3 x dx$.
13. $\int \frac{1}{x^2(1-x)}dx$.
14. $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$.
15. $\int \frac{1}{(1+x^2)^2}dx$.
16. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$.
17. $\int \frac{x}{(2+3x)^2}dx$.
18. $\int \cos^6 x dx$.
19. $\int x^2\sqrt{x^2-2}dx$.
20. $\int \frac{1}{2+5\cos x}dx$.
21. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x-1}}$.
22. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$.
23. $\int \frac{x+5}{x^2-2x-1}dx$.
24. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$.
25. $\int \frac{x^4}{25-4x^2}dx$.

总 习 题 四

求下列不定积分（其中 a、b 为常数）：

1. $\int \frac{dx}{e^x-e^{-x}}$.
2. $\int \frac{x}{(1-x)^3}dx$.

3. $$\int \frac{x^2}{a^6 - x^6} dx \quad (a>0).$$

4. $$\int \frac{1+\cos x}{x+\sin x} dx.$$

5. $$\int \frac{\ln \ln x}{x} dx.$$

6. $$\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^4 x} dx.$$

7. $$\int \tan^4 x dx.$$

8. $$\int \sin x \sin 2x \sin 3x dx.$$

9. $$\int \frac{dx}{x(x^6-4)}.$$

10. $$\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx \quad (a>0).$$

11. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}.$$

12. $$\int x \cos^2 x dx.$$

13. $$\int e^{ax} \cos bx \, dx.$$

14. $$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}.$$

15. $$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-1}}.$$

16. $$\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{5/2}}.$$

17. $$\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^2}}.$$

18. $$\int \sqrt{x} \sin \sqrt{x} \, dx.$$

19. $$\int \ln (1+x^2) dx.$$

20. $$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx.$$

21. $$\int \arctan \sqrt{x} \, dx.$$

22. $$\int \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x} dx.$$

23. $$\int \frac{x^3}{(1+x^8)^2} dx.$$

24. $$\int \frac{x^{11}}{x^8+3x^4+2} dx.$$

25. $$\int \frac{dx}{16-x^4}.$$

26. $$\int \frac{\sin x}{1+\sin x} dx.$$

27. $$\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x} dx.$$

28. $$\int e^{\sin x} \frac{x \cos^3 x - \sin x}{\cos^2 x} dx.$$

29. $$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})} dx.$$

30. $$\int \frac{dx}{(1+e^x)^2}.$$

31. $$\int \frac{e^{3x}+e^x}{e^{4x}-e^{2x}+1} dx.$$

32. $$\int \frac{x e^x}{(e^x+1)^2} dx.$$

33. $$\int \ln^2 (x+\sqrt{1+x^2}) dx.$$

34. $$\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$$

35. $$\int \sqrt{1-x^2} \arcsin x dx.$$

36. $$\int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

37. $$\int \frac{\cot x}{1+\sin x} dx.$$

38. $$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}.$$

39. $$\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}.$$

40. $$\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x+\cos x} dx.$$

第五章　定　积　分

本章中将讨论积分学的另一个基本问题——定积分问题.我们先从几何与力学问题出发引进定积分的定义,然后讨论它的性质与计算方法.关于定积分的应用,将在第六章讨论.

第一节　定积分概念

一、定积分问题举例

1. 曲边梯形的面积

设 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上非负、连续.由直线 $x=a$、$x=b$、$y=0$ 及曲线 $y=f(x)$ 所围成的图形(如图 5—1)称为曲边梯形,其中曲线弧称为曲边.

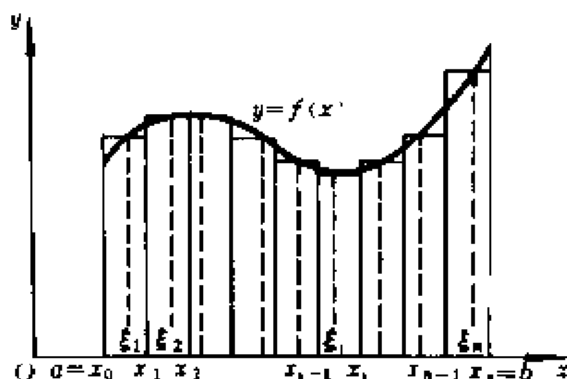


图　5—1

我们知道,矩形的高是不变的,它的面积可按公式

$$\text{矩形面积}=\text{高}\times\text{底}$$

来定义和计算.而曲边梯形在底边上各点处的高 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是变动的,故它的面积不能直接按上述公式来定义和计算.然

而，由于曲边梯形的高 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是连续变化的，在很小一段区间上它的变化很小，近似于不变. 因此，如果把区间 $[a,b]$ 划分为许多小区间，在每个小区间上用其中某一点处的高来近似代替同一个小区间上的窄曲边梯形的变高，那末，每个窄曲边梯形就可近似地看成这样得到的窄矩形. 我们就以所有这些窄矩形面积之和作为曲边梯形面积的近似值，并把区间 $[a,b]$ 无限细分下去，即使每个小区间的长度都趋于零，这时所有窄矩形面积之和的极限就可定义为曲边梯形的面积. 这个定义同时也给出了计算曲边梯形面积的方法，现详述于下.

在区间 $[a,b]$ 中任意插入若干个分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

把 $[a,b]$ 分成 n 个小区间

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},x_n],$$

它们的长度依次为

$$\Delta x_1=x_1-x_0,\Delta x_2=x_2-x_1,\cdots,\Delta x_n=x_n-x_{n-1}.$$

经过每一个分点作平行于 y 轴的直线段，把曲边梯形分成 n 个窄曲边梯形. 在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 ξ_i，以 $[x_{i-1},x_i]$ 为底、$f(\xi_i)$ 为高的窄矩形近似替代第 i 个窄曲边梯形 $(i=1,2,\cdots,n)$，把这样得到的 n 个窄矩形面积之和作为所求曲边梯形面积 A 的近似值，即

$$\begin{aligned}A&\approx f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+\cdots+f(\xi_n)\Delta x_n\\&=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.\end{aligned}$$

为了保证所有小区间的长度都无限缩小，我们要求小区间长度中的最大值趋于零，如记 $\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$，则上述条件可表为 $\lambda\to 0$. 当 $\lambda\to 0$ 时（这时分段数 n 无限增多，即 $n\to\infty$），取上述和式的极限，便得曲边梯形的面积

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

2. 变速直线运动的路程

设某物体作直线运动，已知速度 $v=v(t)$ 是时间间隔 $[T_1,T_2]$ 上 t 的连续函数，且 $v(t)\geqslant 0$，计算在这段时间内物体所经过的路程 s.

我们知道，对于等速直线运动，有公式：

$$路程=速度\times时间.$$

但是，在我们的问题中，速度不是常量而是随时间变化的变量，因此，所求路程 s 不能直接按等速直线运动的路程公式来计算. 然而，物体运动的速度函数 $v=v(t)$ 是连续变化的，在很短一段时间内，速度的变化很小，近似于等速. 因此，如果把时间间隔分小，在小段时间内、以等速运动代替变速运动，那末，就可算出部分路程的近似值；再求和，得到整个路程的近似值；最后，通过对时间间隔无限细分的极限过程，这时所有部分路程的近似值之和的极限，就是所求变速直线运动的路程的精确值.

具体计算步骤如下：

在时间间隔 $[T_1,T_2]$ 内任意插入若干个分点

$$T_1=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=T_2,$$

把 $[T_1,T_2]$ 分成 n 个小段

$$[t_0,t_1],[t_1,t_2],\cdots,[t_{n-1},t_n],$$

各小段时间的长依次为

$$\Delta t_1=t_1-t_0,\Delta t_2=t_2-t_1,\cdots,\Delta t_n=t_n-t_{n-1}.$$

相应地，在各段时间内物体经过的路程依次为

$$\Delta s_1,\Delta s_2,\cdots,\Delta s_n.$$

在时间间隔 $[t_{i-1},t_i]$ 上任取一个时刻 $\tau_i(t_{i-1}\leqslant\tau_i\leqslant t_i)$，以 τ_i 时的速度 $v(\tau_i)$ 来代替 $[t_{i-1},t_i]$ 上各个时刻的速度，得到部分路程 Δs_i 的近似值，即

$$\Delta s_i\approx v(\tau_i)\Delta t_i\qquad(i=1,2,\cdots,n).$$

于是这 n 段部分路程的近似值之和就是所求变速直线运动路程 s 的近似值，即

$$
\begin{aligned}
s &\approx v(\tau_1)\Delta t_1 + v(\tau_2)\Delta t_2 + \cdots + v(\tau_n)\Delta t_n \\
&= \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i.
\end{aligned}
$$

记 $\lambda=\max\{\Delta t_1,\Delta t_2,\cdots,\Delta t_n\}$，当 $\lambda\to 0$ 时，取上述和式的极限，即得变速直线运动的路程

$$
s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i.
$$

二、定积分定义

从上面两个例子可以看到：所要计算的量，即曲边梯形的面积 A 及变速直线运动的路程 s 的实际意义虽然不同，前者是几何量，后者是物理量，但是它们都决定于一个函数及其自变量的变化区间，如：

曲边梯形的高度 $y=f(x)$ 及其底边上的点 x 的变化区间 $[a,b]$，

直线运动的速度 $v=v(t)$ 及时间 t 的变化区间 $[T_1,T_2]$；

其次，计算这些量的方法与步骤都是相同的，并且它们都归结为具有相同结构的一种特定和的极限，如

$$
\text{面积 } A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,
$$

$$
\text{路程 } s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i.
$$

抛开这些问题的具体意义，抓住它们在数量关系上共同的本质与特性加以概括，我们就可以抽象出下述定积分的定义.

定义 **设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，在 $[a,b]$ 中任意插入若干个分点**

$$
a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,
$$

把区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间

$$
[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},x_n],
$$

各个小区间的长度依次为

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \cdots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}.$$

在每个小区间$[x_{i-1}, x_i]$上任取一点$\xi_i(x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i)$，作函数值$f(\xi_i)$与小区间长度$\Delta x_i$的乘积$f(\xi_i)\Delta x_i (i=1,2,\cdots,n)$，并作出和

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{1}$$

记$\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$，如果不论对$[a,b]$怎样分法，也不论在小区间$[x_{i-1}, x_i]$上点$\xi_i$怎样取法，只要当$\lambda \to 0$时，和$S$总趋于确定的极限$I$，这时我们称这个极限$I$为函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的**定积分**（简称**积分**），记作$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \tag{2}$$

其中$f(x)$叫做**被积函数**，$f(x)\mathrm{d}x$叫做**被积表达式**，x叫做**积分变量**，a叫做**积分下限**，b叫做**积分上限**，$[a,b]$叫做**积分区间**.

利用"$\varepsilon-\delta$"的说法，上述定积分的定义可以精确地表述如下：

设有常数I，如果对于任意给定的正数ε，总存在一个正数δ，使得对于区间$[a,b]$的任何分法，不论ξ_i在$[x_{i-1}, x_i]$中怎样取法，只要$\lambda < \delta$，总有

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I \right| < \varepsilon$$

成立，则称I是$f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分，记作$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

注意 当和$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$的极限存在时，其极限$I$仅与被积函数$f(x)$及积分区间$[a,b]$有关. 如果既不改变被积函数$f$，也不改变积分区间$[a,b]$，而只把积分变量$x$改写成其他字母，例如$t$或$u$，那末，这时和的极限$I$不变，也就是定积分的值不变，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u.$$

所以我们也说，定积分的值只与被积函数及积分区间有关，而与积分变量的记法无关.

和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 通常称为 $f(x)$的积分和. 如果 $f(x)$在$[a,b]$上的定积分存在,我们就说 $f(x)$在$[a,b]$上可积.

对于定积分,有这样一个重要问题:函数 $f(x)$在$[a,b]$上满足怎样的条件,$f(x)$在$[a,b]$上一定可积?这个问题我们不作深入讨论,而只给出以下两个充分条件.

定理1　设 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续,则 $f(x)$在$[a,b]$上可积.

定理2　设 $f(x)$在区间$[a,b]$上有界,且只有有限个间断点,则 $f(x)$在$[a,b]$上可积.

利用定积分的定义,前面所讨论的两个实际问题可以分别表述如下:

曲线 $y=f(x)(f(x)\geqslant 0)$、x 轴及两条直线 $x=a$、$x=b$ 所围成的曲边梯形的面积 A 等于函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分. 即

$$A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

物体以变速 $v=v(t)(v(t)\geqslant 0)$作直线运动,从时刻 $t=T_1$到时刻 $t=T_2$,这物体经过的路程 s 等于函数 $v(t)$在区间$[T_1,T_2]$上的定积分,即

$$s=\int_{T_1}^{T_2} v(t)\mathrm{d}t.$$

下面讨论定积分的几何意义. 在$[a,b]$上 $f(x)\geqslant 0$时,我们已经知道,定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 在几何上表示由曲线 $y=f(x)$、两条直线 $x=a$、$x=b$ 与 x 轴所围成的曲边梯形的面积;在$[a,b]$上$f(x)\leqslant 0$时,由曲线 $y=f(x)$、两条直线 $x=a$、$x=b$ 与 x 轴所围成的曲边梯形位于 x 轴的下方,定积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

在几何上表示上述曲边梯形面积的负值;在$[a,b]$上 $f(x)$既取得正值又取得负值时,函数 $f(x)$的图形某些部分在 x 轴的上方,而

其它部分在 x 轴的下方(图5－2). 如果我们对面积赋以正负号，在 x 轴上方的图形面积赋以正号，在 x 轴下方的图形面积赋以负号，则在一般情形下，定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的几何意义为：它是介于 x 轴、函数 $f(x)$ 的图形及两条直线 $x=a$、$x=b$ 之间的各部分面积的代数和.

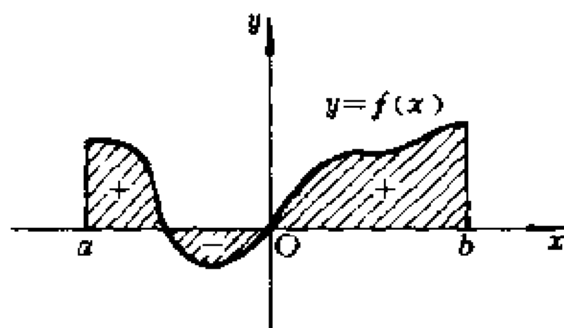


图 5－2

最后，我们举一个按定义计算定积分的例子.

例 利用定义计算定积分 $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$.

解 因为被积函数 $f(x)=x^2$ 在积分区间[0,1]上连续，而连续函数是可积的，所以积分与区间[0,1]的分法及点 ξ_i 的取法无关. 因此，为了便于计算，不妨把区间[0,1]分成 n 等份，分点为 $x_i=\frac{i}{n}$，$i=1,2,\cdots,n-1$；这样，每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 的长度 $\Delta x_i=\frac{1}{n}$，$i=1,2,\cdots,n$；取 $\xi_i=x_i$，$i=1,2,\cdots,n$. 于是，得和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}x_i^2\Delta x_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2$$

$$=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)^{①}$$

$$=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right).$$

当 $\lambda\to 0$ 即 $n\to\infty$ 时，取上式右端的极限. 由定积分的定义，即得所要计算的积分为

$$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}.$$

习 题 5—1

1. 利用定积分定义计算由抛物线 $y=x^2+1$，两直线 $x=a$、$x=b(b>a)$ 及横轴所围成的图形的面积.

2. 利用定积分定义计算下列积分：

(1) $\int_a^b x\mathrm{d}x\quad(a<b)$；　　　　(2) $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

3. 利用定积分的几何意义，说明下列等式：

(1) $\int_0^1 2x\mathrm{d}x=1$；　　　　(2) $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$；

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=0$；　　　　(4) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x$.

4. 水利工程中要计算拦水闸门所受的水压力. 已知闸门上水的压强 p

---

① 利用恒等式 $(n+1)^3=n^3+3n^2+3n+1$，得

$$\begin{cases}(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1,\\ n^3-(n-1)^3=3(n-1)^2+3(n-1)+1,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ 3^3-2^3=3\cdot 2^2+3\cdot 2+1,\\ 2^3-1^3=3\cdot 1^2+3\cdot 1+1.\end{cases}$$

把这 n 个等式两端分别相加，得

$$(n+1)^3-1=3(1^2+2^2+\cdots+n^2)+3(1+2+\cdots+n)+n.$$

由于

$$1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1),$$

代入上式，得

$$n^3+3n^2+3n=3(1^2+2^2+\cdots+n^2)+\frac{3}{2}n(n+1)+n.$$

整理后，得

$$1^2+2^2-\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

(单位面积上的压力大小)是水深 h 的函数,且有 $p=9.8h(\mathrm{kN/m^2})$. 若闸门高 $H=3\mathrm{m}$,宽 $L=2\mathrm{m}$,求水面与闸门顶相齐时闸门所受的水压力 P(图5—3).(kN 是千牛.)

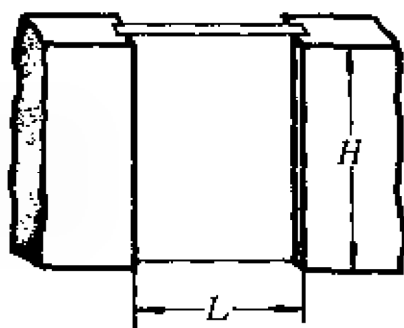


图 5—3

第二节 定积分的性质 中值定理

为了以后计算及应用方便起见,我们先对定积分作以下两点补充规定:

(1) 当 $a=b$ 时,$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$;

(2) 当 $a>b$ 时,$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

由上式可知,交换定积分的上下限时,绝对值不变而符号相反.

下面我们讨论定积分的性质. 下列各性质中积分上下限的大小,如不特别指明,均不加限制;并假定各性质中所列出的定积分都是存在的.

性质1 函数的和(差)的定积分等于它们的定积分的和(差),即

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

证

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[f(\xi_i)\pm g(\xi_i)]\Delta x_i$$

$$=\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \pm \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i$$

$$=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

性质1对于任意有限个函数都是成立的. 类似地,可以证明:

性质2　被积函数的常数因子可以提到积分号外面,即

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad (k\text{ 是常数}).$$

性质3　如果将积分区间分成两部分,则在整个区间上的定积分等于这两部分区间上定积分之和,即设 $a<c<b$,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

证　因为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积,所以不论把 $[a,b]$ 怎样分,积分和的极限总是不变的. 因此,我们在分区间时,可以使 c 永远是个分点. 那末,$[a,b]$ 上的积分和等于 $[a,c]$ 上的积分和加 $[c,b]$ 上的积分和,记为

$$\sum_{[a,b]} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{[a,c]}{}' f(\xi_i)\Delta x_i - \sum_{[c,b]}{}'' f(\xi_i)\Delta x_i.$$

令 $\lambda \to 0$,上式两端同时取极限,即得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

这个性质表明定积分对于积分区间具有可加性.

按定积分的补充规定,我们有:不论 a,b,c 的相对位置如何,总有等式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

成立. 例如,当 $a<b<c$ 时,由于

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x,$$

于是得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

性质4　如果在区间$[a,b]$上 $f(x)\equiv 1$**，则**

$$\int_a^b 1\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x = b-a.$$

这个性质的证明请读者自己完成.

性质5　如果在区间$[a,b]$**上**，$f(x)\geqslant 0$**，则**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0 \quad (a<b).$$

证　因为 $f(x)\geqslant 0$，所以 $f(\xi_i)\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$. 又由于 $\Delta x_i \geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$，因此

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \geqslant 0,$$

令 $\lambda=\max\{\Delta x_1,\cdots,\Delta x_n\}\to 0$，便得要证的不等式.

推论1　如果在区间$[a,b]$**上**，$f(x)\leqslant g(x)$**，则**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \quad (a<b).$$

证　因为 $g(x)-f(x)\geqslant 0$，由性质5得

$$\int_a^b [g(x)-f(x)]\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

再利用性质1，便得要证的不等式.

推论2　$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \quad (a<b).$

证　因为

$$-|f(x)|\leqslant f(x)\leqslant |f(x)|,$$

所以由推论1及性质2可得

$$-\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x,$$

即

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

注　$|f(x)|$在$[a,b]$上的可积性可由 $f(x)$在$[a,b]$上的可积

性推出，这里我们不作证明.

性质6　设 M 及 m 分别是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值及最小值，则

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a)\quad(a<b).$$

证　因为 $m\leqslant f(x)\leqslant M$，所以由性质5推论1，得

$$\int_a^b m\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b M\mathrm{d}x.$$

再由性质2及性质4，即得所要证的不等式.

这个性质说明，由被积函数在积分区间上的最大值及最小值，可以估计积分值的大致范围. 例如，定积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^4\mathrm{d}x$，它的被积函数 $f(x)=x^4$ 在积分区间 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上是单调增加的，于是有最小值 $m=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$、最大值 $M=(1)^4=1$. 由性质6，得

$$\frac{1}{16}\left(1-\frac{1}{2}\right)\leqslant\int_{\frac{1}{2}}^1 x^4\mathrm{d}x\leqslant 1\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right),$$

即

$$\frac{1}{32}\leqslant\int_{\frac{1}{2}}^1 x^4\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}.$$

性质7　（定积分中值定理）　如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则在积分区间 $[a,b]$ 上至少存在一个点 ξ，使下式成立：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)\quad(a\leqslant\xi\leqslant b).$$

这个公式叫做积分中值公式.

证　把性质6中的不等式各除以 $b-a$，得

$$m\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M.$$

这表明，确定的数值 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 介于函数 $f(x)$ 的最小值 m 及最大值 M 之间. 根据闭区间上连续函数的介值定理（第一章第十一节定理4推论），在 $[a,b]$ 上至少存在着一点 ξ，使得函数 $f(x)$ 在

点 ξ 处的值与这个确定的数值相等，即应有

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\quad(a\leqslant\xi\leqslant b).$$

两端各乘以 $b-a$，即得所要证的等式.

积分中值公式有如下的几何解释：在区间 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使得以区间 $[a,b]$ 为底边、以曲线 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形的面积等于同一底边而高为 $f(\xi)$ 的一个矩形的面积(图5-4).

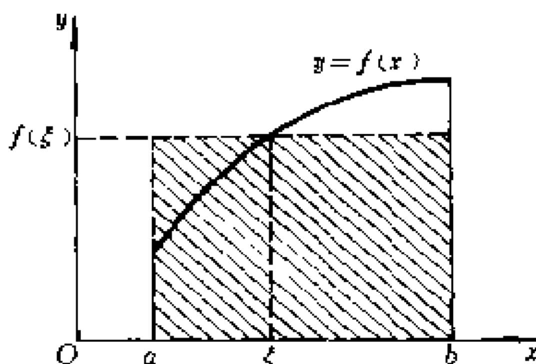


图 5-4

显然，积分中值公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)\quad(\xi\text{ 在 }a\text{ 与 }b\text{ 之间})$$

不论 $a<b$ 或 $a>b$ 都是成立的.

习 题 5—2

1. 证明定积分性质：

(1) $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ （k 是常数）；

(2) $\int_a^b 1\cdot\mathrm{d}x=\int_a^b\mathrm{d}x=b-a$.

2. 估计下列各积分的值：

(1) $\int_1^4 (x^2+1)\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}(1+\sin^2 x)\mathrm{d}x$；

(3) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} x\arctan x\mathrm{d}x$；　(4) $\int_2^0 \mathrm{e}^{x^2-x}\mathrm{d}x$.

3. 设 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明

(1) 若在$[a,b]$上，$f(x)\geqslant 0$，且$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$，则在$[a,b]$上$f(x)\equiv 0$；

(2) 若在$[a,b]$上，$f(x)\geqslant 0$，且$f(x)\not\equiv 0$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$；

(3) 若在$[a,b]$上，$f(x)\leqslant g(x)$，且$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$，则在$[a,b]$上$f(x)\equiv g(x)$.

4. 根据定积分的性质及第3题的结论，说明下列积分哪一个的值较大：

(1) $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$ 还是 $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x$？

(2) $\int_1^2 x^2\mathrm{d}x$ 还是 $\int_1^2 x^3\mathrm{d}x$？

(3) $\int_1^2 \ln x\mathrm{d}x$ 还是 $\int_1^2 (\ln x)^2\mathrm{d}x$？

(4) $\int_0^1 x\mathrm{d}x$ 还是 $\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x$？

(5) $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ 还是 $\int_0^1 (1+x)\mathrm{d}x$？

第三节　微积分基本公式

在第一节中，我们举过应用定积分定义计算积分的例子. 从这个例子我们看到，被积函数虽然是简单的二次幂函数$f(x)=x^2$，但直接按定义来计算它的定积分已经不是很容易的事. 如果被积函数是其它复杂的函数，其困难就更大了. 因此，我们必须寻求计算定积分的新方法.

下面我们先从实际问题中寻找解决问题的线索. 为此，我们对变速直线运动中遇到的位置函数$s(t)$及速度函数$v(t)$之间的联系作进一步的研究.

一、变速直线运动中位置函数与速度函数之间的联系

有一物体在一直线上运动. 在这直线上取定原点、正向及长度单位，使它成一数轴. 设时刻t时物体所在位置为$s(t)$，速度为$v(t)$.（为了讨论方便起见，可以设$v(t)\geqslant 0$.）

从第一节知道：物体在时间间隔$[T_1,T_2]$内经过的路程可以用速度函数$v(t)$在$[T_1,T_2]$上的定积分

$$\int_{T_1}^{T_2} v(t)\mathrm{d}t$$

来表达；另一方面，这段路程又可以通过位置函数 $s(t)$ 在区间 $[T_1, T_2]$ 上的增量

$$s(T_2)-s(T_1)$$

来表达. 由此可见，位置函数 $s(t)$ 与速度函数 $v(t)$ 之间有如下关系：

$$\int_{T_1}^{T_2} v(t)\mathrm{d}t = s(T_2)-s(T_1). \tag{1}$$

因为 $s'(t)=v(t)$，即位置函数 $s(t)$ 是速度函数 $v(t)$ 的原函数，所以关系式(1)表示，速度函数 $v(t)$ 在区间 $[T_1, T_2]$ 上的定积分等于 $v(t)$ 的原函数 $s(t)$ 在区间 $[T_1, T_2]$ 上的增量

$$s(T_2)-s(T_1).$$

上述从变速直线运动的路程这个特殊问题中得出来的关系，在一定条件下具有普遍性. 事实上，我们将在第三目中证明，如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，那末，$f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分就等于 $f(x)$ 的原函数（设为 $F(x)$）在区间 $[a,b]$ 上的增量

$$F(b)-F(a).$$

二、积分上限的函数及其导数

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，并且设 x 为 $[a,b]$ 上的一点. 现在我们来考察 $f(x)$ 在部分区间 $[a,x]$ 上的定积分

$$\int_a^x f(x)\mathrm{d}x.$$

首先，由于 $f(x)$ 在 $[a,x]$ 上仍旧连续，因此这个定积分存在. 这时，x 既表示定积分的上限，又表示积分变量. 因为定积分与积分变量的记法无关，所以，为了明确起见，可以把积分变量改用其它符号，例如用 t 表示，则上面的定积分可以写成

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

如果上限 x 在区间 $[a,b]$ 上任意变动，则对于每一个取定的 x 值，定积分有一个对应值，所以它在 $[a,b]$ 上定义了一个函数，记作 $\Phi(x)$：

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \quad (a\leqslant x\leqslant b).$$

这个函数 $\Phi(x)$ 具有下面定理1所指出的重要性质.

定理1　如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则积分上限的函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

在 $[a,b]$ 上具有导数，并且它的导数是

$$\begin{aligned}\Phi'(x)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\\&=f(x)\quad(a\leqslant x\leqslant b).\end{aligned}\tag{2}$$

证　若 $x\in(a,b)$，设 x 获得增量 Δx，其绝对值足够地小，使得 $x+\Delta x\in(a,b)$，则 $\Phi(x)$（图5－5，图中 $\Delta x>0$）在 $x-\Delta x$ 处的函数值为

$$\Phi(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t.$$

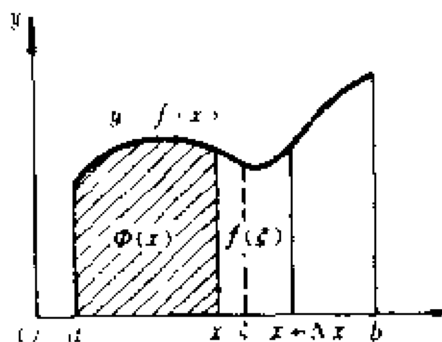


图　5－5

由此得函数的增量

$$\begin{aligned}\Delta\Phi&=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)\\&=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\\&=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\\&=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

再应用积分中值定理，即有等式

$$\Delta\Phi=f(\xi)\Delta x,$$

这里，ξ 在 x 与 $x+\Delta x$ 之间. 把上式两端各除以 Δx，得函数增量与自变量增量的比值

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=f(\xi).$$

由于假设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，而 $\Delta x \to 0$ 时，$\xi \to x$，因此 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(\xi)=f(x)$. 于是，令 $\Delta x \to 0$ 对上式两端取极限时，左端的极限也应该存在且等于 $f(x)$. 这就是说，函数 $\Phi(x)$ 的导数存在，并且

$$\Phi'(x)=f(x).$$

若 $x=a$，取 $\Delta x>0$，则同理可证 $\Phi'_+(a)=f(a)$；若 $x=b$，取 $\Delta x<0$，则同理可证 $\Phi'_-(b)=f(b)$.

定理1证毕.

这个定理指出了一个重要结论：连续函数 $f(x)$ 取变上限 x 的定积分然后求导，其结果还原为 $f(x)$ 本身. 联想到原函数的定义，就可以从定理1推知 $\Phi(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数. 因此，我们引出如下的原函数的存在定理.

定理2　如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \tag{3}$$

就是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数.

这个定理的重要意义是：一方面肯定了连续函数的原函数是存在的，另一方面初步地揭示了积分学中的定积分与原函数之间的联系. 因此，我们就有可能通过原函数来计算定积分.

三、牛顿—莱布尼茨公式

现在我们根据定理2来证明一个重要定理，它给出了用原函数计算定积分的公式.

定理3　如果函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a). \tag{4}$$

证　已知函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数，又根据

定理2知道，积分上限的函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

也是 $f(x)$ 的一个原函数. 于是这两个原函数之差 $F(x)-\Phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上必定是某一个常数 C（第四章第一节），即

$$F(x)-\Phi(x)=C \quad (a\leqslant x\leqslant b). \tag{5}$$

在上式中令 $x=a$，得 $F(a)-\Phi(a)=C$. 又由 $\Phi(x)$ 的定义式(3)及上节定积分的补充规定(1)可知 $\Phi(a)=0$，因此，$C=F(a)$. 以 $F(a)$ 代入(5)式中的 C，以 $\int_a^x f(t)dt$ 代入(5)式中的 $\Phi(x)$，可得

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=F(x)-F(a).$$

在上式中令 $x=b$，就得到所要证明的公式(4).

由上节定积分的补充规定(2)可知，(4)式对 $a>b$ 的情形同样成立.

为了方便起见，以后把 $F(b)-F(a)$ 记成 $[F(x)]_a^b$. 于是(4)式又可写成

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=[F(x)]_a^b.$$

公式(4)叫做牛顿(Newton)—莱布尼茨(Leibniz)公式. 这个公式进一步揭示了定积分与被积函数的原函数或不定积分之间的联系. 它表明：一个连续函数在区间 $[a,b]$ 上的定积分等于它的任一个原函数在区间 $[a,b]$ 上的增量. 这就给定积分提供了一个有效而简便的计算方法，大大简化了定积分的计算手续.

通常也把公式(4)叫做微积分基本公式.

下面我们举几个应用公式(4)来计算定积分的简单例子.

例1 计算第一节中的定积分 $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$.

解 由于 $\frac{x^3}{3}$ 是 x^2 的一个原函数，所以按牛顿—莱布尼茨公式，有

$$\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

例2 计算 $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

解 由于 $\arctan x$ 是 $\frac{1}{1+x^2}$ 的一个原函数，所以

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = [\arctan x]_{-1}^{\sqrt{3}} = \arctan \sqrt{3} - \arctan (-1)$$

$$= \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{7}{12}\pi.$$

例3 计算 $\int_2^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x}$.

解 当 $x<0$ 时，$\frac{1}{x}$ 的一个原函数是 $\ln|x|$，现在积分区间是 $[-2,-1]$，所以按牛顿—莱布尼茨公式，有

$$\int_{-2}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = [\ln|x|]_{-2}^{-1} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2.$$

通过例3，我们应该特别注意：公式(4)中的函数 $F(x)$ 必须是 $f(x)$ 在该积分区间 $[a,b]$ 上的原函数.

例4 计算正弦曲线 $y=\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 上与 x 轴所围成的平面图形（图5—6）的面积.

解 这图形是曲边梯形的一个特例. 它的面积

$$A = \int_0^\pi \sin x \mathrm{d}x.$$

由于 $-\cos x$ 是 $\sin x$ 的一个原函数，所以

$$A = \int_0^\pi \sin x \mathrm{d}x = [-\cos x]_0^\pi$$

$$= -(-1) - (-1) = 2.$$

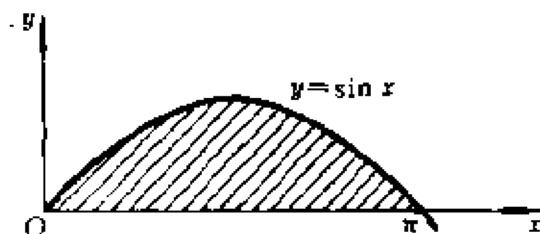


图 5—6

例5 汽车以每小时36km 速度行驶，到某处需要减速停车. 设汽车以等加速度 $a=-5\mathrm{m/s^2}$ 刹车. 问从开始刹车到停车，汽车走了多少距离？

解 首先要算出从开始刹车到停车经过的时间. 当 $t=0$ 时，汽车速度

$$v_0=36\text{km/h}=\frac{36\times1000}{3600}\text{m/s}=10\text{m/s}.$$

刹车后汽车减速行驶，其速度为

$$v(t)=v_0+at=10-5t.$$

当汽车停住时，速度 $v(t)=0$，故从

$$v(t)=10-5t=0$$

解得

$$t=\frac{10}{5}=2(\text{s}).$$

于是在这段时间内，汽车所走过的距离为

$$s=\int_0^2 v(t)\mathrm{d}t=\int_0^2(10-5t)\mathrm{d}t=\left[10t-5\times\frac{t^2}{2}\right]_0^2=10(\text{m}),$$

即在刹车后，汽车需走过10m 才能停住.

下面再举几个应用公式(2)的例子.

例6 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内连续且 $f(x)>0$. 证明函数

$$F(x)=\frac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$$

在 $(0,+\infty)$ 内为单调增加函数.

证 由公式(2)，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t=xf(x),\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=f(x).$$

故

$$F'(x)=\frac{xf(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f(x)\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2}$$

$$=\frac{f(x)\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2}.$$

按假设，在$[0,x](x>0)$上 $f(t)>0$，$(x-t)f(t)\geqslant 0$且$(x-t)f(t)\neq 0$，由习题5—2第3题(2)中的结论可知

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t>0,\ \int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t>0,$$

所以 $F'(x)>0(x>0)$，从而 $F(x)$在$(0,+\infty)$内为单调增加函数.

例7 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^1 \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t}{x^2}$.

解 易知这是一个$\dfrac{0}{0}$型的未定式，我们利用洛必达法则来计算. 分子可写成

$$-\int_1^{\cos x}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t,$$

它是以 $\cos x$ 为上限的积分，作为 x 的函数可看成是以 $u=\cos x$ 为中间变量的复合函数，故由公式(2)有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\cos x}^1 \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_1^{\cos x}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \\ &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\int_1^u \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\Big|_{u=\cos x}\cdot(\cos x)' \\ &= -\mathrm{e}^{-\cos^2 x}\cdot(-\sin x) \\ &= \sin x\mathrm{e}^{-\cos^2 x}.\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^1 \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\mathrm{e}^{-\cos^2 x}}{2x}=\frac{1}{2\mathrm{e}}.$$

习 题 5—3

1. 试求函数 $y=\int_0^x \sin t\mathrm{d}t$ 当 $x=0$及 $x=\dfrac{\pi}{4}$时的导数.

2. 求由参数表示式$x=\int_0^t \sin u\mathrm{d}u$，$y=\int_0^t \cos u\mathrm{d}u$ 所给定的函数 y 对 x 的导数.

3. 求由$\int_0^y \mathrm{e}^t\mathrm{d}t+\int_0^x \cos t\mathrm{d}t=0$所决定的隐函数 y 对 x 的导数$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

4. 当 x 为何值时，函数 $I(x)=\int_0^x te^{-t^2}\mathrm{d}t$ 有极值？

5. 计算下列各导数：

(1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t$；　　(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^2}^{x^3}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$；

(3) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)\mathrm{d}t$.

6. 计算下列各定积分：

(1) $\int_0^a(3x^2-x+1)\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_1^2\left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)\mathrm{d}x$；

(3) $\int_4^9\sqrt{x}(1+\sqrt{x})\mathrm{d}x$.　　(4) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$；

(5) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$；　　(6) $\int_0^{\sqrt{3}a}\frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}$；

(7) $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$；　　(8) $\int_{-1}^0\frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}\mathrm{d}x$；

(9) $\int_{-e-1}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{1+x}$；　　(10) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\theta\mathrm{d}\theta$；

(11) $\int_0^{2\pi}|\sin x|\mathrm{d}x$；

(12) $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$，其中 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leqslant 1,\\ \frac{1}{2}x^2, & x>1.\end{cases}$

7. 设 k 为正整数. 试证下列各题：

(1) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\mathrm{d}x=0$，　　(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\mathrm{d}x=0$；

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\mathrm{d}x=\pi$，　　(4) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx\mathrm{d}x=\pi$.

8. 设 k 及 l 为正整数，且 $k\neq l$. 证明：

(1) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin lx\mathrm{d}x=0$；　　(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos lx\mathrm{d}x=0$；

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin lx\mathrm{d}x=0$.

9. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x te^{2t^2}\mathrm{d}t}$.

10. 设

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in[0,1),\\ x, & x\in[1,2].\end{cases}$$

求 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[0,2]$ 上的表达式，并讨论 $\Phi(x)$ 在 $(0,2)$ 内的连续性.

11. 设

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ 0, & x<0 \text{或} x>\pi.\end{cases}$$

求 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的表达式.

12. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导且 $f'(x)\leqslant 0$，

$$F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

证明在 (a,b) 内有 $F'(x)\leqslant 0$.

第四节　定积分的换元法

由上节结果知道，计算定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的简便方法是把它转化为求 $f(x)$ 的原函数的增量. 在第四章中，我们知道用换元积分法可以求出一些函数的原函数. 因此，在一定条件下，可以用换元法来计算定积分. 为了说明如何用换元法来计算定积分，先证明下面一个定理.

定理　假设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，函数 $x=\varphi(t)$ 满足条件：

(1) $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$；

(2) $\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$（或 $[\beta,\alpha]$）上具有连续导数，且其值域不越出 $[a,b]$[①]，

则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t. \tag{1}$$

① 当 $\varphi(t)$ 的值域为 $[A,B]\supset[a,b]$，但满足其余条件时，只要 $f(x)$ 在 $[A,B]$ 上连续，则定理的结论仍成立.

公式(1)叫做定积分的换元公式.

证 由假设可以知道,上式两边的被积函数都是连续的,因此不仅上式两边的定积分都存在,而且由上节的定理2知道,被积函数的原函数也都存在.所以,(1)式两边的定积分都可应用牛顿—莱布尼茨公式.假设 $F(x)$是 $f(x)$的一个原函数,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

另一方面,$\Phi(t)=F[\varphi(t)]$可看作是由 $F(x)$与 $x=\varphi(t)$复合而成的函数.因此,由复合函数求导法则,得

$$\Phi'(t)=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(x)\varphi'(t)=f[\varphi(t)]\varphi'(t).$$

这表明 $\Phi(t)$是 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$的一个原函数.因此有

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t=\Phi(\beta)-\Phi(\alpha).$$

又由 $\Phi(t)=F[\varphi(t)]$及 $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$ 可知

$$\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]=F(b)-F(a).$$

所以

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a)=\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)$$
$$=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

这就证明了换元公式.

在定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 中的 $\mathrm{d}x$,本来是整个定积分记号中不可分割的一部分,但由上述定理可知,在一定条件下,它确实可以作为微分记号来对待.这就是说,应用换元公式时,如果把 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 中的 x 换成 $\varphi(t)$,则 $\mathrm{d}x$ 就换成 $\varphi'(t)\mathrm{d}t$,这正好是 $x=\varphi(t)$的微分 $\mathrm{d}x$.

应用换元公式时有两点值得注意:(1)用 $x=\varphi(t)$把原来变量 x 代换成新变量 t 时,积分限也要换成相应于新变量 t 的积分限;(2)求出 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$的一个原函数 $\Phi(t)$后,不必象计算不定积分

那样再要把 $\Phi(t)$ 变换成原来变量 x 的函数，而只要把新变量 t 的上、下限分别代入 $\Phi(t)$ 中然后相减就行了.

例1 计算 $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x \quad (a>0)$.

解 设 $x=a\sin t$，则 $\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$. 且

当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x=a$ 时，$t=\dfrac{\pi}{2}$.

于是

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{a^2}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a^2}{4}.$$

换元公式也可反过来使用. 为使用方便起见，把换元公式中左右两边对调地位，同时把 t 改记为 x，而 x 改记为 t，得

$$\int_a^b f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t.$$

这样，我们可用 $t=\varphi(x)$ 来引入新变量 t，而 $\alpha=\varphi(a)$，$\beta=\varphi(b)$.

例2 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\sin x\mathrm{d}x$.

解 设 $t=\cos x$，则 $\mathrm{d}t=-\sin x\mathrm{d}x$，且

当 $x=0$ 时，$t=1$；当 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$t=0$.

于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\sin x\mathrm{d}x=-\int_1^0 t^5\mathrm{d}t=\int_0^1 t^5\mathrm{d}t=\left[\frac{t^6}{6}\right]_0^1=\frac{1}{6}.$$

在例2中，如果我们不明显地写出新变量 t，那末定积分的上、下限就不要变更. 现在用这种记法计算如下：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\sin x\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\mathrm{d}(\cos x)$$

$$=-\left[\frac{\cos^6 x}{6}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\left(0-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{6}.$$

例3 计算 $\int_0^\pi \sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}\mathrm{d}x$.

解 由于 $\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}=\sqrt{\sin^3 x(1-\sin^2 x)}=\sin^{\frac{3}{2}}x\cdot|\cos x|$，在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上，$|\cos x|=\cos x$；在 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 上，$|\cos x|=-\cos x$，所以

$$\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{3}{2}}x\cos x\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^{\frac{3}{2}}x(-\cos x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{3}{2}}x\mathrm{d}(\sin x)-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^{\frac{3}{2}}x\mathrm{d}(\sin x)$$

$$=\left[\frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[\frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}}x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$=\frac{2}{5}-\left(-\frac{2}{5}\right)=\frac{4}{5}.$$

注意 如果忽略 $\cos x$ 在 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 上非正，而按

$$\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}=\sin^{\frac{3}{2}}x\cos x$$

计算，将导致错误.

例4 计算 $\int_0^4\frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x$.

解 设 $\sqrt{2x+1}=t$，则 $x=\frac{t^2-1}{2}$，$\mathrm{d}x=t\mathrm{d}t$，且

当 $x=0$ 时，$t=1$；当 $x=4$ 时，$t=3$.

于是

$$\int_0^4\frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x=\int_1^3\frac{\frac{t^2-1}{2}+2}{t}t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_1^3(t^2+3)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3}+3t\right]_1^3$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{27}{3}+9\right)-\left(\frac{1}{3}+3\right)\right]=\frac{22}{3}.$$

例5 证明：

(1) 若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续且为偶函数，则

$$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续且为奇函数，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=0.$$

证 因为

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x,$$

对积分 $\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x$ 作代换 $x=-t$，则得

$$\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x=-\int_{a}^{0} f(-t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{a} f(-t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{a} f(-x)\mathrm{d}x.$$

于是

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x &=\int_{0}^{a} f(-x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x\\ &=\int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

(1) 若 $f(x)$ 为偶函数，则

$$f(x)+f(-x)=2f(x),$$

从而

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 若 $f(x)$ 为奇函数，则

$$f(x)+f(-x)=0,$$

从而

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=0.$$

利用例5的结论，常可简化计算偶函数、奇函数在对称于原点的区间上的定积分.

例6 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明

(1) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x$；

(2) $\int_{0}^{\pi} x f(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$，由此计算

$$\int_{0}^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x.$$

证 (1) 设 $x=\frac{\pi}{2}-t$，则 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$，且

$$当\ x=0\ 时, t=\frac{\pi}{2}; 当\ x=\frac{\pi}{2}\ 时, t=0.$$

于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x.$$

(2) 设 $x=\pi-t$，则 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$，且

$$当\ x=0\ 时, t=\pi; 当\ x=\pi\ 时, t=0.$$

于是

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = -\int_{\pi}^0 (\pi-t)f[\sin(\pi-t)]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)\mathrm{d}t$$

$$=\pi\int_0^{\pi} f(\sin t)\mathrm{d}t-\int_0^{\pi} tf(\sin t)\mathrm{d}t$$

$$=\pi\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x-\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x,$$

所以

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

利用上述结论，即得

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{1+\cos^2 x}$$

$$=-\frac{\pi}{2}[\arctan(\cos x)]_0^{\pi}$$

$$=-\frac{\pi}{2}\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi^2}{4}.$$

例7 设函数

$$f(x)=\begin{cases} xe^{-x^2}, & x\geqslant 0, \\ \dfrac{1}{1+\cos x}, & -1<x<0, \end{cases}$$

计算 $\int_1^4 f(x-2)\mathrm{d}x$.

解 设 $x-2=t$，则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$，且

当 $x=1$时,$t=-1$;当 $x=4$时,$t=2$.

于是

$$\int_1^4 f(x-2)\mathrm{d}x=\int_{-1}^2 f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^0\frac{\mathrm{d}t}{1+\cos t}+\int_0^2 te^{-t^2}\mathrm{d}t$$

$$=\left[\tan\frac{t}{2}\right]_{-1}^0-\left[\frac{1}{2}e^{-t^2}\right]_0^2$$

$$=\tan\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-4}+\frac{1}{2}.$$

习　题　5－4

1. 计算下列定积分：

(1) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}x$；　(2) $\int_{-2}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{(11+5x)^3}$；

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos^3\varphi\mathrm{d}\varphi$；　(4) $\int_0^{\pi}(1-\sin^3\theta)\mathrm{d}\theta$；

(5) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 u\mathrm{d}u$；　(6) $\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}\mathrm{d}x$；

(7) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\sqrt{8-2y^2}\mathrm{d}y$；　(8) $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x$；

(9) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$；　(10) $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}}$；

(11) $\int_{-1}^{1}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{5-4x}}$；　(12) $\int_1^4\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$；

(13) $\int_{\frac{3}{4}}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}-1}$；　(14) $\int_0^{\sqrt{2}a}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{3a^2-x^2}}$；

(15) $\int_0^1 te^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$；　(16) $\int_1^{e^2}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+\ln x}}$；

(17) $\int_{-2}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}$；　(18) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos 2x\mathrm{d}x$；

(19) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}\mathrm{d}x$；　(20) $\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}\mathrm{d}x$.

2. 利用函数的奇偶性计算下列积分：

(1) $\int_{-\pi}^{\pi}x^4\sin x\mathrm{d}x$；　(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4\cos^4\theta\mathrm{d}\theta$；

(3) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$； (4) $\int_{-5}^{5} \frac{x^3 \sin^2 x}{x^4+2x^2+1} \mathrm{d}x$.

3. 证明：$\int_{-a}^{a} \varphi(x^2)\mathrm{d}x = 2\int_0^a \varphi(x^2)\mathrm{d}x$，其中 $\varphi(u)$ 为连续函数.

4. 设 $f(x)$ 在 $[-b,b]$ 上连续，证明

$$\int_{-b}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-b}^{b} f(-x)\mathrm{d}x.$$

5. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x.$$

6. 证明：$\int_x^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \quad (x>0)$.

7. 证明：$\int_0^1 x^m(1-x)^n \mathrm{d}x = \int_0^1 x^n(1-x)^m \mathrm{d}x$.

8. 证明：$\int_0^{\pi} \sin^n x \mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x$.

9. 设 $f(x)$ 是以 l 为周期的连续函数，证明 $\int_a^{a+l} f(x)\mathrm{d}x$ 的值与 a 无关.

10. 若 $f(t)$ 是连续函数且为奇函数，证明 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是偶函数；若 $f(t)$ 是连续函数且为偶函数，证明 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是奇函数.

第五节　定积分的分部积分法

计算不定积分有分部积分法，相应地，计算定积分也有分部积分法.

设函数 $u(x)$、$v(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有连续导数 $u'(x)$、$v'(x)$，则有

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

分别求这等式两端在 $[a,b]$ 上的定积分，并注意到

$$\int_a^b (uv)'\mathrm{d}x = [uv]_a^b,$$

便得
$$[uv]_a^b = \int_a^b vu'\mathrm{d}x + \int_a^b uv'\mathrm{d}x.$$

移项，就有
$$\int_a^b uv'\mathrm{d}x = [uv]_a^b - \int_a^b vu'\mathrm{d}x,$$

或简写为
$$\int_a^b u\mathrm{d}v=[uv]_a^b-\int_a^b v\mathrm{d}u.$$
这就是定积分的分部积分公式.

例1 计算 $\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin x\mathrm{d}x$.

解 设 $u=\arcsin x, \mathrm{d}v=\mathrm{d}x$，则
$$\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}, v=x.$$
代入分部积分公式，得
$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin x\mathrm{d}x&=\Big[x\arcsin x\Big]_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1-x^2)\\&=\frac{\pi}{12}+\left[\sqrt{1-x^2}\right]_0^{\frac{1}{2}}\\&=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1.\end{aligned}$$
上例中，在应用分部积分法以后，还应用了定积分的换元法.

例2 计算 $\int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解 先用换元法. 令 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2, \mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，且

当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x=1$ 时，$t=1$.

于是
$$\int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int_0^1 t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t.$$
再用分部积分法计算上式右端的积分. 设 $u=t, \mathrm{d}v=\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$，则 $\mathrm{d}u=\mathrm{d}t, v=\mathrm{e}^t$. 于是
$$\begin{aligned}\int_0^1 t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t&=[t\mathrm{e}^t]_0^1-\int_0^1\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=\mathrm{e}-[\mathrm{e}^t]_0^1\\&=\mathrm{e}-(\mathrm{e}-1)=1.\end{aligned}$$
因此
$$\int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2.$$

例3 证明定积分公式(见附录Ⅲ积分表(147)):

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x\left(=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x\right)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{为正偶数},\\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}, & n\text{为大于1的正奇数}.\end{cases}$$

证 设 $u=\sin^{n-1}x, dv=\sin x\mathrm{d}x$,则

$$\mathrm{d}u=(n-1)\sin^{n-2}x\cos x\mathrm{d}x, v=-\cos x.$$

于是,由分部积分公式,得

$$I_n=\left[-\cos x\sin^{n-1}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 x\mathrm{d}x.$$

右端第一项等于零;将第二项里的 $\cos^2 x$ 写成 $1-\sin^2 x$,并把积分分成两个,得

$$I_n=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\mathrm{d}x-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$$

$$=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n.$$

由此得
$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}.$$

这个等式叫做积分 I_n 关于下标的递推公式.

如果把 n 换成 $n-2$,则得

$$I_{n-2}=\frac{n-3}{n-2}I_{n-4}.$$

同样地依次进行下去,直到 I_n 的下标递减到0或1为止.于是,

$$I_{2m}=\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\frac{2m-5}{2m-4}\cdot\cdots\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}I_0,$$

$$I_{2m+1}=\frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\frac{2m-4}{2m-3}\cdot\cdots\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}I_1$$

$$(m=1,2,\cdots).$$

而
$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}, I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=1,$$

因此

$$I_{2m}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}x\mathrm{d}x=\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\cdots\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2},$$

$$I_{2m+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m+1}x\mathrm{d}x=\frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\cdots\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}$$

$$(m=1,2,\cdots).$$

至于定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$ 相等，由上节例6(1)即可知道，证毕.

习　题　5—5

计算下列定积分

1. $\int_0^1 xe^{-x}\mathrm{d}x$；
2. $\int_1^e x\ln x\mathrm{d}x$；
3. $\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} t\sin\omega t\mathrm{d}t$（$\omega$ 为常数）；
4. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$；
5. $\int_1^4\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；
6. $\int_0^1 x\arctan x\mathrm{d}x$；
7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\cos x\mathrm{d}x$；
8. $\int_1^2 x\log_2 x\mathrm{d}x$；
9. $\int_0^{\pi}(x\sin x)^2\mathrm{d}x$；
10. $\int_1^e\sin(\ln x)\mathrm{d}x$；
11. $\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|\mathrm{d}x$；
12. $\int_0^1(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\mathrm{d}x$（$m$ 为自然数）；
13. $J_m=\int_0^{\pi}x\sin^m x\mathrm{d}x$（$m$ 为自然数）.

第六节　定积分的近似计算

到目前为止，我们计算定积分时，总是先求出被积函数的原函数，然后应用牛顿—莱布尼茨公式算得结果. 但在实用上也有一些定积分不宜或者不能用上述方法来计算. 例如，有些被积函数难于用公式表示，而是用图形或表格给出的；有些被积函数虽然能用公式表示，但要计算出它的原函数却很困难，或者它的原函数不能用初等函数表示. 所以，我们就需要考虑定积分的近似计算问题.

我们知道，定积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad (f(x)\geqslant 0)$$

不论实际问题中的意义如何，在数值上都等于曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$、$x=b$ 与 x 轴所围成的曲边梯形的面积. 因此，不管 $f(x)$ 是以什么形式给出的，只要近似地算出相应的曲边梯形的面积，就得到所给定积分的近似值. 这就是下面所说的定积分近似计算法的基本思想.

下面介绍三种常用而简便的定积分的近似计算方法，所导出的全部公式对于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不是非负的情形同样适用.

一、矩形法

矩形法就是把曲边梯形分成若干个窄曲边梯形，然后用窄矩形来近似代替窄曲边梯形，从而求得定积分的近似值. 具体做法如下：

用分点 $a=x_0, x_1, \cdots, x_n=b$ 将区间 $[a,b]$ 分成 n 个长度相等的小区间. 每个小区间的长为

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}.$$

并设函数 $y=f(x)$ 对应于各分点的函数值为 $y_0, y_1, \cdots, y_{n-1}, y_n$.

如图5－7所示，如果取小区间左端点的函数值作为窄矩形的高，此时 n 个窄矩形的面积分别为：$y_0\Delta x, y_1\Delta x, \cdots, y_{n-1}\Delta x$. 所以有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx y_0\Delta x+y_1\Delta x+\cdots+y_{n-1}\Delta x$$

$$=\frac{b-a}{n}(y_0+y_1+\cdots+y_{n-1}). \qquad (1)$$

如果取小区间右端点的函数值作为窄矩形的高，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx y_1\Delta x+y_2\Delta x+\cdots+y_n\Delta x$$

$$=\frac{b-a}{n}(y_1+y_2+\cdots+y_n). \qquad (2)$$

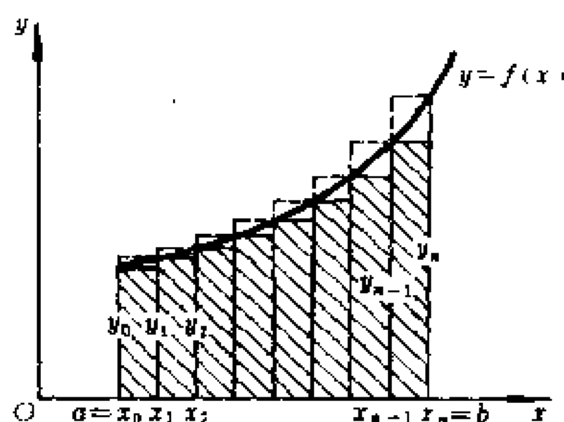


图 5—7

公式(1)和(2)都叫做矩形法公式.

二、梯形法

与矩形法相类似，如图5—8所示，在每个小区间上，以窄梯形的面积近似代替窄曲边梯形的面积，就得到定积分的近似公式：

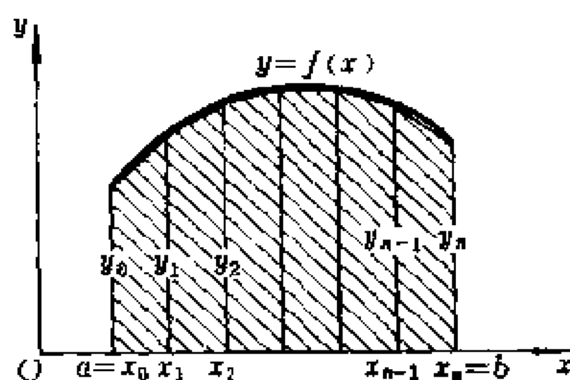


图 5—8

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}(y_0+y_1)\Delta x+\frac{1}{2}(y_1+y_2)\Delta x +\cdots+\frac{1}{2}(y_{n-1}+y_n)\Delta x$$

$$=\frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{2}(y_0+y_n)+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}\right]. \qquad (3)$$

公式(3)叫做梯形法公式. 由这个公式所得的近似值，实际上就是公式(1)、(2)所得近似值的平均值.

例1 积分$\int_0^1 e^{-x^2}dx$的被积函数的原函数不是初等函数，所以无法用牛顿—莱布尼茨公式来计算这个积分. 现在要求用矩形法及梯形法计算它的近似值(取$n=10$，即将区间[0,1]十等分).

解 把区间[0,1]十等分，设分点为

$$0=x_0, x_1, x_2, \cdots, x_8, x_9, x_{10}=1.$$

相应的函数值为

$$y_0, y_1, y_2, \cdots, y_8, y_9, y_{10},$$

其中 $$y_i=e^{-x_i^2} \quad (i=0,1,2,\cdots,10).$$

列表表示如下[1]：

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y_i	1.00000	0.99005	0.96079	0.91393	0.85214	0.77880

i	6	7	8	9	10
x_i	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y_i	0.69768	0.61263	0.52729	0.44486	0.36788

利用矩形法公式(1)，得

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx (y_0+y_1+\cdots+y_9)\times\frac{1-0}{10},$$

即

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx &(1+0.99005+0.96079+0.91393\\&+0.85214+0.77880+0.69768+0.61263\\&+0.52729+0.44486)\times 0.1\\=&7.77817\times 0.1=0.77782.\end{aligned}$$

利用矩形法公式(2)，得

---

① 函数值$y_i=e^{-x_i^2}$可以从指数函数表中查得.

$$\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x \approx (y_1+y_2+\cdots+y_{10})\times\frac{1-0}{10},$$

即

$$\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x \approx (0.99005+0.96079+0.91393+0.85214$$
$$+0.77880+0.69768+0.61263+0.52729$$
$$+0.44486+0.36788)\times 0.1$$
$$=7.14605\times 0.1=0.71461.$$

利用梯形法公式(3)，实际上是求前两值的平均值，得

$$\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}(0.77782+0.71461)$$
$$=\frac{1}{2}\times 1.49243=0.74621.$$

三、抛物线法

矩形法是将曲线分为许多小段，通过用许多水平直线段分别近似代替原来各曲线段，即把被积函数逐段用常数值代替.梯形法是通过用许多直线段分别近似代替原来各曲线段，即把被积函数逐段用线性函数代替.为了提高精确度，可以考虑在小范围上用二次函数 $y=px^2+qx+r$ 来近似代替被积函数，即用对称轴平行于 y 轴的抛物线上的一段弧来近似代替原来的曲线弧，从而算出定积分的近似值.这种方法叫做抛物线法.具体做法如下：

同前面两种近似法一样，仍用分点 $a=x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n=b$，把区间$[a,b]$分成 n(偶数)个长度相等的小区间，各分点对应的函数值为 $y_0,y_1,y_2,\cdots,y_n$.曲线 $y=f(x)$也相应地被分成 n 个小弧段.设曲线上的分点为 $M_0,M_1,M_2,\cdots,M_n$(图5—9).

我们知道，过三点可以确定一条抛物线 $y=px^2+qx+r$，在每两个相邻的小区间上经过曲线上三个相应的分点作一条抛物线.这样可得一个曲边梯形.把这些曲边梯形的面积加起来就可作为所求定积分的一个近似值.由于两个相邻区间决定一条抛物线，所

以用这种方法时，必须将区间$[a,b]$等分成偶数个小区间.

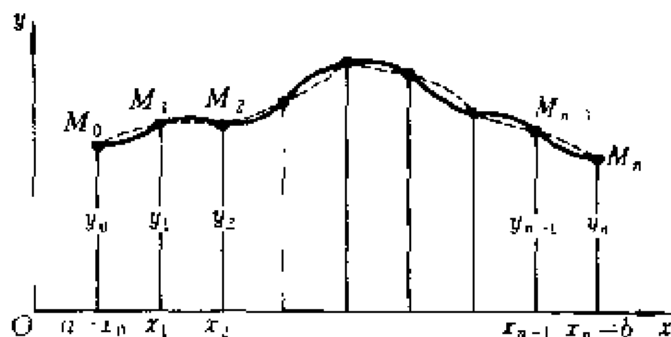


图 5-9

下面我们先来计算在$[-h,h]$上以过这样三点$M'_0(-h,y_0)$，$M'_1(0,y_1)$，$M'_2(h,y_2)$的抛物线$y=px^2+qx+r$为曲边的曲边梯形的面积.

首先，抛物线方程中的p,q,r可由下列方程组确定：

$$\begin{cases} y_0=ph^2-qh+r, \\ y_1= \qquad\qquad\quad r, \\ y_2=ph^2+qh+r. \end{cases}$$

由此得
$$2ph^2=y_0-2y_1+y_2.$$

于是所求面积为

$$\begin{aligned} A &= \int_{-h}^{h}(px^2+qx+r)\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{3}px^3+\frac{q}{2}x^2+rx\right]_{-h}^{h}=\frac{2}{3}ph^3+2rh \\ &= \frac{1}{3}h(2ph^2+6r)=\frac{1}{3}h(y_0-2y_1+y_2+6y_1) \\ &= \frac{1}{3}h(y_0+4y_1+y_2), \end{aligned}$$

这曲边梯形的面积只与M'_0，M'_1，M'_2的纵坐标y_0，y_1，y_2及底边所在的区间长度$2h$有关.

由上述结果可知，过M_0、M_1、M_2三点；过M_2，M_3，M_4三点；…；过M_{n-2}，M_{n-1}，M_n三点的抛物线所对应的曲边梯形的面积依

次为

$$A_1=\frac{1}{3}h(y_0+4y_1+y_2),$$

$$A_2=\frac{1}{3}h(y_2+4y_3+y_4),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_{\frac{n}{2}}=\frac{1}{3}h(y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n),$$

其中 $h=\frac{b-a}{n}$. 把上面 $\frac{n}{2}$ 个曲边梯形的面积加起来，就得到定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的近似值：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{3n}[(y_0+y_n)+2(y_2+y_4+\cdots+y_{n-2})$$
$$+4(y_1+y_3+\cdots+y_{n-1})]. \qquad (4)$$

公式(4)叫抛物线法公式，也叫辛普森(Simpson)公式.

用以上三种方法求定积分近似值时，一般说来，n 取得越大，近似程度就越好.

例2 利用抛物线法计算

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \quad (\text{取 } n=10).$$

解

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \approx \frac{1-0}{3\times 10}[(y_0+y_{10})+2(y_2+y_4+y_6+y_8)$$
$$+4(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9)]$$
$$=\frac{0.1}{3}\times(1.36788+2\times 3.03790+4\times 3.74027)$$
$$=\frac{0.1}{3}\times 22.40476=0.74683.$$

例3 对图5—10所示的图形测量所得的数据如下表所示. 用抛物线法计算该图形的面积 A.

站号	−1	0	1	2	3	4	5	6
高 y (m)	0	2.305	4.865	6.974	8.568	9.559	10.011	10.183

站号	7	8	9	10	11	12	13
高 y (m)	10.200	10.200	10.200	10.200	10.200	10.200	10.200

站号	14	15	16	17	18	19	20
高 y (m)	10.040	9.416	8.015	6.083	3.909	1.814	0

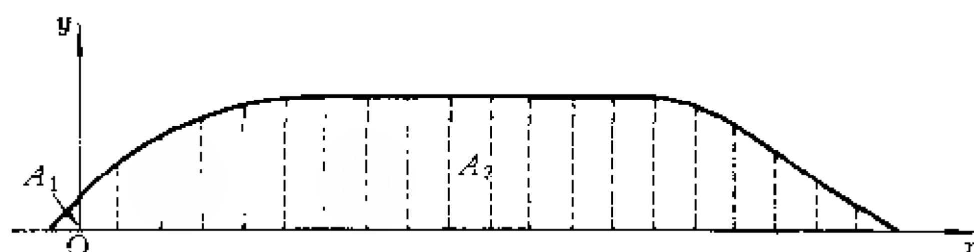


图 5-10

这里,0站到20站之间的距离为147.18m,相邻两站之间的距离(站距)为147.18÷20=7.359(m).而−1站到0站之间的距离为5m.

解 从−1站到0站这一段的面积用A_1表示.它可以用曲线同坐标轴的交点的连线与坐标轴构成的三角形的面积来近似表示,即

$$A_1 \approx \frac{1}{2} \times 5 \times 2.305 = 5.763(\mathrm{m}^2).$$

从0站到20站间的面积用A_2表示,站距用Δx表示.则

$$\Delta x = \frac{147.18}{20} = 7.359.$$

根据抛物线法公式(4),得

$$A_2 \approx [(y_0+y_{20})+4(y_1+y_3+y_5+\cdots+y_{19})$$
$$+2(y_2+y_4+\cdots+y_{18})]\frac{\Delta x}{3}$$
$$=[(2.305+0)+4(4.865+8.568+10.011$$
$$+10.200+10.200+10.200+10.200+9.416$$
$$+6.083+1.814)+2(6.974+9.559+10.183$$
$$+10.200+10.200+10.200+10.040$$
$$+8.015+3.909)]\times\frac{7.359}{3}$$
$$=(2.305+4\times 81.557+2\times 79.280)\times 2.453$$
$$=487.093\times 2.453$$
$$=1194.839(\mathrm{m}^2).$$

因此，所求图形的面积为

$$A=A_1+A_2\approx 5.763+1194.839=1200.602(\mathrm{m}^2).$$

习　题　5—6

1. 某河床的横断面如图5—11所示. 为了计算最大排洪量，需要计算它的断面积. 试根据图示的测量数据(单位为m)用梯形法计算其断面积.

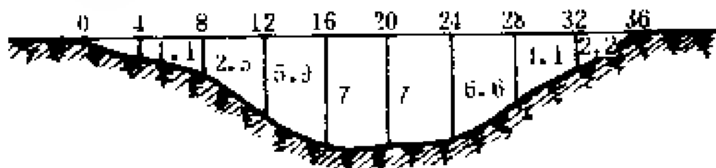


图　5—11

2. 用三种积分近似计算法计算 $S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$. （取 $n=6$. 被积函数值取四位小数.）

3. 用三种积分近似计算法计算 $\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x}$ 以求 ln 2的近似值.（取 $n=10$，被积函数值取四位小数.）

第七节　广 义 积 分

在一些实际问题中，我们常遇到积分区间为无穷区间，或者被

积函数为无界函数的积分，它们已经不属于前面所说的定积分了．因此，我们对定积分作如下两种推广，从而形成广义积分的概念．

一、无穷限的广义积分

定义1 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，取 $b>a$．如果极限

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上的广义积分，记作 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{1}$$

这时也称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；如果上述极限不存在，函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上的广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 就没有意义，习惯上称为广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散，这时记号 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 不再表示数值了．

类似地，设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,b]$ 上连续，取 $a<b$．如果极限

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty,b]$ 上的广义积分，记作 $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{2}$$

这时也称广义积分 $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；如果上述极限不存在，就称广义积分 $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散．

设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，如果广义积分

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x \quad \text{和} \quad \int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

都收敛，则称上述两广义积分之和为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的广义积分，记作 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} f(x)\mathrm{d}x. \qquad (3)$$

这时也称广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；否则就称广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

上述广义积分统称为无穷限的广义积分.

例1 计算广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

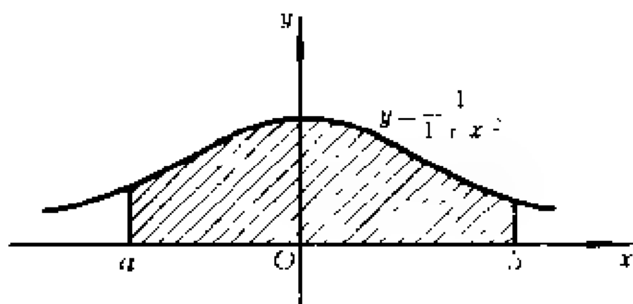


图 5—12

解 由(3)式得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} + \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

$$= \lim_{a\to-\infty}[\arctan x]_{a}^{0} + \lim_{b\to+\infty}[\arctan x]_{0}^{b}$$

$$= -\lim_{a\to-\infty}\arctan a + \lim_{b\to+\infty}\arctan b$$

$$=-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

这个广义积分值的几何意义是：当 $a\to-\infty$、$b\to+\infty$时，虽然图5－12中阴影部分向左、右无限延伸，但其面积却有极限值 π. 简单地说，它是位于曲线 $y=\frac{1}{1+x^2}$的下方，x 轴上方的图形面积.

例2 计算广义积分$\int_0^{+\infty}te^{-pt}dt$（$p$ 是常数，且 $p>0$）.

解 $$\int_0^{+\infty}te^{-pt}dt=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b te^{-pt}dt$$
$$=\lim_{b\to+\infty}\left\{\left[-\frac{t}{p}e^{-pt}\right]_0^b+\frac{1}{p}\int_0^b e^{-pt}dt\right\}$$
$$=\left[-\frac{t}{p}e^{-pt}\right]_0^{+\infty}-\frac{1}{p^2}\left[e^{-pt}\right]_0^{+\infty} \quad ①$$
$$=-\frac{1}{p}\lim_{t\to+\infty}te^{-pt}-0-\frac{1}{p^2}(0-1)=\frac{1}{p^2}.$$

注意，式中的极限$\lim\limits_{t\to+\infty}te^{-pt}$是未定式，可用洛必达法则确定.

例3 证明广义积分$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$（$a>0$）当 $p>1$时收敛，当 $p\leqslant1$时发散.

证 当 $p=1$时，
$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x}=\left[\ln x\right]_a^{+\infty}=+\infty,$$
当 $p\neq1$时，
$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_a^{+\infty}=\begin{cases}+\infty, & p<1,\\ \frac{a^{1-p}}{p-1}, & p>1.\end{cases}$$

因此，当 $p>1$时，这广义积分收敛，其值为$\frac{a^{1-p}}{p-1}$；当 $p\leqslant1$时，这广义积分发散.

---

① 有时为了方便，把$\lim\limits_{b\to+\infty}\left[F(x)\right]_a^b$记作$\left[F(x)\right]_a^{+\infty}$.

二、无界函数的广义积分

现在我们把定积分推广到被积函数为无界函数的情形.

定义2 设函数 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续，而在点 a 的右邻域[1]内无界. 取 $\varepsilon>0$，如果极限

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上的广义积分，仍然记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x. \tag{4}$$

这时也称广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 如果上述极限不存在，就称广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

类似地，设函数 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续，而在点 b 的左邻域内无界. 取 $\varepsilon>0$，如果极限

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x$$

存在，则定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x; \tag{5}$$

否则，就称广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上除点 $c\,(a<c<b)$ 外连续，而在点 c 的邻域内无界. 如果两个广义积分

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x \quad 与 \quad \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

都收敛，则定义

---

[1] 点 a 的右(或左)邻域指以 a 为左(或右)端点的任一开区间.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon' \to +0}\int_{c+\varepsilon'}^b f(x)\mathrm{d}x; \qquad (6)$$

否则，就称广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ **发散**.

例4 计算广义积分

$$\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad (a>0).$$

解 因为

$$\lim_{x\to a-0}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = +\infty,$$

所以被积函数在点 a 的左邻域内无界. 于是，按(5)式有

$$\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{a-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\arcsin\frac{x}{a}\right]_0^{a-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\arcsin\frac{a-\varepsilon}{a} - 0\right]$$

$$= \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

这个广义积分值的几何意义是：位于曲线 $y=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ 之下，x 轴之上，直线 $x=0$ 与 $x=a$ 之间的图形面积(图5－13).

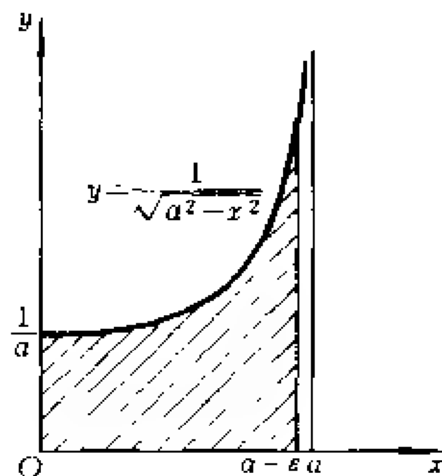


图 5－13

例5 讨论广义积分 $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 的收敛性.

解 被积函数 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 在积分区间$[-1,1]$上除 $x=0$ 外连续，且 $\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}=\infty$.

由于

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{-\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)=+\infty,$$

即广义积分$\int_{-1}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$发散，所以广义积分$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$发散.

注意 如果疏忽了$x=0$是被积函数的无穷间断点，就会得到以下的错误结果：

$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1}=-1-1=-2.$$

例6 证明广义积分$\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q}$当$q<1$时收敛；当$q\geqslant 1$时发散.

证 当$q=1$时，

$$\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q}=\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{x-a}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{b}\frac{\mathrm{d}x}{x-a}$$
$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\ln(x-a)\right]_{a+\varepsilon}^{b}=\left[\ln(x-a)\right]_{a+0}^{b}①=+\infty.$$

当$q\neq 1$时，

$$\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q}=\left[\frac{(x-a)^{1-q}}{1-q}\right]_{a}^{b}=\begin{cases}\dfrac{(b-a)^{1-q}}{1-q}, & q<1,\\ +\infty, & q>1.\end{cases}$$

因此，当$q<1$时，这广义积分收敛，其值为$\frac{(b-a)^{1-q}}{1-q}$；当$q\geqslant 1$时，这广义积分发散.

习 题 5－7

1. 判别下列各广义积分的收敛性，如果收敛，计算广义积分的值：

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4}$；　　(2) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$；

(3) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x\quad(a>0)$；　　(4) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{ch}\,t\,\mathrm{d}t\quad(p>1)$；

① 有时为了方便，把$\lim_{\varepsilon\to+0}[F(x)]_{a+\varepsilon}^{b}$记作$[F(x)]_{a+0}^{b}$.

(5) $\int_0^{+\infty} e^{-pt}\sin\omega t\,dt\quad(p>0,\omega>0)$；(6) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$；

(7) $\int_0^1\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$；　　(8) $\int_0^2\frac{dx}{(1-x)^2}$；

(9) $\int_1^2\frac{x\,dx}{\sqrt{x-1}}$；　　(10) $\int_1^e\frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$.

2. 当 k 为何值时，广义积分 $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^k}$ 收敛？当 k 为何值时，这广义积分发散？又当 k 为何值时，这广义积分取得最小值？

3. 利用递推公式计算广义积分 $I_n=\int_0^{+\infty}x^n e^{-x}dx$.

*第八节　广义积分的审敛法　Γ-函数

广义积分的收敛性，可以通过求被积函数的原函数，然后按定义取极限，根据极限的存在与否来确定. 本节中我们来建立不通过被积函数的原函数判定广义积分收敛性的判定法.

一、无穷限的广义积分的审敛法

定理1　设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $f(x)\geqslant 0$. 若函数

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

在 $[a,+\infty)$ 上有上界，则广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛.

事实上，因为 $f(x)\geqslant 0$，$F(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调增加，又 $F(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有上界，故 $F(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上是单调有界的函数. 利用"单调有界函数 $F(x)$ 必有单侧极限"以及"$[a,+\infty)$ 上的单调有界函数 $F(x)$ 必有极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$"的准则，就可知道极限

$$\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt$$

存在，即广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛.

根据定理1，对于非负函数的无穷限的广义积分，我们有以下

的比较审敛原理.

定理2 （比较审敛原理） **设函数 $f(x)$、$g(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续. 如果 $0\leqslant f(x)\leqslant g(x)(a\leqslant x<+\infty)$，并且 $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛；如果 $0\leqslant g(x)\leqslant f(x)(a\leqslant x<+\infty)$，并且 $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 发散，则 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 也发散.**

证 设 $a<b<+\infty$，由 $0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$ 及 $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x.$$

这表明作为积分上限 b 的函数

$$F(b)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

在 $[a,+\infty)$ 上有上界. 由定理1即知广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

如果 $0\leqslant g(x)\leqslant f(x)$，且 $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 发散，则 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 必定发散. 因为如果 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，由定理的第一部分即知 $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 也收敛，这与假设相矛盾. 证毕.

由上节例3知道，广义积分 $\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}(a>0)$ 当 $p>1$ 时收敛；当 $p\leqslant1$ 时发散. 因此，取 $g(x)=\frac{A}{x^p}(A>0)$，立即可得下面的广义积分的比较审敛法.

定理3 （比较审敛法1） **设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)(a>0)$ 上连续，且 $f(x)\geqslant0$. 如果存在常数 $M>0$ 及 $p>1$，使得 $f(x)\leqslant\frac{M}{x^p}(a\leqslant x<+\infty)$，则广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；如果存在常数 $N>0$，使得 $f(x)\geqslant\frac{N}{x}(a\leqslant x<+\infty)$，则广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散.**

例1 判别广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^4+1}}$ 的收敛性.

解 由于

$$0<\frac{1}{\sqrt[3]{x^4+1}}<\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}=\frac{1}{x^{4/3}},$$

根据比较审敛法1，这个广义积分收敛.

以比较审敛法1为基础，我们可以得到在应用上较为方便的极限审敛法.

定理4 （极限审敛法1） 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ $(a>0)$ 上连续，且 $f(x)\geqslant 0$. 如果存在常数 $p>1$，使得 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^pf(x)$ 存在，则广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=d>0$（或 $\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=+\infty$），则广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

证 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^pf(x)=c\,(p>1)$. 根据极限的定义，当 x 充分大时 $(x>x_1\geqslant a)$，必有

$$|x^pf(x)-c|<1,$$

由此得

$$0\leqslant x^pf(x)<1+c.$$

令 $1+c=M>0$，于是在区间 $x_1<x<+\infty$ 内不等式 $0\leqslant f(x)<\frac{M}{x^p}$ 成立. 由比较审敛法1知 $\int_{x_1}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，即 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_{x_1}^{b}f(x)\mathrm{d}x$ 存在. 另一方面，根据积分的性质有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{x_1}f(x)\mathrm{d}x+\int_{x_1}^{b}f(x)\mathrm{d}x.$$

令 $b\to+\infty$，可知 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在，即广义积分

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$$

收敛.

如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=d>0$（或 $+\infty$），则当 x 充分大时 $(x>x_1\geqslant$

a),必有

$$|xf(x)-d|<\frac{d}{2},$$

由此得
$$xf(x)>\frac{d}{2}.$$

(当 $\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=+\infty$ 时,可取任意正数作为 d.)令 $\frac{d}{2}=N>0$. 于是在区间 $x_1<x<+\infty$ 内不等式 $f(x)\geqslant\frac{N}{x}$ 成立. 根据比较审敛法1知 $\int_{x_1}^{-\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散. 又由等式

$$\int_{x_1}^{b}f(x)\mathrm{d}x=\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x\quad\int_{a}^{x_1}f(x)\mathrm{d}x$$

看出, $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 不可能存在(否则 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_{x_1}^{b}f(x)\mathrm{d}x$ 也要存在. 这与 $\int_{x_1}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散矛盾),即广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散. 证明完毕.

例2 判别广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$ 的收敛性.

解 由于

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}=1,$$

根据极限审敛法1,所给广义积分收敛.

例3 判别广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^{3/2}}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 的收敛性.

解 由于

$$\lim_{x\to+\infty}x\,\frac{x^{3/2}}{1+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\sqrt{x}}{1+x^2}=+\infty,$$

根据极限审敛法1,所给广义积分发散.

例4 判别广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x$ 的收敛性.

解 由于

$$\lim_{x\to+\infty} x\frac{\arctan x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},$$

根据极限审敛法1，所给广义积分发散.

假定广义积分的被积函数在所讨论的区间上可取正值也可取负值. 对于这类广义积分的收敛性，我们有如下的结论.

定理5 **设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续. 如果广义积分**

$$\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$$

收敛，则广义积分

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$$

也收敛.

证 令 $\varphi(x)=\frac{1}{2}(f(x)+|f(x)|)$. 于是 $\varphi(x)\geqslant 0$，且 $\varphi(x)\leqslant|f(x)|$，而 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，由比较审敛原理即知 $\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$ 也收敛. 但 $f(x)=2\varphi(x)-|f(x)|$，因此

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=2\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x-\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x,$$

从而有

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=2\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x-\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x.$$

可见广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 是两个收敛的广义积分的差，因此它是收敛的. 证毕.

通常称满足定理5条件的广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 为绝对收敛. 于是，定理5可简单地表达为：**绝对收敛的广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 必定收敛.**

例5 判别广义积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\sin bx\mathrm{d}x$ （a,b 都是常数，且 $a>0$）的收敛性.

解 因为 $|e^{-ax}\sin bx|\leqslant e^{-ax}$，而 $\int_0^{+\infty} e^{-ax}dx$ 收敛，根据比较审敛原理，广义积分 $\int_0^{+\infty} |e^{-ax}\sin bx|dx$ 收敛. 由定理5可知所给广义积分收敛.

二、无界函数的广义积分的审敛法

对于无界函数的广义积分，也有类似的审敛法.

由上节例6知道，广义积分

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q}$$

当 $q<1$ 时收敛，当 $q\geqslant 1$ 时发散. 于是，与定理3、定理4类似可得如下两个审敛法：

定理6（比较审敛法2） **设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上连续，且 $f(x)\geqslant 0$，$\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=+\infty$. 如果存在常数 $M>0$ 及 $q<1$，使得**

$$f(x)\leqslant\frac{M}{(x-a)^q}\quad(a<x\leqslant b),$$

则广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛；如果存在常数 $N>0$ 及 $q\geqslant 1$，使得

$$f(x)\geqslant\frac{N}{(x-a)^q}\quad(a<x\leqslant b),$$

则广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

定理7（极限审敛法2） **设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上连续，且 $f(x)\geqslant 0$，$\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=+\infty$. 如果存在常数 $0<q<1$，使得**

$$\lim_{x\to a+0}(x-a)^q f(x)$$

存在，则广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛，如果存在常数 $q\geqslant 1$，使得

$$\lim_{x\to a+0}(x-a)^q f(x)=d>0\quad(\text{或}\lim_{x\to a+0}(x-a)^q f(x)=+\infty),$$

则广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

例6 判别广义积分 $\int_1^3 \frac{dx}{\ln x}$ 的收敛性.

解 这里被积函数在点 $x=1$ 的右邻域内无界. 由洛必达法则知

$$\lim_{x\to1+0}(x-1)\frac{1}{\ln x}=\lim_{x\to1+0}\frac{1}{\frac{1}{x}}=1>0,$$

根据极限审敛法2,所给广义积分发散.

例7 判别椭圆积分

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad (k^2<1)$$

的收敛性.

解 这里被积函数在点 $x=1$ 的左邻域内无界. 由于

$$\lim_{x\to1-0}(1-x)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$=\lim_{x\to1-0}\frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-k^2x^2)}}=\frac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}},$$

根据极限审敛法2,所给广义积分收敛.

对于无界函数的广义积分,当被积函数在所讨论的区间上可取正值也可取负值时,有与定理5相类似的结论,在此不再详述.

例8 判别广义积分 $\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}dx$ 的收敛性.

解 因为 $\left|\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{x}}$,而 $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$ 收敛,根据比较审敛原理,广义积分 $\int_0^1\left|\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\right|dx$ 收敛,从而广义积分 $\int_0^1\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}dx$ 也收敛.

三、Γ—函数

现在我们研究在理论上和应用上都有重要意义的Γ—函数.这函数的定义是

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}dx \quad (s>0). \tag{1}$$

首先我们讨论(1)式右端积分的收敛性问题.这个积分的积分区间为无穷,又当$s-1<0$时被积函数在点$x=0$的右邻域内无界.为此,我们分别讨论下列两个积分

$$I_1=\int_0^1 e^{-x}x^{s-1}dx,\ I_2=\int_1^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}dx$$

的收敛性.

先讨论I_1.当$s\geqslant1$时,I_1是常义积分;当$0<s<1$时,因为

$$e^{-x}\cdot x^{s-1}=\frac{1}{x^{1-s}}\cdot\frac{1}{e^x}<\frac{1}{x^{1-s}},$$

而$1-s<1$,根据比较审敛法2,广义积分I_1收敛.

再讨论I_2.因为

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\cdot(e^{-x}x^{s-1})=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{s+1}}{e^x}=0,$$

根据极限审敛法1,I_2也收敛.

由以上讨论即得广义积分$\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{s-1}dx$对$s>0$均收敛.Γ函数的图形如图5—14所示.

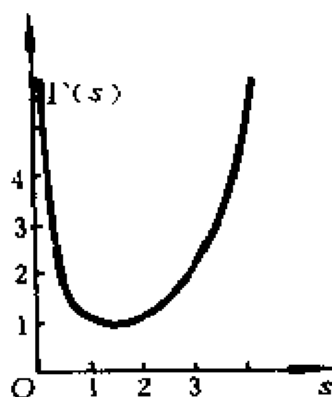


图 5—14

其次我们来讨论Γ—函数的几个重要性质.

1. 递推公式 $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$ $(s>0)$.

证 因为

$$\Gamma(s+1)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^s dx=\lim_{b\to+\infty}\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^b e^{-x}x^s dx,$$

应用分部积分法，

$$\int_\varepsilon^b e^{-x}x^s dx=[-e^{-x}x^s]_\varepsilon^b+s\int_\varepsilon^b e^{-x}x^{s-1}dx,$$

而 $\lim\limits_{b\to+\infty}\lim\limits_{\varepsilon\to+0}[e^{-x}x^s]_\varepsilon^b=0$，所以

$$\Gamma(s+1)=\lim_{b\to+\infty}\lim_{\varepsilon\to+0}s\int_\varepsilon^b e^{-x}x^{s-1}dx=s\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}dx=s\Gamma(s).$$

显然，$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=1.$

反复运用递推公式，便有

$$\Gamma(2)=1\cdot\Gamma(1)=1,$$
$$\Gamma(3)=2\cdot\Gamma(2)=2!,$$
$$\Gamma(4)=3\cdot\Gamma(3)=3!,$$
$$\cdots\cdots$$

一般地，对任何正整数 n，有

$$\Gamma(n+1)=n!$$

所以，我们可以把 Γ－函数看成是阶乘的推广.

2. 当 $s\to+0$ 时，$\Gamma(s)\to+\infty$.

证 因为

$$\Gamma(s)=\frac{\Gamma(s+1)}{s},\ \Gamma(1)=1,$$

所以当 $s\to+0$ 时，$\Gamma(s)\to+\infty$[①].

3. $\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin\pi s}\ (0<s<1).$

这个公式称为余元公式，在此我们不作证明.

当 $s=\frac{1}{2}$ 时，由余元公式可得

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

---

① Γ－函数在 $s>0$ 时连续.

4. 在 $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{s-1}dx$ 中,作代换 $x=u^2$,有

$$\Gamma(s)=2\int_0^{+\infty}e^{-u^2}u^{2s-1}du. \tag{2}$$

再令 $2s-1=t$ 或 $s=\frac{1+t}{2}$,即有

$$\int_0^{+\infty}e^{-u^2}u^t du=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1+t}{2}\right),(t>-1).$$

上式左端是应用上常见的积分,它的值可以通过上式用Γ—函数计算出来.

在(2)中,令 $s=\frac{1}{2}$,得

$$2\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

从而

$$\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

上式左端的积分是在概率论中常用的积分.

*习　题　5—8

1. 判别下列广义积分的收敛性:

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+x^2+1}dx$;　　(2) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$;

(3) $\int_1^{+\infty}\sin\frac{1}{x^2}dx$;　　(4) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x|\sin x|}$;

(5) $\int_1^{+\infty}\frac{x\arctan x}{1+x^3}dx$;　　(6) $\int_1^2\frac{dx}{(\ln x)^3}$;

(7) $\int_0^1\frac{x^4}{\sqrt{1-x^4}}dx$;　　(8) $\int_1^2\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$.

2. 设广义积分 $\int_1^{+\infty}f^2(x)dx$ 收敛. 证明广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ 绝对收敛.

3. 用Γ—函数表示下列积分,并指出这些积分的收敛范围:

(1) $\int_0^{+\infty}e^{-x^n}dx\quad(n>0)$;　　(2) $\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^p dx$;

(3) $\int_0^{+\infty} x^m e^{-x^n} dx \quad (n\neq 0)$.

4. 证明 $\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right)=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdots(2k-1)\sqrt{\pi}}{2^k}$，其中 k 为自然数.

5. 证明以下各式(其中 n 为自然数)：

(1) $2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdots 2n=2^n\Gamma(n+1)$；(2) $1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdots(2n-1)=\frac{\Gamma(2n)}{2^{n-1}\Gamma(n)}$；

(3) $\sqrt{\pi}\,\Gamma(2n)=2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$.

(勒让德(Legendre)倍量公式).

总 习 题 五

1. 填空

(1) 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上(常义)可积的________条件，而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积的________条件；

(2) 对 $[a,+\infty)$ 上非负、连续的函数 $f(x)$，它的变上限积分 $\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界是广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛的________条件；

*(3) 绝对收敛的广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 一定________；

(4) 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义且 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上可积，此时积分 $\int_a^b f(x)dx$ ________存在.

2. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}\ (p>0)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x}{x-a}\int_a^x f(t)dt$，其中 $f(x)$ 连续；

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x(\arctan t)^2dt}{\sqrt{x^2+1}}$.

3. 下列计算是否正确，试说明理由：

(1) $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}=-\int_{-1}^{1}\frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=\left[-\arctan\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1}=-\frac{\pi}{2}$；

(2) 因为 $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}\xlongequal{x=-\frac{1}{t}}-\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1}$,

所以
$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}=0.$$

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\lim\limits_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=0.$

4. 设 $p>0$,证明

$$\frac{p}{p+1}<\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^p}<1.$$

5. 设 $f(x)$、$g(x)$在区间$[a,b]$上均连续,证明:

(1) $\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$ (柯西—施瓦茨不等式);

(2) $\left(\int_a^b [f(x)+g(x)]^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$
(闵可夫斯基不等式).

6. 设 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续,且 $f(x)>0$. 证明

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\geqslant(b-a)^2.$$

7. 计算下列积分:

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^{a}\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$;　　(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin 2x}\,\mathrm{d}x$;

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}$.

8. 设 $f(x)$为连续函数,证明

$$\int_0^x f(t)(x-t)\mathrm{d}t=\int_0^x\left(\int_0^t f(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t.$$

9. 设 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续,且 $f(x)>0$,

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_b^x\frac{\mathrm{d}t}{f(t)},\ x\in[a,b].$$

证明:

(1) $F'(x)\geqslant 2$;

(2) 方程 $F(x)=0$在区间(a,b)内有且仅有一个根.

10. 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x}, & x\geqslant 0,\\[2mm] \dfrac{1}{1+e^x}, & x<0.\end{cases}$$

求 $\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x$.

11. 设 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续，$g(x)$在区间$[a,b]$上连续且不变号. 证明至少存在一点$\xi\in[a,b]$，使下式成立

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \quad \text{（积分第一中值定理）}.$$

*12. 证明：$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{n-1}{2}\int_0^{+\infty} x^{n-2}e^{-x^2}\mathrm{d}x \quad (n>1)$，并用它证明：

$$\int_0^{+\infty} x^{2n+1}e^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\Gamma(n+1) \quad (n\in\mathbb{N}).$$

*13. 判别下列广义积分的收敛性：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x$； (2) $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\cdot\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$；

(3) $\int_2^{+\infty}\frac{\cos x}{\ln x}\mathrm{d}x$； (4) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2(x-1)(x-2)}}$.

*14. 计算下列广义积分：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,\mathrm{d}x$； (2) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^a)} \quad (a\geqslant 0)$.

第六章　定积分的应用

本章中我们将应用前面学过的定积分理论来分析和解决一些几何、物理中的问题.通过这些例子,不仅在于建立计算这些几何、物理量的公式,而且更重要的还在于介绍运用元素法将一个量表达成为定积分的分析方法.

第一节　定积分的元素法

在定积分的应用中,经常采用所谓元素法.为了说明这种方法,我们先回顾一下第五章中讨论过的曲边梯形的面积问题.

设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续且 $f(x)\geqslant 0$,求以曲线 $y=f(x)$ 为曲边、底为 $[a,b]$ 的曲边梯形的面积 A.把这个面积 A 表示为定积分

$$A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

的步骤是:

(1) 用任意一组分点把区间 $[a,b]$ 分成长度为 $\Delta x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的 n 个小区间,相应地把曲边梯形分成 n 个窄曲边梯形,第 i 个窄曲边梯形的面积设为 ΔA_i,于是有

$$A=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i;$$

(2) 计算 ΔA_i 的近似值

$$\Delta A_i\approx f(\xi_i)\Delta x_i\quad(x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i);$$

(3) 求和,得 A 的近似值

$$A\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i;$$

(4) 求极限,得

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

在上述问题中我们注意到，所求量（即面积 A）与区间$[a,b]$有关. 如果把区间$[a,b]$分成许多部分区间，则所求量相应地分成许多部分量（即 ΔA_i），而所求量等于所有部分量之和（即 $A=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i$），这一性质称为所求量对于区间$[a,b]$具有可加性. 我们还要指出，以 $f(\xi_i)\Delta x_i$ 近似代替部分量 ΔA_i 时，它们只相差一个比 Δx_i 高阶的无穷小，因此和式 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 的极限是 A 的精确值，而 A 可以表示为定积分：

$$A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

在引出 A 的积分表达式的四个步骤中，主要的是第二步，这一步是要确定 ΔA_i 的近似值 $f(\xi_i)\Delta x_i$，使得

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

在实用上，为了简便起见，省略下标 i，用 ΔA 表示任一小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$上的窄曲边梯形的面积，这样，

$$A=\sum \Delta A.$$

取$[x,x+\mathrm{d}x]$的左端点 x 为 ξ，以点 x 处的函数值 $f(x)$为高、$\mathrm{d}x$ 为底的矩形的面积 $f(x)\mathrm{d}x$ 为 ΔA 的近似值（如图 6－1 阴影部分所示），即

$$\Delta A\approx f(x)\mathrm{d}x.$$

上式右端 $f(x)\mathrm{d}x$ 叫做面积元素，记为 $\mathrm{d}A=f(x)\mathrm{d}x$. 于是

$$A\approx\sum f(x)\mathrm{d}x,$$

则
$$A=\lim\sum f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

一般地，如果某一实际问题中的所求量 U 符合下列条件：

（1）U 是与一个变量 x 的变化区间$[a,b]$有关的量；

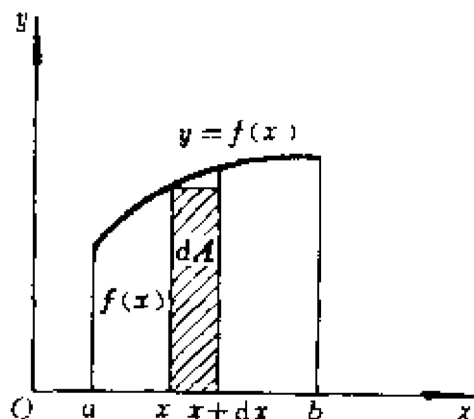


图 6-1

(2) U 对于区间$[a,b]$具有可加性，就是说，如果把区间$[a,b]$分成许多部分区间，则U相应地分成许多部分量，而U等于所有部分量之和；

(3) 部分量ΔU_i的近似值可表示为$f(\xi_i)\Delta x_i$；

那末就可考虑用定积分来表达这个量U. 通常写出这个量U的积分表达式的步骤是：

1) 根据问题的具体情况，选取一个变量例如x为积分变量，并确定它的变化区间$[a,b]$；

2) 设想把区间$[a,b]$分成n个小区间，取其中任一小区间并记作$[x,x+dx]$，求出相应于这个小区间的部分量ΔU的近似值. 如果ΔU能近似地表示为$[a,b]$上的一个连续函数在x处的值$f(x)$与dx的乘积[①]，就把$f(x)dx$称为量U的元素且记作dU，即

$$dU=f(x)dx;$$

3) 以所求量U的元素$f(x)dx$为被积表达式，在区间$[a,b]$上作定积分，得

$$U=\int_a^b f(x)dx.$$

这就是所求量U的积分表达式.

① 这里ΔU与$f(x)dx$相差一个比dx高阶的无穷小.

这个方法通常叫做元素法.下面各节中我们将应用这个方法来讨论几何、物理中的一些问题.

第二节　平面图形的面积

一、直角坐标情形

在第五章中我们已经知道,由曲线 $y=f(x)(f(x)\geqslant 0)$ 及直线 $x=a,x=b(a<b)$ 与 x 轴所围成的曲边梯形的面积 A 是定积分

$$A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

其中被积表达式 $f(x)\mathrm{d}x$ 就是直角坐标下的面积元素,它表示高为 $f(x)$、底为 $\mathrm{d}x$ 的一个矩形面积.

应用定积分,不但可以计算曲边梯形面积,还可以计算一些比较复杂的平面图形的面积.

例 1　计算由两条抛物线:$y^2=x$、$y=x^2$ 所围成的图形的面积.

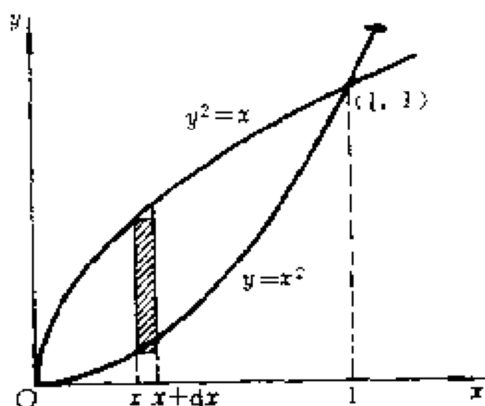


图 6-2

解　这两条抛物线所围成的图形如图 6—2 所示.为了具体定出图形的所在范围,先求出这两条抛物线的交点.为此,解方程组

$$\begin{cases}y^2=x,\\ y=x^2,\end{cases}$$

得到两个解：

$$x=0, y=0 \quad \text{及} \quad x=1, y=1.$$

即这两抛物线的交点为(0,0)及(1,1)，从而知道这图形在直线 $x=0$及 $x=1$ 之间.

取横坐标 x 为积分变量，它的变化区间为[0,1]. 相应于[0,1]上的任一小区间$[x,x+dx]$的窄条的面积近似于高为 $\sqrt{x}-x^2$、底为 dx 的窄矩形的面积，从而得到面积元素

$$dA=(\sqrt{x}-x^2)dx.$$

以$(\sqrt{x}-x^2)dx$ 为被积表达式，在闭区间[0,1]上作定积分，便得所求面积为

$$A=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\left[\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}.$$

例 2 计算抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $y=x-4$ 所围成的图形的面积.

解 这个图形如图 6—3 所示. 为了定出这图形所在范围，先求出所给抛物线和直线的交点. 解方程组

$$\begin{cases} y^2=2x, \\ y=x-4, \end{cases}$$

得交点(2,－2)和(8,4)，从而知道这图形在直线 $y=-2$ 及 $y=4$ 之间.

现在，选取纵坐标 y 为积分变量，它的变化区间为[－2,4](读者可以思考一下，取横坐标 x 为积分变量，有什么不方便的地方). 相应于[－2,4]上任一小区间$[y,y+dy]$的窄条面积近似于高为 dy、底为$(y+4)-\frac{1}{2}y^2$ 的窄矩形的面积，从而得到面积元素

$$dA=\left(y+4-\frac{1}{2}y^2\right)dy.$$

以$\left(y+4-\frac{1}{2}y^2\right)dy$ 为被积表达式，在闭区间[－2,4]上作定积分，便得所求的面积为

$$A=\int_{-2}^{4}\left(y+4-\frac{1}{2}y^2\right)dy$$
$$=\left[\frac{y^2}{2}+4y-\frac{y^3}{6}\right]_{-2}^{4}$$
$$=18.$$

由例 2 我们可以看到，积分变量选得适当，就可使计算方便.

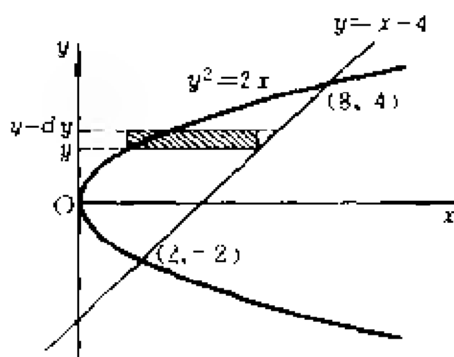


图 6−3

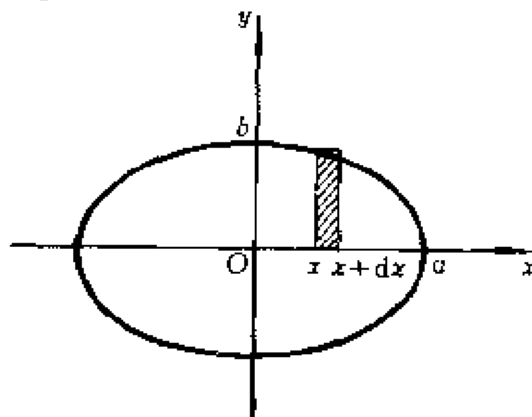


图 6−4

例 3 求椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$所围成的图形的面积.

解 这椭圆关于两坐标轴都对称(图 6−4)，所以椭圆所围成的图形的面积为

$$A=4A_1,$$

其中 A_1 为该椭圆在第一象限部分与两坐标轴所围图形的面积.因此

$$A=4A_1=4\int_0^a y\mathrm{d}x.$$

利用椭圆的参数方程

$$\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t.\end{cases}$$

应用定积分换元法，令 $x=a\cos t$，则

$$y=b\sin t,\mathrm{d}x=-a\sin t\mathrm{d}t.$$

当 x 由 0 变到 a 时，t 由 $\frac{\pi}{2}$ 变到 0，所以

$$A=4\int_{\pi/2}^{0} b\sin t(-a\sin t)\mathrm{d}t=-4ab\int_{\pi/2}^{0}\sin^2 t\mathrm{d}t$$
$$=4ab\int_{0}^{\pi/2}\sin^2 t\mathrm{d}t=4ab\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\pi ab.$$

当 $a=b$ 时，就得到大家所熟悉的圆面积的公式 $A=\pi a^2$.

一般地，当曲边梯形的曲边 $y=f(x)$ $(f(x)\geqslant 0, x\in[a,b])$ 由参数方程

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}$$

给出时，如果 $x=\varphi(t)$ 适合：$\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b$，$\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$（或 $[\beta,\alpha]$）上具有连续导数，$y=\psi(t)$ 连续，则由曲边梯形的面积公式及定积分的换元公式可知，曲边梯形的面积为

$$A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

二、极坐标情形

某些平面图形，用极坐标来计算它们的面积比较方便.

设由曲线 $r=\varphi(\theta)$ 及射线 $\theta=\alpha, \theta=\beta$ 围成一图形（简称为曲边扇形），现在要计算它的面积（图 6－5）. 这里，$\varphi(\theta)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，且 $\varphi(\theta)\geqslant 0$.

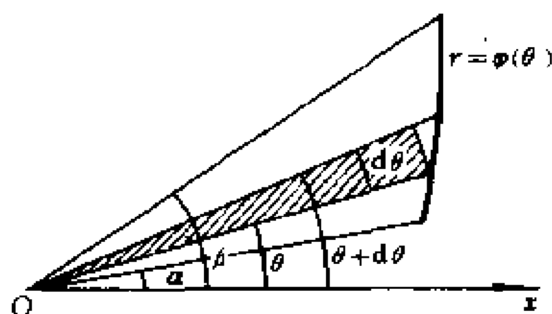


图 6－5

由于当 θ 在 $[\alpha,\beta]$ 上变动时，极径 $r=\varphi(\theta)$ 也随之变动，因此所

求图形的面积不能直接利用圆扇形面积的公式 $A=\frac{1}{2}R^2\theta$ 来计算.

取极角 θ 为积分变量，它的变化区间为$[\alpha,\beta]$. 相应于任一小区间$[\theta,\theta+d\theta]$的窄曲边扇形的面积可以用半径为 $r=\varphi(\theta)$、中心角为 $d\theta$ 的圆扇形的面积来近似代替，从而得到这窄曲边扇形面积的近似值，即曲边扇形的面积元素

$$dA=\frac{1}{2}[\varphi(\theta)]^2 d\theta.$$

以$\frac{1}{2}[\varphi(\theta)]^2 d\theta$ 为被积表达式，在闭区间$[\alpha,\beta]$上作定积分，便得所求曲边扇形的面积为

$$A=\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}[\varphi(\theta)]^2 d\theta.$$

例 4 计算阿基米德螺线

$$r=a\theta \quad (a>0)$$

上相应于 θ 从 0 变到 2π 的一段弧与极轴所围成的图形(图 6—6)的面积.

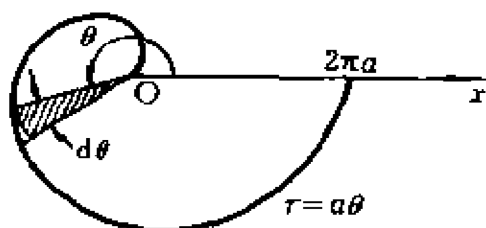


图 6—6

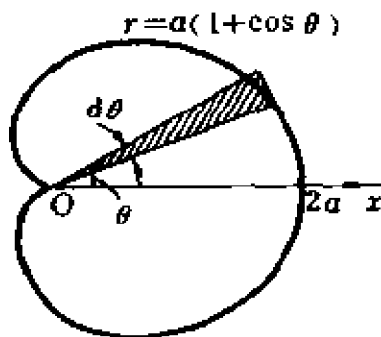


图 6—7

解 在指定的这段螺线上，θ 的变化区间为$[0,2\pi]$. 相应于$[0,2\pi]$上任一小区间$[\theta,\theta+d\theta]$的窄曲边扇形的面积近似于半径为 $a\theta$、中心角为 $d\theta$ 的圆扇形的面积. 从而得到面积元素

$$dA=\frac{1}{2}(a\theta)^2 d\theta.$$

于是所求面积为

$$A=\int_0^{2\pi}\frac{a^2}{2}\theta^2\mathrm{d}\theta=\frac{a^2}{2}\left[\frac{\theta^3}{3}\right]_0^{2\pi}=\frac{4}{3}a^2\pi^3.$$

例 5 计算心形线

$$r=a(1+\cos\theta)\quad(a>0)$$

所围成的图形的面积.

解 心形线所围成的图形如图 6—7 所示.这个图形对称于极轴,因此所求图形的面积 A 是极轴以上部分图形面积 A_1 的两倍.

对于极轴以上部分的图形,θ 的变化区间为$[0,\pi]$.相应于$[0,\pi]$上任一小区间$[\theta,\theta+\mathrm{d}\theta]$的窄曲边扇形的面积近似于半径为$a(1+\cos\theta)$、中心角为 $\mathrm{d}\theta$ 的圆扇形的面积.从而得到面积元素

$$\mathrm{d}A=\frac{1}{2}a^2(1+\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta,$$

于是

$$A_1=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}a^2(1+\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta=\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{2}+2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\left[\frac{3}{2}\theta+2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\pi}=\frac{3}{4}\pi a^2,$$

因而所求面积为

$$A=2A_1=\frac{3}{2}\pi a^2.$$

习 题 6—2

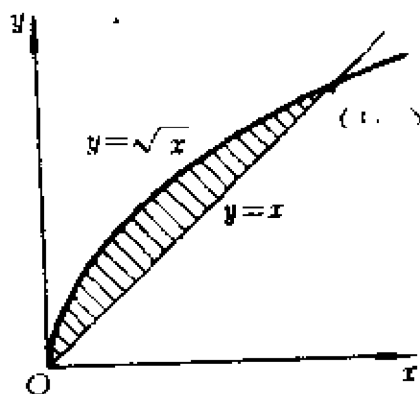
1. 求图 6—8 中各画斜线部分的面积:

2. 求由下列各曲线所围成的图形的面积:

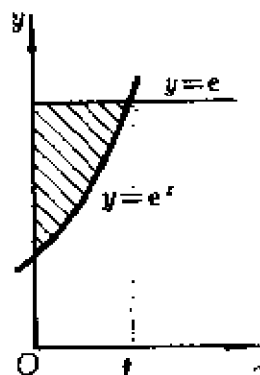


(1) $y=\frac{1}{2}x^2$ 与 $x^2+y^2=8$(两部分都要计算);

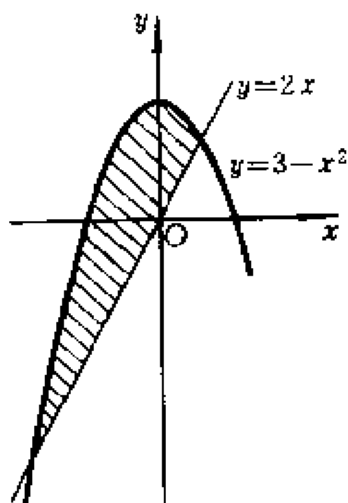
(2) $y=\frac{1}{x}$ 与直线 $y=x$ 及 $x=2$;



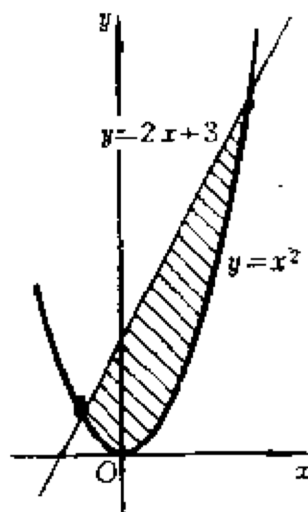
(1)



(2)



(3)



(4)

图 6—8

(3) $y=\mathrm{e}^{x}, y=\mathrm{e}^{-x}$与直线 $x=1$;

(4) $y=\ln x$, y 轴与直线 $y=\ln a, y=\ln b \quad (b>a>0)$.

3. 求抛物线 $y=-x^2+4x-3$ 及其在点$(0,-3)$和$(3,0)$处的切线所围成的图形的面积.

4. 求抛物线 $y^2=2px$ 及其在点$\left(\frac{p}{2},p\right)$处的法线所围成的图形的面积.

5. 求由下列各曲线所围成的图形的面积:

(1) $r=2a\cos\theta$;

(2) $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$;

(3) $r=2a(2+\cos\theta)$.

6. 求由摆线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$的一拱$(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$与横轴所围成的图形的面积.

7. 求对数螺线 $r=ae^{\theta}(-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 及射线 $\theta=\pi$ 所围成的图形的面积.

8. 求下列各曲线所围成图形的公共部分的面积：

(1) $r=3\cos\theta$ 及 $r=1+\cos\theta$；

(2) $r=\sqrt{2}\sin\theta$ 及 $r^2=\cos 2\theta$.

9. 求位于曲线 $y=e^x$ 下方，该曲线过原点的切线的左方以及 x 轴上方之间的图形的面积.

10. 求由抛物线 $y^2=4ax$ 与过焦点的弦所围成的图形面积的最小值.

第三节 体 积

一、旋转体的体积

旋转体就是由一个平面图形绕这平面内一条直线旋转一周而成的立体. 这直线叫做旋转轴. 圆柱、圆锥、圆台、球体可以分别看成是由矩形绕它的一条边、直角三角形绕它的直角边、直角梯形绕它的直角腰、半圆绕它的直径旋转一周而成的立体，所以它们都是旋转体.

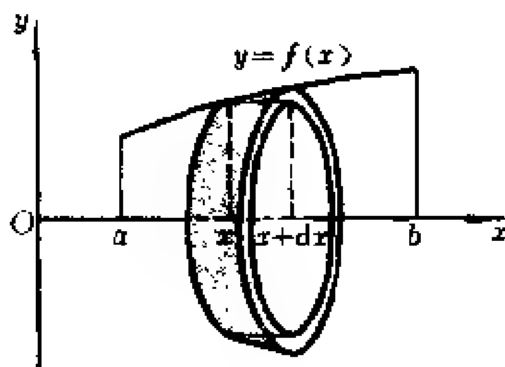


图 6—9

上述旋转体都可以看作是由连续曲线 $y=f(x)$、直线 $x=a$、$x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周而成的立体. 现在我们考虑用定积分来计算这种旋转体的体积.

取横坐标 x 为积分变量，它的变化区间为 $[a,b]$. 相应于 $[a,b]$ 上的任一小区间 $[x,x+dx]$ 的窄曲边梯形绕 x 轴旋转而成的薄片

的体积近似于以 $f(x)$ 为底半径、$\mathrm{d}x$ 为高的扁圆柱体的体积（图 6—9），即体积元素

$$\mathrm{d}V=\pi[f(x)]^2\mathrm{d}x.$$

以 $\pi[f(x)]^2\mathrm{d}x$ 为被积表达式，在闭区间 $[a,b]$ 上作定积分，便得所求旋转体体积为

$$V=\int_a^b \pi[f(x)]^2\mathrm{d}x.$$

例 1 连接坐标原点 O 及点 $P(h,r)$ 的直线、直线 $x=h$ 及 x 轴围成一个直角三角形（图 6—10）. 将它绕 x 轴旋转构成一个底半径为 r、高为 h 的圆锥体. 计算这圆锥体的体积.

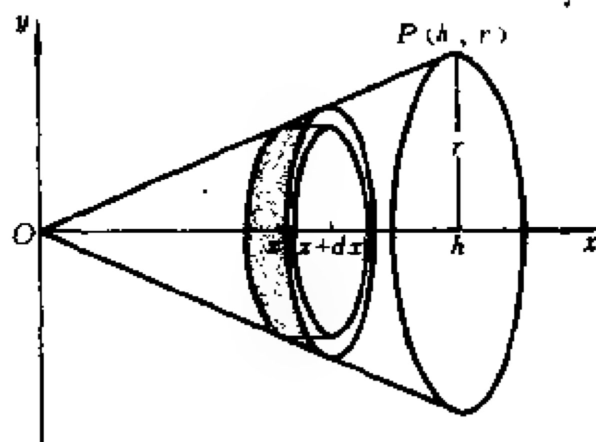


图 6—10

解 过原点 O 及点 $P(h,r)$ 的直线方程为

$$y=\frac{r}{h}x.$$

取横坐标 x 为积分变量，它的变化区间为 $[0,h]$. 圆锥体中相应于 $[0,h]$ 上任一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 的薄片的体积近似于底半径为 $\frac{r}{h}x$、高为 $\mathrm{d}x$ 的扁圆柱体的体积，即体积元素

$$\mathrm{d}V=\pi\left[\frac{r}{h}x\right]^2\mathrm{d}x.$$

于是所求圆锥体的体积为

$$V=\int_0^h \pi\left(\frac{r}{h}x\right)^2\mathrm{d}x=\frac{\pi r^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h=\frac{\pi r^2 h}{3}.$$

例 2 计算由椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

所围成的图形绕 x 轴旋转而成的旋转体(叫做旋转椭球体)的体积.

解 这个旋转椭球体也可以看作是由半个椭圆

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

及 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转而成的立体.

取 x 为积分变量,它的变化区间为 $[-a,a]$. 旋转椭球体中相应于 $[-a,a]$ 上任一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 的薄片的体积,近似于底半径为 $\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$、高为 $\mathrm{d}x$ 的扁圆柱体的体积(图 6—11),即体积元素

$$\mathrm{d}V=\frac{\pi b^2}{a^2}(a^2-x^2)\mathrm{d}x.$$

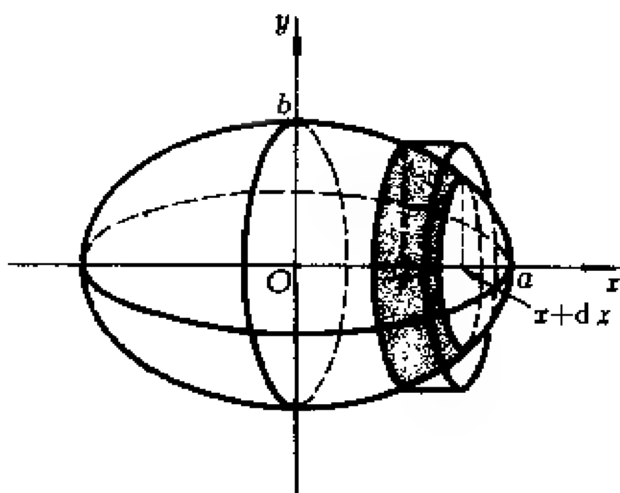


图 6—11

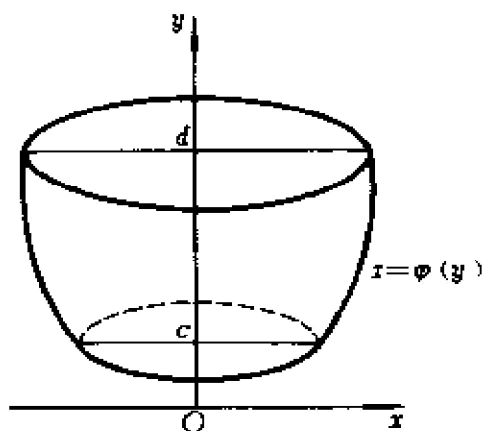


图 6—12

于是所求旋转椭球体的体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_{-a}^{a}\pi\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\mathrm{d}x \\ &=\pi\frac{b^2}{a^2}\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi ab^2. \end{aligned}$$

当 $a=b$ 时，旋转椭球体就成为半径为 a 的球体，它的体积为 $\frac{4}{3}\pi a^3$.

用与上面类似的方法可以推出：由曲线 $x=\varphi(y)$、直线 $y=c$、$y=d(c<d)$ 与 y 轴所围成的曲边梯形，绕 y 轴旋转一周而成的旋转体(图 6—12)的体积为

$$V=\pi\int_c^d [\varphi(y)]^2\mathrm{d}y.$$

例 3 计算由摆线 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$的一拱，直线 $y=0$ 所围成的图形分别绕 x 轴、y 轴旋转而成的旋转体的体积.

解 按旋转体的体积公式，所述图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积为

$$\begin{aligned}V_x&=\int_0^{2\pi a}\pi y^2(x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\cdot a(1-\cos t)\mathrm{d}t\\&=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)\mathrm{d}t=5\pi^2a^3.\end{aligned}$$

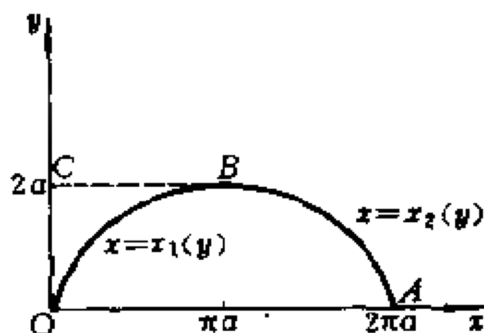


图 6—13

所述图形绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积可看成平面图形 $OABC$ 与 OBC(图 6—13)分别绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积之差. 因此所求的体积为

$$\begin{aligned}V_y&=\int_0^{2a}\pi x_2^2(y)\mathrm{d}y-\int_0^{2a}\pi x_1^2(y)\mathrm{d}y\\&=\pi\int_{2\pi}^{\pi}a^2(t-\sin t)^2\cdot a\sin t\mathrm{d}t-\pi\int_0^{\pi}a^2(t-\sin t)^2\cdot a\sin t\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$= -\pi a^3 \int_0^{2\pi} (t-\sin t)^2 \sin t \mathrm{d}t = 6\pi^3 a^3.$$

二、平行截面面积为已知的立体的体积

从计算旋转体体积的过程中可以看出：如果一个立体不是旋转体，但却知道该立体上垂直于一定轴的各个截面的面积，那末，这个立体的体积也可以用定积分来计算.

如图 6－14 所示，取上述定轴为 x 轴，并设该立体在过点 $x=a$、$x=b$且垂直于 x 轴的两个平面之间. 以 $A(x)$表示过点 x 且

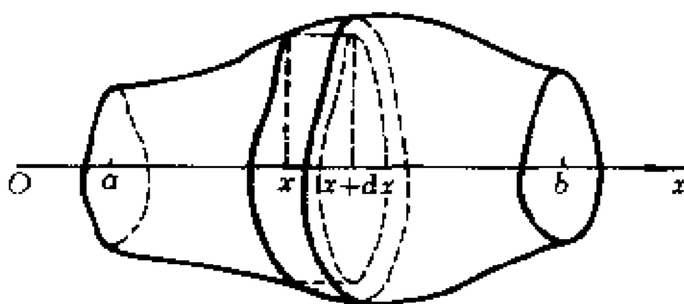


图 6－14

垂直于 x 轴的截面面积. 假定 $A(x)$ 为 x 的已知的连续函数. 这时，取 x 为积分变量，它的变化区间为$[a,b]$；立体中相应于$[a,b]$上任一小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$的一薄片的体积，近似于底面积为$A(x)$、高为 $\mathrm{d}x$ 的扁柱体的体积，即体积元素

$$\mathrm{d}V = A(x)\mathrm{d}x.$$

以 $A(x)\mathrm{d}x$ 为被积表达式，在闭区间$[a,b]$上作定积分，便得所求立体的体积

$$V = \int_a^b A(x)\mathrm{d}x.$$

例 4 一平面经过半径为 R 的圆柱体的底圆中心，并与底面交成角 α(图 6－15). 计算这平面截圆柱体所得立体的体积.

解 取这平面与圆柱体的底面的交线为 x 轴，底面上过圆中心、且垂直于 x 轴的直线为 y 轴. 那末，底圆的方程为 $x^2+y^2=R^2$. 立体中过点 x 且垂直于 x 轴的截面是一个直角三角形. 它的两条

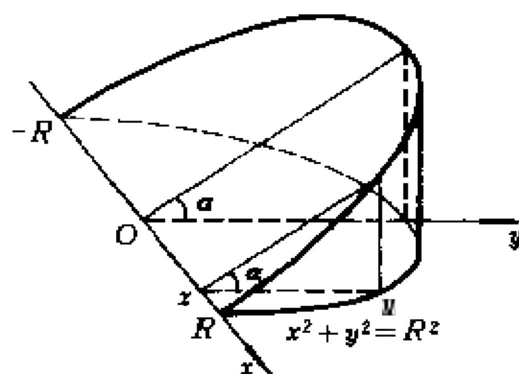


图 6—15

直角边的长分别为 y 及 $y\tan\alpha$，即 $\sqrt{R^2-x^2}$ 及 $\sqrt{R^2-x^2}\tan\alpha$. 因而截面积为 $A(x)=\frac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha$，于是所求立体体积为

$$V=\int_{-R}^{R}\frac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\tan\alpha\left[R^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-R}^{R}$$

$$=\frac{2}{3}R^3\tan\alpha.$$

例 5 求以半径为 R 的圆为底、平行且等于底圆直径的线段为顶、高为 h 的正劈锥体的体积.

解 取底圆所在的平面为 xOy 平面，圆心 O 为原点，并使 x 轴与正劈锥的顶平行(图 6—16). 底圆的方程为 $x^2+y^2=R^2$. 过 x 轴上的点 $x(-R\leqslant x\leqslant R)$ 作垂直于 x 轴的平面，截正劈锥体得等腰三角形. 这截面的面积为

$$A(x)=h\cdot y=h\sqrt{R^2-x^2},$$

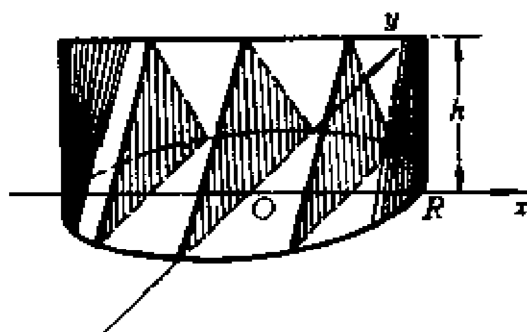


图 6—16

于是所求正劈锥体的体积为

$$V=\int_{-R}^{R}A(x)\mathrm{d}x=h\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}x$$

$$=2R^2h\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\pi R^2h}{2}.$$

由此可知正劈锥体的体积等于同底同高的圆柱体体积的一半.

习　题　6—3

1. 把抛物线 $y^2=4ax$ 及直线 $x=x_0(x_0>0)$ 所围成的图形绕 x 轴旋转，计算所得旋转抛物体的体积.

2. 由 $y=x^3,x=2,y=0$ 所围成的图形，分别绕 x 轴及 y 轴旋转，计算所得两个旋转体的体积.

3. 把星形线 $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ 所围成的图形绕 x 轴旋转(图 6—17)，计算所得旋转体的体积.

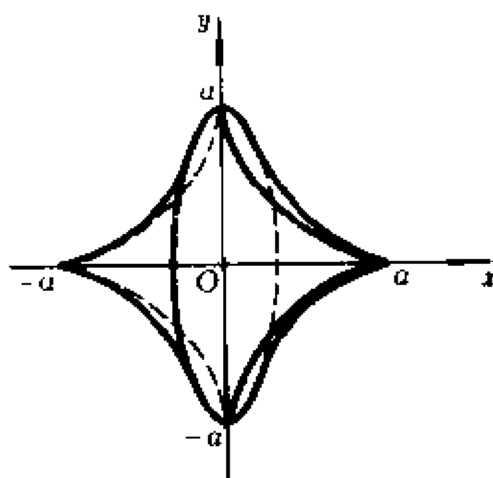


图　6—17

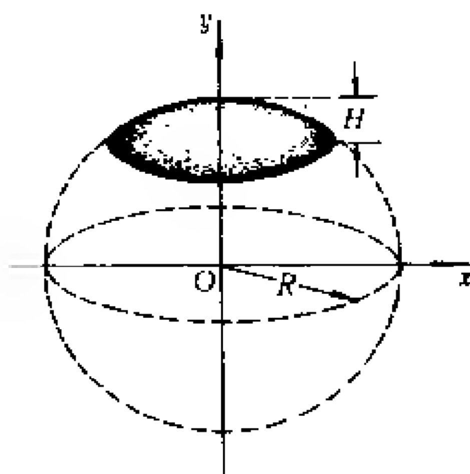


图　6—18

4. 用积分方法证明图 6—18 中球缺的体积为

$$V=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right).$$

5. 求下列已知曲线所围成的图形，按指定的轴旋转所产生的旋转体的体积：

(1) $y=x^2,x=y^2$，绕 y 轴；

(2) $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a},x=0,x=a,y=0$，绕 x 轴；

(3) $x^2+(y-5)^2=16$，绕 x 轴；

(4) 摆线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$ 的一拱，$y=0$，绕直线 $y=2a$.

6. 求圆盘 $x^2+y^2\leqslant a^2$ 绕 $x=-b(b>a>0)$ 旋转所成旋转体的体积.

7. 设有一截锥体，其高为 h，上、下底均为椭圆，椭圆的轴长分别为 $2a$、$2b$ 和 $2A$、$2B$，求这截锥体的体积.

8. 计算底面是半径为 R 的圆，而垂直于底面上一条固定直径的所有截面都是等边三角形的立体体积(图 6—19).

9. 证明：由平面图形 $0\leqslant a\leqslant x\leqslant b$，$0\leqslant y\leqslant f(x)$ 绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积为

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x.$$

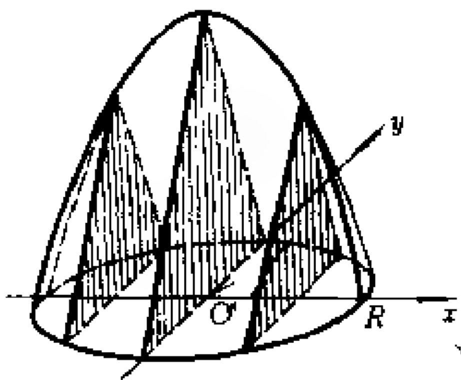


图 6—19

第四节 平面曲线的弧长

一、平面曲线弧长的概念

我们已经知道，圆的周长可以利用圆的内接正多边形的周长当边数无限增多时的极限来确定. 现在用类似的方法来建立平面的连续曲线弧长的概念，从而应用定积分来计算弧长.

设 A、B 是曲线弧上的两个端点(图 6—20). 在弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上任取分点 $A=M_0, M_1, M_2, \cdots, M_{i-1}, M_i, \cdots, M_{n-1}, M_n=B$，并依次连接相邻的分点得一内接折线(图 6—20). 当分点的数目无限增加且每个小段 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 都缩向一点时，如

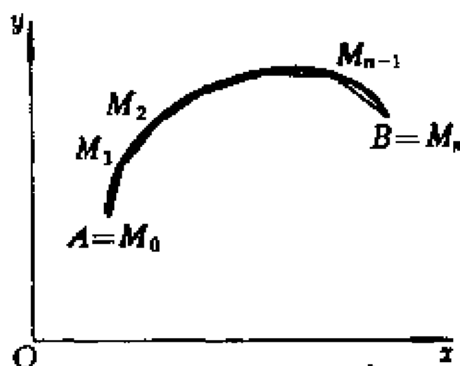


图 6—20

果此折线的长 $\sum_{i=1}^{n}|M_{i-1}M_i|$ 的极限存在，则称此极限为曲线弧$\overset{\frown}{AB}$的弧长，并称此曲线弧$\overset{\frown}{AB}$是可求长的.

对光滑的曲线弧（参看第 209 页上的脚注），我们有如下结论：

定理　光滑曲线弧是可求长的.

这个定理我们不加证明.下面讨论平面的光滑曲线弧长的计算公式.由于光滑曲线弧是可求长的，可应用定积分来计算弧长，故我们利用定积分的元素法并就曲线弧的方程为直角坐标方程、参数方程、极坐标方程三种情形来加以讨论.

二、直角坐标情形

设曲线弧由直角坐标方程

$$y=f(x)\quad(a\leqslant x\leqslant b)$$

给出，其中 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有一阶连续导数.现在来计算这曲线弧（图 6—21）的长度.

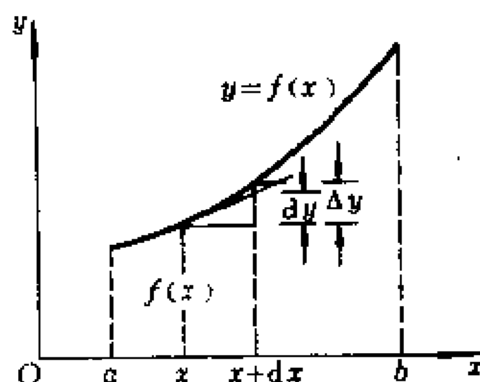


图　6—21

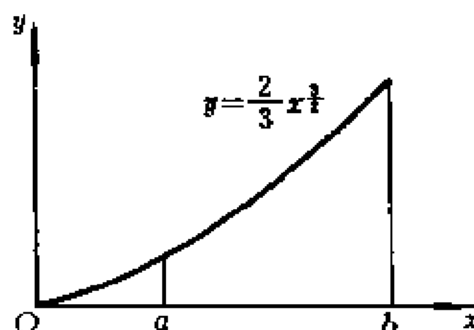


图　6—22

取横坐标 x 为积分变量，它的变化区间为 $[a,b]$.曲线 $y=f(x)$ 上相应于 $[a,b]$ 上任一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 的一段弧的长度，可以用该曲线在点 $(x,f(x))$ 处的切线上相应的一小段的长度来近似代替.而切线上这相应的小段的长度为

$$\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x,$$

从而得弧长元素(即弧微分)

$$ds=\sqrt{1+y'^2}dx.$$

以 $\sqrt{1+y'^2}dx$ 为被积表达式，在闭区间$[a,b]$上作定积分，便得所求的弧长为

$$s=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}dx.$$

例 1 计算曲线 $y=\frac{2}{3}x^{3/2}$ 上相应于 x 从 a 到 b 的一段弧(图 6—22)的长度.

解 $y'=x^{1/2}$，从而弧长元素

$$ds=\sqrt{1+(x^{1/2})^2}dx=\sqrt{1+x}dx.$$

因此，所求弧长为

$$\begin{aligned}s&=\int_a^b \sqrt{1+x}dx=\left[\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\right]_a^b\\&=\frac{2}{3}\left[(1+b)^{3/2}-(1+a)^{3/2}\right].\end{aligned}$$

例 2 两根电线杆之间的电线，由于其本身的重量，下垂成曲线形. 这样的曲线叫悬链线. 适当选取坐标系后，悬链线的方程为

$$y=c\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{c},$$

其中 c 为常数. 计算悬链线上介于 $x=-b$ 与 $x=b$ 之间一段弧(图 6—23)的长度.

解 由于对称性，要计算的弧长为相应于 x 从 0 到 b 的一段曲线弧长的两倍.

$y'=\mathrm{sh}\,\frac{x}{c}$，从而弧长元素

$$ds=\sqrt{1+\mathrm{sh}^2\frac{x}{c}}dx=\mathrm{ch}\,\frac{x}{c}dx.$$

因此，所求弧长为

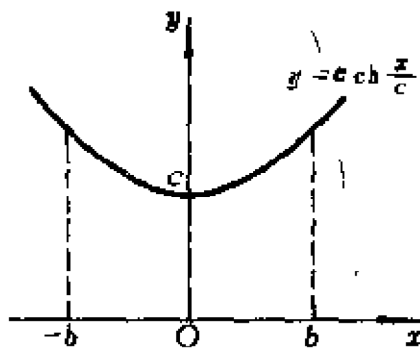


图 6—23

$$s=2\int_0^b \operatorname{ch}\frac{x}{c}\mathrm{d}x=2c\left[\operatorname{sh}\frac{x}{c}\right]_0^b=2c\operatorname{sh}\frac{b}{c}.$$

三、参数方程情形

设曲线弧由参数方程

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}\quad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

给出，其中 $\varphi(t)$、$\psi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有连续导数. 现在来计算这曲线弧的长度.

取参数 t 为积分变量，它的变化区间为 $[\alpha,\beta]$. 相应于 $[\alpha,\beta]$ 上任一小区间 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 的小弧段的长度的近似值（弧微分）即弧长元素为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s&=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{\varphi'^2(t)(\mathrm{d}t)^2+\psi'^2(t)(\mathrm{d}t)^2}\\&=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

于是所求弧长为

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

例 3 计算摆线（图 6—24）

$$\begin{cases}x=a(\theta-\sin\theta),\\ y=a(1-\cos\theta)\end{cases}$$

的一拱 $(0\leqslant\theta\leqslant2\pi)$ 的长度

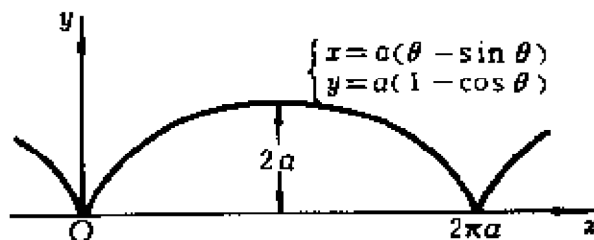


图 6－24

解 弧长元素为

$$ds = \sqrt{a^2(1-\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}d\theta$$
$$=a\sqrt{2(1-\cos\theta)}d\theta=2a\sin\frac{\theta}{2}d\theta.$$

从而，所求弧长

$$s=\int_0^{2\pi}2a\sin\frac{\theta}{2}d\theta=2a\left[-2\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi}=8a.$$

四、极坐标情形

设曲线弧由极坐标方程

$$r=r(\theta)\quad(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$$

给出，其中 $r(\theta)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有连续导数，现在来计算这曲线弧的长度.

由直角坐标与极坐标的关系可得

$$\begin{cases}x=r(\theta)\cos\theta,\\y=r(\theta)\sin\theta,\end{cases}(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta).$$

这就是以极角 θ 为参数的曲线弧的参数方程. 于是，弧长元素为

$$ds=\sqrt{x'^2(\theta)+y'^2(\theta)}d\theta=\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta,$$

从而所求弧长为

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta.$$

例 4 求阿基米德螺线 $r=a\theta(a>0)$ 相应于 θ 从 0 到 2π 一段(图 6－25)的弧长.

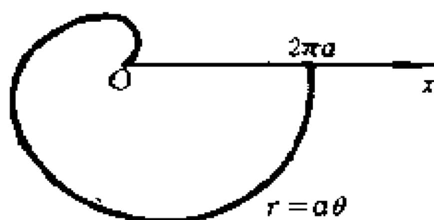


图 6－25

解 弧长元素为

$$ds=\sqrt{a^2\theta^2+a^2}d\theta=a\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta,$$

于是所求弧长为

$$s=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta=\frac{a}{2}\left[2\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})\right].$$

习 题 6－4

1. 计算曲线 $y=\ln x$ 上相应于 $\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{8}$ 的一段弧的长度.

2. 计算曲线 $y=\dfrac{\sqrt{x}}{3}(3-x)$ 上相应于 $1\leqslant x\leqslant 3$ 的一段弧(图 6－26)的长度.

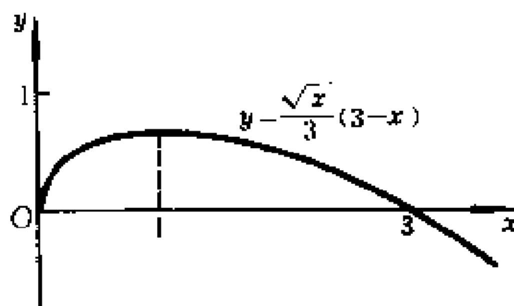


图 6－26

3. 计算半立方抛物线 $y^2=\dfrac{2}{3}(x-1)^3$ 被抛物线 $y^2=\dfrac{x}{3}$ 截得的一段弧的长度.

4. 计算抛物线 $y^2=2px$ 从顶点到这曲线上的一点 $M(x,y)$ 的弧长.

5. 计算星形线 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$(图 6－27)的全长.

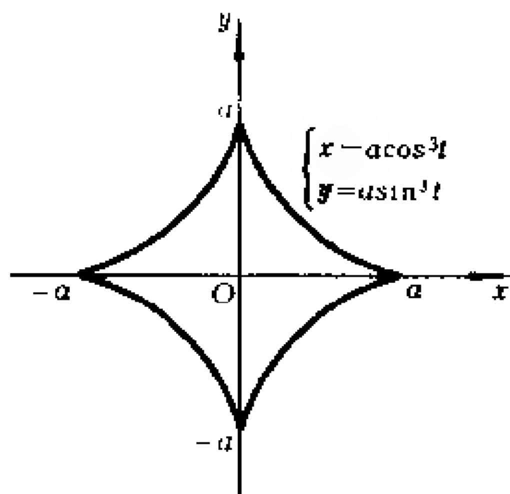


图 6－27

6. 将绕在圆(半径为 a)上的细线放开拉直，使细线与圆周始终相切(图 6－28)，细线端点画出的轨迹叫做圆的渐伸线，它的方程为

$$x=a(\cos t+t\sin t),y=a(\sin t-t\cos t).$$

算出这曲线上相应于 t 从 0 变到 π 的一段弧的长度。

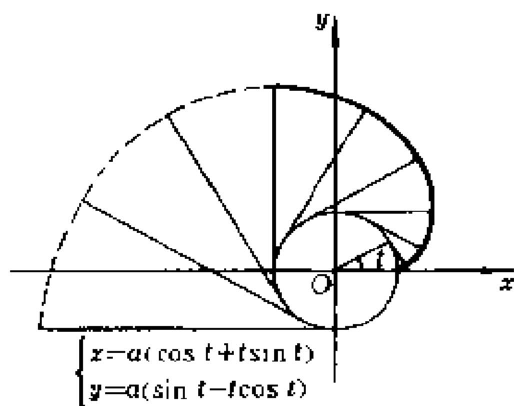


图 6－28

7. 在摆线 $x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t)$ 上求分摆线第一拱成 1∶3 的点的坐标.

8. 求对数螺线 $r=e^{a\theta}$ 相应于自 $\theta=0$ 到 $\theta=\varphi$ 的一段弧长.

9. 求曲线 $r\theta=1$ 相应于自 $\theta=\frac{3}{4}$ 至 $\theta=\frac{4}{3}$ 一段弧长.

10. 求心形线 $r=a(1+\cos\theta)$ 的全长.

第五节　功　水压力和引力

一、变力沿直线所作的功

从物理学知道，如果物体在作直线运动的过程中有一个不变的力 F 作用在这物体上，且这力的方向与物体运动的方向一致，那末，在物体移动了距离 s 时，力 F 对物体所作的功为

$$W=F\cdot s.$$

如果物体在运动过程中所受到的力是变化的，这就会遇到变力对物体作功的问题. 下面通过具体例子说明如何计算变力所作的功.

例 1　把一个带 $+q$ 电量的点电荷放在 r 轴上坐标原点 O 处，它产生一个电场. 这个电场对周围的电荷有作用力. 由物理学知

道，如果有一个单位正电荷放在这个电场中距离原点 O 为 r 的地方，那末电场对它的作用力的大小为

$$F=k\frac{q}{r^2}\quad(k\text{是常数}).$$

如图 6—29，当这个单位正电荷在电场中从 $r=a$ 处沿 r 轴移动到 $r=b(a<b)$ 处时，计算电场力 F 对它所作的功.

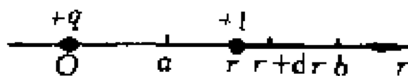


图 6—29

解 在上述移动过程中，电场对这单位正电荷的作用力是变的. 取 r 为积分变量，它的变化区间为 $[a,b]$. 设 $[r,r+dr]$ 为 $[a,b]$ 上的任一小区间. 当单位正电荷从 r 移动到 $r+dr$ 时，电场力对它所作的功近似于 $\frac{kq}{r^2}dr$，即功元素为

$$dW=\frac{kq}{r^2}dr.$$

于是所求的功为

$$W=\int_a^b\frac{kq}{r^2}dr=kq\left[-\frac{1}{r}\right]_a^b=kq\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right).$$

在计算静电场中某点的电位时，要考虑将单位正电荷从该点处 $(r=a)$ 移到无穷远处时电场力所作的功 W. 此时，电场力对单位正电荷所作的功就是广义积分：

$$W=\int_a^{+\infty}\frac{kq}{r^2}dr=\left[-\frac{kq}{r}\right]_a^{+\infty}$$
$$=\frac{kq}{a}.$$

例 2 在底面积为 S 的圆柱形容器中盛有一定量的气体. 在等温条件下，由于气体的膨胀，把容器中的一个活塞(面积为 S)从点 a 处推移到点 b 处(图 6—30). 计算在移动过程中，气体压力所作的功.

解 取坐标系如图 6—30 所示. 活塞的位置可以用坐标 x 来表示. 由物理学知道，一定量的气体在等温条件下，压强 p 与体积

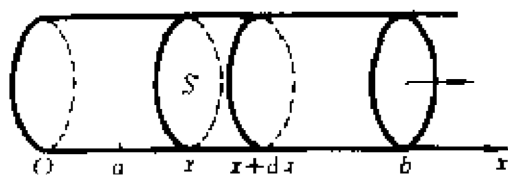


图 6－30

V 的乘积是常数 k，即

$$pV=k \quad 或 \quad p=\frac{k}{V}.$$

因为 $V=xS$，所以

$$p=\frac{k}{xS}.$$

于是，作用在活塞上的力

$$F=p\cdot S=\frac{k}{xS}\cdot S=\frac{k}{x}.$$

在气体膨胀过程中，体积 V 是变的，因而 x 也是变的，所以作用在活塞上的力也是变的.

取 x 为积分变量，它的变化区间为$[a,b]$. 设$[x,x+\mathrm{d}x]$为$[a,b]$上任一小区间. 当活塞从 x 移动到 $x+\mathrm{d}x$ 时，变力 F 所作的功近似于$\frac{k}{x}\mathrm{d}x$，即功元素为

$$\mathrm{d}W=\frac{k}{x}\mathrm{d}x.$$

于是所求的功为

$$W=\int_a^b \frac{k}{x}\mathrm{d}x=k[\ln x]_a^b=k\ln\frac{b}{a}.$$

下面再举一个计算功的例子，它虽不是一个变力所作的功，但也用积分来计算.

例 3 一圆柱形的贮水桶高为 5m，底圆半径为 3m，桶内盛满了水. 试问要把桶内的水全部吸出需作多少功？

解 作 x 轴如图 6－31 所示. 取深度 x 为积分变量. 它的变化区间为$[0,5]$，相应于$[0,5]$上任一小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$的一薄层水

的高度为 dx. 水的比重为 $9.8kN/m^3$,因此如 x 的单位为 m,这薄层水的重力为 $9.8\pi\cdot 3^2dx$. 这薄层水吸出桶外需作之功近似地为

$$dW=88.2\pi\cdot x\cdot dx,$$

此即功元素. 于是所求的功为

$$W=\int_0^5 88.2\pi x dx$$

$$=88.2\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^5$$

$$=88.2\pi\cdot\frac{25}{2}\approx 3462(kJ).$$

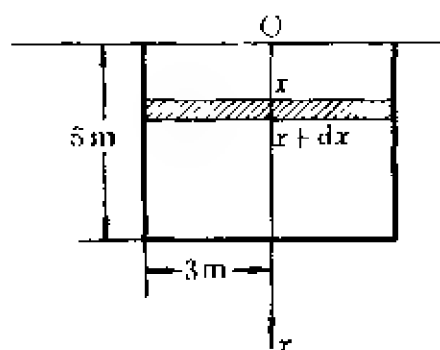


图 6—31

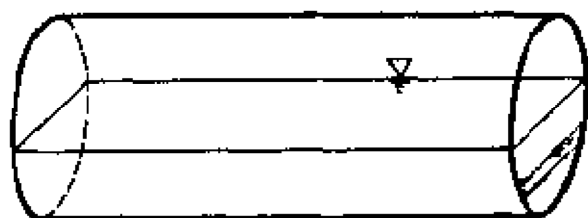
二、水压力

从物理学知道,在水深为 h 处的压强为 $p=\gamma h$,这里 γ 是水的比重. 如果有一面积为 A 的平板水平地放置在水深为 h 处,那末,平板一侧所受的水压力为

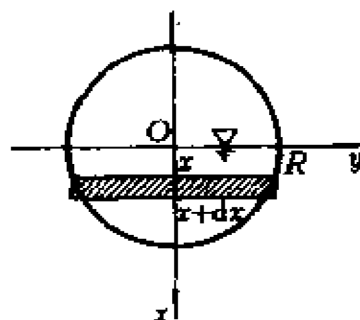
$$P=p\cdot A.$$

如果平板铅直放置在水中,那末,由于水深不同的点处压强 p 不相等,平板一侧所受的水压力就不能用上述方法计算. 下面我们举例说明它的计算方法.

例 4 一个横放着的圆柱形水桶,桶内盛有半桶水(图 6－32(a)). 设桶的底半径为 R,水的比重为 γ,计算桶的一个端面上所受的压力.



(a)



(d)

图 6—32

解 桶的一个端面是圆片，所以现在要计算的是当水平面通过圆心时，铅直放置的一个半圆片的一侧所受到的水压力.

如图 6－32(b)，在这个圆片上取过圆心且铅直向下的直线为 x 轴，过圆心的水平线为 y 轴. 对这个坐标系来讲，所讨论的半圆的方程为 $x^2+y^2=R^2(0\leqslant x\leqslant R)$. 取 x 为积分变量，它的变化区间为 $[0,R]$. 设 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 为 $[0,R]$ 上的任一小区间. 半圆片上相应于 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 的窄条上各点处的压强近似于 γx，这窄条的面积近似于 $2\sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}x$. 因此，这窄条一侧所受水压力的近似值，即压力元素为

$$\mathrm{d}P=2\gamma x\sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}x.$$

于是所求压力为

$$P=\int_0^R 2\gamma x\sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}x=-\gamma\int_0^R(R^2-x^2)^{1/2}\mathrm{d}(R^2-x^2)$$

$$=-\gamma\left[\frac{2}{3}(R^2-x^2)^{3/2}\right]_0^R=\frac{2\gamma}{3}R^3.$$

三、引力

从物理学知道，质量分别为 m_1、m_2，相距为 r 的两质点间的引力的大小为

$$F=G\frac{m_1m_2}{r^2},$$

其中 G 为引力系数，引力的方向沿着两质点的连线方向.

如要计算一根细棒对一个质点的引力，那末，由于细棒上各点与该质点的距离是变化的，且各点对该质点的引力的方向也是变化的，就不能用上述公式来计算. 下面我们举例说明它的计算方法.

例 5 设有一长度为 l、线密度为 ρ 的均匀细直棒，在其中垂线上距棒 a 单位处有一质量为 m 的质点 M. 试计算该棒对质点 M 的引力.

解 取坐标系如图 6－33 所示，使棒位于 y 轴上，质点 M 位

于 x 轴上，棒的中点为原点 O. 取 y 为积分变量，它的变化区间为 $\left[-\frac{l}{2},\frac{l}{2}\right]$. 设 $[y,y+\mathrm{d}y]$ 为 $\left[-\frac{l}{2},\frac{l}{2}\right]$ 上任一小区间. 把细直棒上相应于 $[y,y+\mathrm{d}y]$ 的一段近似地看成质点，其质量为 $\rho\mathrm{d}y$，与 M 相距 $r=\sqrt{a^2+y^2}$. 因此可以按照两质点间的引力计算公式求出这段细直棒对质点 M 的引力 ΔF 的大小为

$$\Delta F \approx G\frac{m\rho\mathrm{d}y}{a^2+y^2},$$

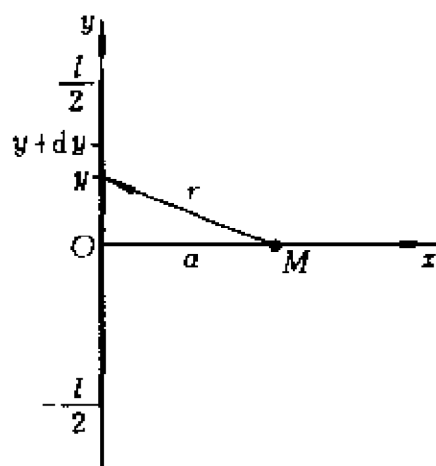


图 6—33

从而求出 ΔF 在水平方向分力 ΔF_x 的近似值，即细直棒对质点 M 的引力在水平方向分力 F_x 的元素为

$$\mathrm{d}F_x=-G\frac{am\rho\mathrm{d}y}{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

于是得引力在水平方向分力为

$$F_x=-\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\frac{Gam\rho}{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{2Gm\rho l}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{4a^2+l^2}}.$$

由对称性知，引力在铅直方向分力为 $F_y=0$.

当细直棒的长度 l 很大时，可视 l 趋于无穷. 此时，引力的大小为 $\frac{2Gm\rho}{a}$，方向与细棒垂直且由 M 指向细棒.

习　题　6—5

1. 由实验知道，弹簧在拉伸过程中，需要的力 F（单位：N）与伸长量 s（单位：cm）成正比，即

$$F=ks\quad(k\text{ 是比例常数}).$$

如果把弹簧由原长拉伸 6cm，计算所作的功.

2. 直径为 20cm、高为 80cm 的圆柱体内充满压强为 $10\mathrm{N/cm^2}$ 的蒸汽. 设温度保持不变，要使蒸汽体积缩小一半，问需要作多少功？

3. (1) 证明：把质量为 m 的物体从地球表面升高到 h 处所作的功是

$$W = G\frac{mMh}{R(R+h)}.$$

其中 G 是引力常数，M 是地球的质量，R 是地球的半径；

(2) 一个人造地球卫星的质量为 173kg，在高于地面 630km 处进入轨道. 问把这个卫星从地面送到 630km 的高空处，克服地球引力要作多少功？已知引力常数 $G=6.67\times10^{-11}\mathrm{m^3/(s^2\cdot kg)}$，地球质量 $M=5.98\times10^{24}\mathrm{kg}$，地球半径 $R=6370\mathrm{km}$.

4. 一物体按规律 $x=ct^3$ 作直线运动，媒质的阻力与速度的平方成正比. 计算物体由 $x=0$ 移至 $x=a$ 时，克服媒质阻力所作的功.

5. 用铁锤将一铁钉击入木板，设木板对铁钉的阻力与铁钉击入木板的深度成正比，在击第一次时，将铁钉击入木板 1cm. 如果铁锤每次打击铁钉所做的功相等，问锤击第二次时，铁钉又击入多少？

6. 设一锥形贮水池，深 15m，口径 20m，盛满水，今以唧筒将水吸尽，问要作多少功？

7. 有一闸门，它的形状和尺寸如图 6—34 所示，水面超过门顶 2m. 求闸门上所受的水压力.

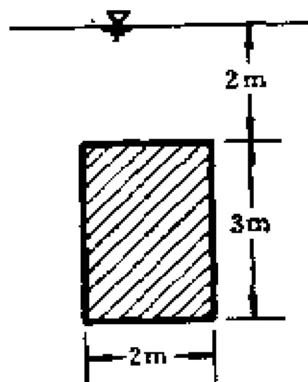


图 6—34

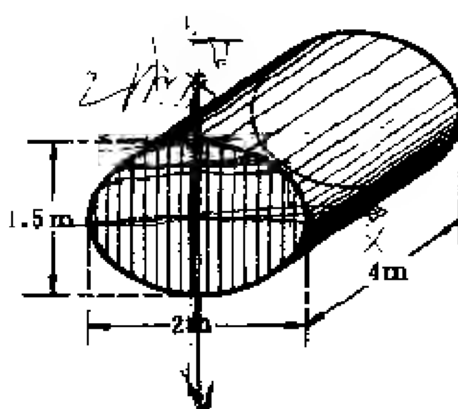


图 6—35

8. 洒水车上的水箱是一个横放的椭圆柱体，尺寸如图 6—35 所示. 当水箱装满水时，计算水箱的一个端面所受的压力.

9. 有一等腰梯形闸门，它的两条底边各长 10m 和 6m，高为 20m. 较长的底边与水面相齐. 计算闸门的一侧所受的水压力.

10. 一底为 8cm、高为 6cm 的等腰三角形片，铅直地沉没在水中，顶在上，底在下且与水面平行，而顶离水面 3cm，试求它每面所受的压力.

11. 设有一长度为 l、线密度为 ρ 的均匀细直棒，在与棒的一端垂直距离为 a 单位处有一质量为 m 的质点 M，试求这细棒对质点 M 的引力.

12. 设有一半径为 R、中心角为 φ 的圆弧形细棒，其线密度为常数 ρ. 在圆心处有一质量为 m 的质点 M. 试求这细棒对质点 M 的引力.

第六节　平　均　值

一、函数的平均值

在实际问题中，常常用一组数据的算术平均值来描述这组数据的概貌. 例如用一个篮球队里各个队员的身高的算术平均值来描述这篮球队的身高的概貌. 又如对某一零件的长度进行 n 次测量，测得的值为 $y_1, y_2, \cdots, y_n$. 这时，可以用 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的算术平均值

$$\bar{y}=\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}$$

作为这一零件的长度的近似值.

然而，除了需要计算有限个数值的算术平均值外，有时还需要考虑一个连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上所取得一切值的平均值，例如求气温在一昼夜间的平均温度. 下面就来讨论如何规定及计算连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均值.

先把区间 $[a,b]$ 分成 n 等份，设分点为

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

每个小区间的长度为 $\Delta x=\frac{b-a}{n}$. 设在这些分点处 $f(x)$ 的函数值依次为 $y_0, y_1, y_2, \cdots, y_n$. 可以用 $y_0, y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}$ 的平均值

$$\frac{y_0+y_1+\cdots+y_{n-1}}{n}$$

来近似表达函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上所取得一切值的平均值. 如果 n 取得比较大，即每个小区间的长度 Δx 相应地取得比较小时，上述平均值就能比较确切地表达函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上所取得一切值的

平均值，因此，我们就称极限

$$\bar{y}=\lim_{n\to\infty}\frac{y_0+y_1+\cdots+y_{n-1}}{n}$$

为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的平均值. 现在

$$\begin{aligned}\bar{y}&=\lim_{n\to\infty}\frac{y_0+y_1+\cdots+y_{n-1}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{y_0+y_1+\cdots+y_{n-1}}{b-a}\cdot\frac{b-a}{n}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y_0+y_1+\cdots+y_{n-1}}{b-a}\Delta x=\frac{1}{b-a}\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n}y_{i-1}\Delta x\\&=\frac{1}{b-a}\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-1})\Delta x,\end{aligned}$$

即

$$\bar{y}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

这就是说，连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均值 $\bar{y}$，等于函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分除以区间 $[a,b]$ 的长度 $b-a$. 定积分中值定理中的 $f(\xi)$ 就是 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均值.

例1 计算从0秒到 T 秒这段时间内自由落体的平均速度.

解 自由落体的速度为 $v=gt$，所以要计算的平均速度(图6—36)为

$$\begin{aligned}\bar{v}&=\frac{1}{T-0}\int_0^T gt\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\left[\frac{gt^2}{2}\right]_0^T\\&=\frac{gT}{2}.\end{aligned}$$

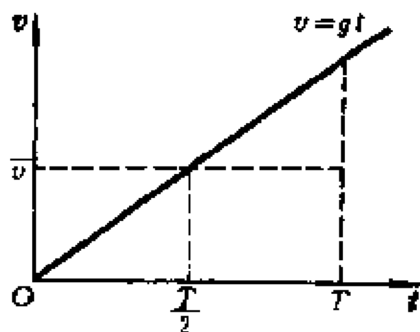


图 6—36

例2 计算纯电阻电路中正弦交流电 $i=I_m\sin\omega t$ 在一个周期上的功率的平均值(简称平均功率).

解 设电阻为 R，那末这电路中的电压

$$u=iR=I_mR\sin\omega t,$$

而功率

$$p=ui=I_m^2R\sin^2\omega t.$$

因此功率在长度为一个周期的区间$[0,\frac{2\pi}{\omega}]$上的平均值

$$\begin{aligned}\overline{p}&=\frac{1}{\frac{2\pi}{\omega}}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}I_m{}^2R\sin^2\omega t\mathrm{d}t=\frac{I_m^2R}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\sin^2\omega t\mathrm{d}(\omega t)\\&=\frac{I_m^2R}{4\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}(1-\cos 2\omega t)\mathrm{d}(\omega t)\\&=\frac{I_m^2R}{4\pi}\left[\omega t-\frac{\sin 2\omega t}{2}\right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\\&=\frac{I_m^2R}{4\pi}\cdot 2\pi-\frac{I_m^2R}{2}=\frac{I_mU_m}{2}(U_m=I_mR).\end{aligned}$$

就是说,纯电阻电路中正弦交流电的平均功率等于电流、电压的峰值的乘积的二分之一.

通常交流电器上标明的功率就是平均功率.

二、均方根

非恒定电流(如正弦交流电)是随时间的变化而变化的,那末为什么一般使用的非恒定电流的电器上却标明着确定的电流值呢?原来这些电器上标明的电流值都是一种特定的平均值,习惯上称为有效值.

周期性非恒定电流i(如正弦交流电)的有效值是如下规定的:当$i(t)$在它的一个周期T内在负载电阻R上消耗的平均功率,等于取固定值I的恒定电流在R上消耗的功率时,称这个I值为$i(t)$的有效值.下面来计算$i(t)$的有效值.

固定值为I的电流在电阻R上消耗的功率为I^2R.电流$i(t)$在R上消耗的功率为$u(t)i(t)=i^2(t)R$.它在$[0,T]$上的平均值为$\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)R\mathrm{d}t$.因此

$$I^2R=\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)R\mathrm{d}t=\frac{R}{T}\int_0^T i^2(t)\mathrm{d}t,$$

从而

$$I^2=\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\mathrm{d}t,$$

即 $$I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\mathrm{d}t}.$$

对于正弦电流 $i(t)=I_m\sin\omega t$，有效值

$$I=\sqrt{\frac{1}{\frac{2\pi}{\omega}}\int_0^{2\pi/\omega}I_m^2\sin^2\omega t\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{I_m^2}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}\sin^2\omega t\mathrm{d}(\omega t)}$$

$$=\sqrt{\frac{I_m^2}{4\pi}\left[\omega t-\frac{\sin 2\omega t}{2}\right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}}}=\frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

就是说，正弦交流电的有效值等于它的峰值的$\frac{1}{\sqrt{2}}$.

我们把$\sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t}$叫做函数 $f(t)$在$[a,b]$上的均方根. 所以周期性电流 $i(t)$的有效值就是它在一个周期上的均方根.

习 题 6—6

1. 一物体以速度 $v=3t^2+2t$(m/s)作直线运动，算出它在 $t=0$到 $t=3$秒一段时间内的平均速度.

2. 计算函数 $y=2xe^{-x}$在$[0,2]$上的平均值.

3. 某可控硅控制线路中，流过负载 R 的电流 $i(t)$如图6—37所示，即

$$i(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t\leqslant t_0,\\ 5\sin\omega t, & t_0<t\leqslant\frac{T}{2}\end{cases},$$

其中 t_0称为触发时间，如果 $T=0.02$(s)(即 $\omega=\frac{2\pi}{T}=100\pi$)，

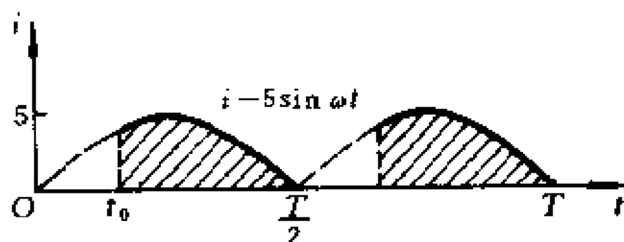


图 6—37

(1)当触发时间 $t_0=0.0025(\mathrm{s})$ 时，求 $0\leqslant t\leqslant\frac{T}{2}$ 内电流的平均值；

(2)当触发时间为 t_0 时，求 $[0,\frac{T}{2}]$ 内电流的平均值；

(3)要使 $i_{平均}=\frac{15}{2\pi}(\mathrm{A})$ 和 $\frac{5}{3\pi}(\mathrm{A})$，问相应的触发时间应为多少？

4. 算出正弦交流电流 $i=I_m\sin\omega t$ 经半波整流后得到的电流

$$i=\begin{cases}I_m\sin\omega t, & 0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{\omega}\\ 0, & \frac{\pi}{\omega}<t\leqslant\frac{2\pi}{\omega}\end{cases}$$

的有效值.

5. 算出周期为 T 的矩形脉冲电流

$$i=\begin{cases}a, & 0\leqslant t\leqslant c,\\ 0, & c<t\leqslant T\end{cases}$$

的有效值.

总习题六

1. 一金属棒长3m，离棒左端 xm 处的线密度为 $\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}(\mathrm{kg/m})$. 问 x 为何值时，$[0,x]$一段的质量为全棒质量的一半.

2. 求由曲线 $r=a\sin\theta$，$r=a(\cos\theta+\sin\theta)(a>0)$所围图形公共部分的面积.

3. 设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 通过点$(0,0)$，且当 $x\in[0,1]$时，$y\geqslant0$. 试确定 a,b,c 的值，使得抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与直线 $x=1$，$y=0$所围图形的面积为$\frac{4}{9}$，且使该图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积最小.

4. 求由曲线 $y=x^{\frac{3}{2}}$ 与直线 $x=4$，x 轴所围图形绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积.

5. 求圆盘 $(x-2)^2+y^2\leqslant1$绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积.

6. 求抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$被圆 $x^2+y^2=3$所截下的有限部分的弧长.

7. 半径为 r 的球沉入水中，球的上部与水面相切，球的比重与水相同，现将球从水中取出，需作多少功？

8. 边长为 a 和 b 的矩形薄板，与液面成 α 角斜沉于液体内，长边平行于液面而位于深 h 处，设 $a>b$，液体的比重为 γ，试求薄板每面所受的压力.

9. 设星形线 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$ 上每一点处的线密度的大小等于该点到原点距离的立方，在原点 O 处有一单位质点，求星形线在第一象限的弧段对这质点的引力.

第七章　空间解析几何与向量代数

在平面解析几何中，通过坐标法把平面上的点与一对有次序的数对应起来，把平面上的图形和方程对应起来，从而可以用代数方法来研究几何问题. 空间解析几何也是按照类似的方法建立起来的.

正像平面解析几何的知识对学习一元函数微积分是不可缺少的一样，空间解析几何的知识对学习多元函数微积分也是必要的.

本章首先建立空间直角坐标系，引进在工程技术上有着广泛应用的向量，介绍向量的一些运算，然后介绍空间曲面和空间曲线的部分内容，并以向量为工具来讨论空间的平面和直线，最后介绍二次曲面.

第一节　空间直角坐标系

一、空间点的直角坐标

为了沟通空间图形与数的研究，我们需要建立空间的点与有序数组之间的联系. 这种联系通常是用类似于平面解析几何的方法通过引进空间直角坐标系来实现的. 具体讨论于下：

过空间一个定点 O，作三条互相垂直的数轴，它们都以 O 为原点且一般具有相同的长度单位. 这三条轴分别叫做 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、z 轴（竖轴）；统称坐标轴. 通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上，而 z 轴则是铅垂线；它们的正向通常符合右手规则，即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从正向 x 轴以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向正向 y 轴时，大拇指的指向就是 z 轴的正向，如图 7—1，图中箭头的指

向表示 x 轴、y 轴、z 轴的正向. 这样的三条坐标轴就组成了一个空间直角坐标系. 点 O 叫做坐标原点(或原点).

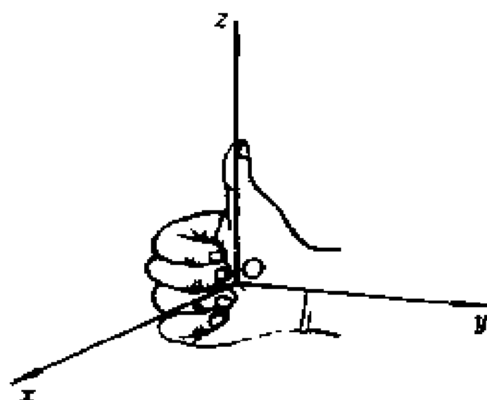


图 7—1

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面,这样定出的三个平面统称为坐标面. x 轴及 y 轴所确定的坐标面叫做 xOy 面,另两个由 y 轴及 z 轴和由 z 轴及 x 轴所确定的坐标面,分别叫做 yOz

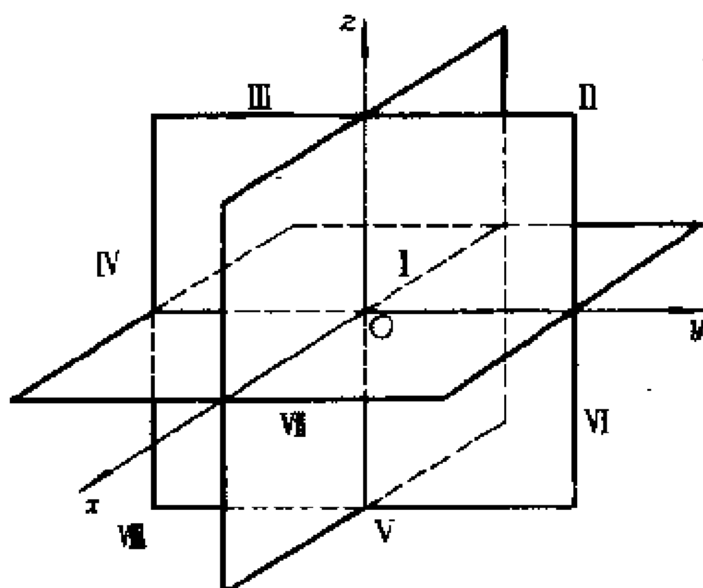


图 7—2

面及 zOx 面. 三个坐标面把空间分成八个部分,每一部分叫做卦限. 含有 x 轴、y 轴与 z 轴正半轴的那个卦限叫做第一卦限,其它第二、第三、第四卦限,在 xOy 面的上方,按逆时针方向确定. 第五

至第八卦限，在 xOy 面的下方，由第一卦限之下的第五卦限，按逆时针方向确定，这八个卦限分别用字母 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ 表示(图 7—2).

设 M 为空间一已知点. 我们过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴，它们与 x 轴、y 轴、z 轴的交点依次为 P、Q、R(图 7—3)，这三点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标依次为 x，y，z. 于是空间的一点 M 就唯一地确定了一个有序数组 x,y,z；反过来，已知一有序数组 x,y,z，我们可以在 x 轴上取坐标为 x 的点 P，在 y 轴上取坐标为 y 的点 Q，在 z 轴上取坐标为 z 的点 R，然后通过 P、Q 与 R 分别作 x 轴、y 轴和 z 轴的垂直平面. 这三个垂直平面的交点 M 便是由有序数组 x,y,z 所确定的唯一的点. 这样，就建立了空间的点 M 和有序数组 x,y,z 之间的一一对应关系. 这组数 x,y,z 就叫做**点 M 的坐标**，并依次称 x，y 和 z 为点 M 的**横坐标**，**纵坐标**和**竖坐标**. 坐标为 x,y,z 的点 M 通常记为 $M(x,y,z)$.

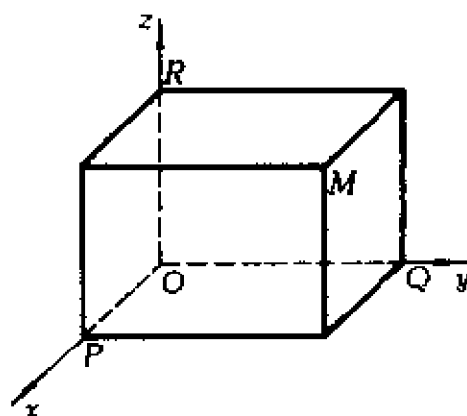


图 7—3

坐标面上和坐标轴上的点，其坐标各有一定的特征. 例如：如果点 M 在 yOz 面上，则 $x=0$；同样，在 zOx 面上的点，$y=0$；在 xOy 面上的点，$z=0$. 如果点 M 在 x 轴上，则 $y=z=0$；同样，在 y 轴上的点，有 $z=x=0$；在 z 轴上的点，有 $x=y=0$. 如点 M 为原点，则 $x=y=z=0$.

二、空间两点间的距离

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$为空间两点. 为了用两点的坐标来表达它们间的距离 d，我们过 M_1、M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面. 这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方

体(图 7—4).

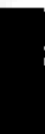


图 7—4

由于$\angle M_1NM_2$为直角,$\triangle M_1NM_2$为直角三角形,所以

$$d^2=|M_1M_2|^2$$

$$=|M_1N|^2+|NM_2|^2.$$

又$\triangle M_1PN$也是直角三角形,且$|M_1N|^2=|M_1P|^2+|PN|^2$,所以

$$d^2=|M_1M_2|^2=|M_1P|^2+|PN|^2+|NM_2|^2.$$

由于

$$|M_1P|=|P_1P_2|=|x_2-x_1|,$$

$$|PN|=|Q_1Q_2|=|y_2-y_1|,$$

$$|NM_2|=|R_1R_2|=|z_2-z_1|,$$

所以

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

这就是空间两点间的距离公式.

特殊地,点$M(x,y,z)$与坐标原点$O(0,0,0)$的距离为

$$d=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

例 1 求证以$M_1(4,3,1)$、$M_2(7,1,2)$、$M_3(5,2,3)$三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.

解 因为

$$|M_1M_2|^2=(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2=14,$$

$$|M_2M_3|^2=(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2=6,$$

$$|M_3M_1|^2=(4-5)^2+(3-2)^2+(1-3)^2=6,$$

所以 $|M_2M_3|=|M_3M_1|$，即 $\triangle M_1M_2M_3$ 为等腰三角形.

例 2 在 z 轴上求与两点 $A(-4,1,7)$ 和 $B(3,5,-2)$ 等距离的点.

解 因为所求的点 M 在 z 轴上，所以设该点为 $M(0,0,z)$，依题意有

$$|MA|=|MB|,$$

即

$$\sqrt{(0+4)^2+(0-1)^2+(z-7)^2}$$

$$=\sqrt{(3-0)^2+(5-0)^2+(-2-z)^2}.$$

两边去根号，解得

$$z=\frac{14}{9},$$

所以，所求的点为 $M\left(0,0,\frac{14}{9}\right)$.

习 题 7—1

1. 在空间直角坐标系中，指出下列各点在哪个卦限？

$A(1,-2,3)$；$B(2,3,-4)$；$C(2,-3,-4)$；$D(-2,-3,1)$.

2. 在坐标面上和在坐标轴上的点的坐标各有什么特征？指出下列各点的位置：

$A(3,4,0)$；$B(0,4,3)$；$C(3,0,0)$；$D(0,-1,0)$.

3. 求点 (a,b,c) 关于 (1) 各坐标面；(2) 各坐标轴；(3) 坐标原点的对称点的坐标.

4. 自点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 分别作各坐标面和各坐标轴的垂线，写出各垂足的坐标.

5. 过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 分别作平行于 z 轴的直线和平行于 xOy 面的平面，问在它们上面的点的坐标各有什么特点？

6. 一边长为 a 的立方体放置在 xOy 面上，其底面的中心在坐标原点，底面的顶点在 x 轴和 y 轴上，求它各顶点的坐标.

7. 求点 $M(4,-3,5)$ 到各坐标轴的距离.

8. 在 yOz 面上，求与三点 $A(3,1,2)$、$B(4,-2,-2)$ 和 $C(0,5,1)$ 等距离的点.

9. 试证明以三点 $A(4,1,9)$、$B(10,-1,6)$、$C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

第二节　向量及其加减法　向量与数的乘法

一、向量概念

在研究力学、物理学以及其他应用科学时，常会遇到这样一类量，它们既有大小，又有方向. 例如力、力矩、位移、速度、加速度等等，这一类量叫做向量.

在数学上，往往用一条有方向的线段，即有向线段来表示向量. 有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 以 M_1 为起点、M_2 为终点的有向线段所表示的向量，记作 $\overrightarrow{M_1M_2}$（图 7－5）. 有时也用一个粗体字母或书写体用一个上面加箭头的字母来表示向量. 例如 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{F}$ 或 $\vec{a}$、$\vec{i}$、$\vec{v}$、$\vec{F}$ 等等.

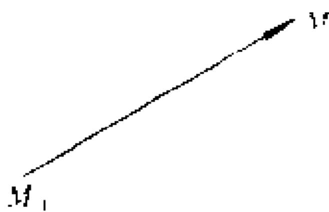


图 7－5

以坐标原点 O 为起点，向一个点 M 引向量 $\overrightarrow{OM}$，这个向量叫做点 M 对于点 O 的向径，常用粗体字 $\boldsymbol{r}$ 表示.

在实际问题中，有些向量与其起点有关，有些向量与其起点无关. 由于一切向量的共性是它们都有大小和方向，所以在数学上我们只研究与起点无关的向量，并称这种向量为自由向量（以后简称向量），即只考虑向量的大小和方向，而不论它的起点在什么地方. 当遇到与起点有关的向量时（例如，谈到某一质点的运动速度时，这速度就是与所考虑的那一质点的位置有关的向量），可在一般原则下作特别处理.

由于我们只讨论自由向量，所以如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等，且方向相同，我们就说向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是相等的，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 这就是说，经过平行移动后能完全重合的向量是相等的.

向量的大小叫做向量的模. 向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$、$\boldsymbol{a}$、$\vec{a}$ 的模依次记作 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$、$|\boldsymbol{a}|$、$|\vec{a}|$. 模等于 1 的向量叫做单位向量. 模等于零的向量叫做零向量，记作 $\boldsymbol{0}$ 或 $\vec{0}$. 零向量的起点和终点重合，它的方向可以看作是任意的.

两个非零向量如果它们的方向相同或者相反，就称这两个向量平行. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 由于零向量的方向可以看作是任意的，因此可以认为零向量与任何向量都平行.

二、向量的加减法

向量的加法运算规定如下：

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，再以 B 为起点，作 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，连接 AC（图 7－6），那末向量 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

上述作出两向量之和的方法叫做向量相加的三角形法则.

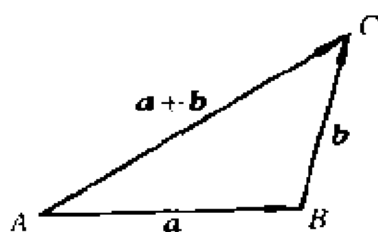


图 7－6

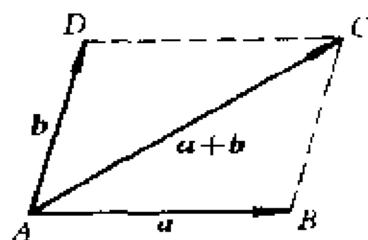


图 7－7

力学上有求合力的平行四边形法则，仿此，我们也有向量相加的平行四边形法则. 这就是：当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，以 AB、AD 为边作一平行四边形 $ABCD$，连接对角线 AC（图 7－

7)，显然向量$\overrightarrow{AC}$即等于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

向量的加法符合下列运算规律：

(1) 交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) 结合律$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

这是因为，按向量加法的规定(三角形法则)，从图 7－7 可见：

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c},$$

$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c},$$

所以符合交换律. 又如图 7－8 所示，先作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，再加上 $\boldsymbol{c}$，即得和 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$，如以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 相加，则得同一结果，所以符合结合律.

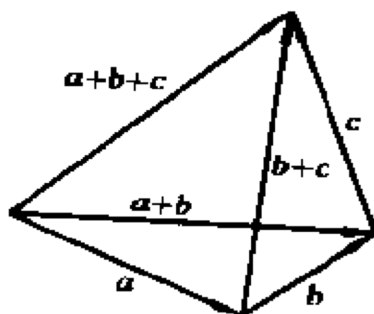


图 7－8

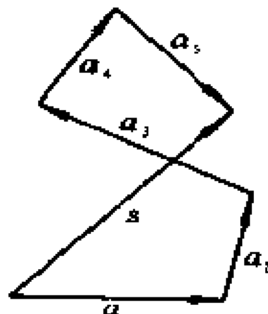


图 7－9

由于向量的加法符合交换律与结合律，故 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ $(n\geqslant3)$相加可写成

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n,$$

并按向量相加的三角形法则，可得 n 个向量相加的法则如下：使前一向量的终点作为次一向量的起点，相继作向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$，再以第一向量的起点为起点，最后一向量的终点为终点作一向量，这个向量即为所求的和. 如图 7－9，有

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_5.$$

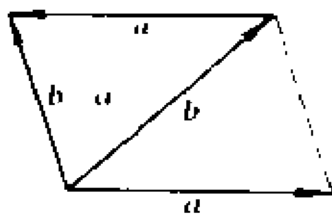
设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量，与 $\boldsymbol{a}$ 的模相同而方向相反的向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记作 $-\boldsymbol{a}$. 由此，我们规定两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a}).$$

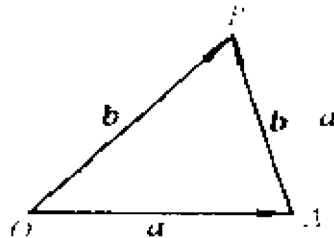
即把向量 $-\boldsymbol{a}$ 加到向量 $\boldsymbol{b}$ 上，便得 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$(图7－10(a)).

特别地，当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时，有

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}.$$



(a)



(b)

图 7—10

显然，任给向量$\overrightarrow{AB}$及点 O，有

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA},$$

因此，若把向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 移到同一起点 O，则从 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A 向 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 所引向量$\overrightarrow{AB}$便是向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$(图 7—10(b))．

由三角形两边之和大于第三边的原理，有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}| \quad 及 \quad |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|.$$

其中等号在 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向或反向时成立．

三、向量与数的乘法

向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，规定 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量，它的模

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|,$$

它的方向当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相同，当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反．

当 $\lambda=0$ 时，$|\lambda\boldsymbol{a}|=0$，即 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量，这时它的方向可以是任意的．

特别地，当 $\lambda=\pm1$ 时，有

$$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a},(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}.$$

向量与数的乘积符合下列运算规律：

(1) 结合律　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

这是因为由向量与数的乘积的规定可知，向量 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})$、$\mu(\lambda\boldsymbol{a})$、$(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ 都是平行的向量，它们的指向也是相同的，而且

$$|\lambda(\mu a)| = |\mu(\lambda a)| = |(\lambda\mu)a| = |\lambda\mu||a|.$$

所以

$$\lambda(\mu a) = \mu(\lambda a) = (\lambda\mu)a.$$

(2) 分配律
$$(\lambda+\mu)a = \lambda a + \mu a; \tag{1}$$
$$\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b. \tag{2}$$

这个规律同样可以按向量与数的乘积的规定来证明，这里从略了.

由于向量 λa 与 a 平行，因此我们常用向量与数的乘积来说明两个向量的平行关系. 即有

定理 1　设向量 $a \neq 0$，那末，向量 b 平行于 a 的充分必要条件是：存在唯一的实数 λ，使 $b = \lambda a$.

证　条件的充分性是显然的，下面证明条件的必要性.

设 $b // a$. 取 $|\lambda| = \frac{|b|}{|a|}$，当 b 与 a 同向时 λ 取正值，当 b 与 a 反向时 λ 取负值，即有 $b = \lambda a$. 这是因为此时 b 与 λa 同向，且

$$|\lambda a| = |\lambda|\ |a| = \frac{|b|}{|a|}\ |a| = |b|.$$

再证数 λ 的唯一性. 设 $b = \lambda a$，又设 $b = \mu a$，两式相减，便得

$$(\lambda-\mu)a = 0，即 |\lambda-\mu|\,|a| = 0.$$

因 $|a| \neq 0$，故 $|\lambda-\mu| = 0$，即 $\lambda = \mu$.

定理证毕.

前面已经讲过，模等于 1 的向量叫做单位向量. 设 a° 表示与非零向量 a 同方向的单位向量，那末按照向量与数的乘积的规定，由于 $|a| > 0$，所以 $|a|a^\circ$ 与 a° 的方向相同，即 $|a|a^\circ$ 与 a 的方向相同. 又因 $|a|a^\circ$ 的模是

$$|a|\,|a^\circ| = |a| \cdot 1 = |a|,$$

即 $|a|a^\circ$ 与 a 的模也相同，因此，

$$a = |a|a^\circ.$$

我们规定，当 $\lambda \neq 0$ 时，$\frac{a}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}a$. 由此，上式又可写成

$$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\boldsymbol{a}^{\circ}.$$

这表示一个非零向量除以它的模的结果是一个与原向量同方向的单位向量.

例 1 在平行四边形 $ABCD$ 中,设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$.试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量$\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$和$\overrightarrow{MD}$,这里 M 是平行四边形对角线的交点(图 7－11).

解 由于平行四边形的对角线互相平分,所以

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM},$$

即

$$-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\overrightarrow{MA},$$

于是

$$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

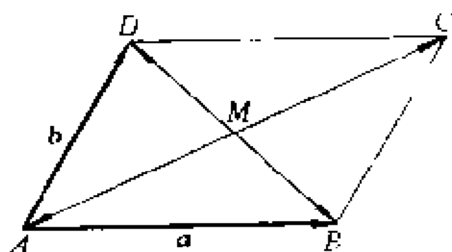


图 7－11

因为$\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}$,所以

$$\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

又因$-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MD}$,所以 $\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$.

由于$\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MD}$,所以 $\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

习 题 7－2

1. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.试用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 表示 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

2. 如果平面上一个四边形的对角线互相平分,试用向量证明它是平行四边形.

3. 把$\triangle ABC$ 的 BC 边五等分,设分点依次为 D_1、D_2、D_3、D_4,再把各分点与点 A 连接.试以$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$、$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$ 表示向量$\overrightarrow{D_1A}$、$\overrightarrow{D_2A}$、$\overrightarrow{D_3A}$和$\overrightarrow{D_4A}$.

第三节　向量的坐标

一、向量在轴上的投影

首先我们引进轴上的有向线段的值的概念.

设有一轴 u，$\overrightarrow{AB}$是轴 u 上的有向线段(图 7－12). 如果数 λ 满足 $|\lambda|=|\overrightarrow{AB}|$，且当$\overrightarrow{AB}$与 u 轴同向时 λ 是正的，当$\overrightarrow{AB}$与 u 轴反向时 λ 是负的，那末数 λ 叫做轴 u 上有向线段$\overrightarrow{AB}$的值，记作 AB，即 $\lambda=AB$.

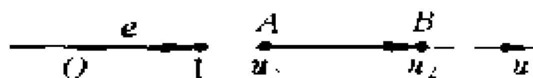


图　7－12

设 $\boldsymbol{e}$ 是与 u 轴同方向的单位向量，那末不难看出，若轴 u 上有向线段的值 $AB=\lambda$，则向量$\overrightarrow{AB}=\lambda\boldsymbol{e}$；反之，若向量$\overrightarrow{AB}=\lambda\boldsymbol{e}$，则 $AB=\lambda$. 由此可知$\overrightarrow{AB}=(AB)\boldsymbol{e}$.

设 A、B、C 是 u 轴上任意三点，不论这三点的相互位置如何，按向量加法的规定及上段说明，总有

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC},$$

即

$$(AC)\boldsymbol{e}=(AB)\boldsymbol{e}+(BC)\boldsymbol{e}=(AB+BC)\boldsymbol{e},$$

从而有

$$AC=AB+BC.$$

例 1 在 u 轴上取定一点 O 作为坐标原点. 设 A、B 是 u 轴上坐标依次为 u_1、u_2 的两个点，$\boldsymbol{e}$ 是与 u 轴同方向的单位向量(图 7－12)，证明

$$\overrightarrow{AB}=(u_2-u_1)\boldsymbol{e}.$$

证　因点 A 的坐标为 u_1，即轴 u 上有向线段$\overrightarrow{OA}$的值 $OA=u_1$，故$\overrightarrow{OA}=u_1\boldsymbol{e}$；同理，$\overrightarrow{OB}=u_2\boldsymbol{e}$. 于是

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=u_2\boldsymbol{e}-u_1\boldsymbol{e}=(u_2-u_1)\boldsymbol{e}.$$

其次我们引进两向量的夹角的概念.

设有两个非零向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,任取空间一点 O,作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,规定不超过 π 的 $\angle AOB$(设 $\varphi=\angle AOB$,$0\leqslant\varphi\leqslant\pi$)称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角(图 7—13),记作 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 或 $(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$,即 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\varphi$. 如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中有一个是零向量,规定它们的夹角可在 0 与 π 之间任意取值.

类似地,可以规定向量与一轴的夹角或空间两轴的夹角,不再赘述.

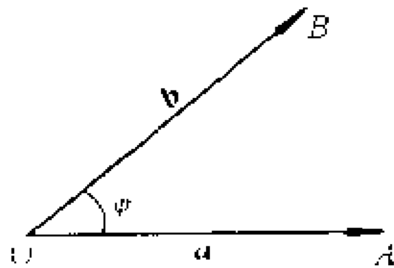


图 7—13

下面我们来定义空间一点与一向量在轴 u 上的投影. 设已知空间一点 A 以及一轴 u,通过点 A 作轴 u 的垂直平面 α. 那末平面 α 与轴 u 的交点 A' 叫做点 A 在轴 u 上的投影(图 7—14). 设已知向量 $\overrightarrow{AB}$ 的起点 A 和终点 B 在轴 u 上的投影分别为点 A' 和 B'(图 7—15),那末轴 u 上的有向线段 $\overrightarrow{A'B'}$ 的值 $A'B'$ 叫做向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的投影,记作 $\mathrm{Prj}_u\,\overrightarrow{AB}$ 或 $(\overrightarrow{AB})_u$,即 $\mathrm{Prj}_u\,\overrightarrow{AB}=A'B'$. 轴 u 叫做投影轴.

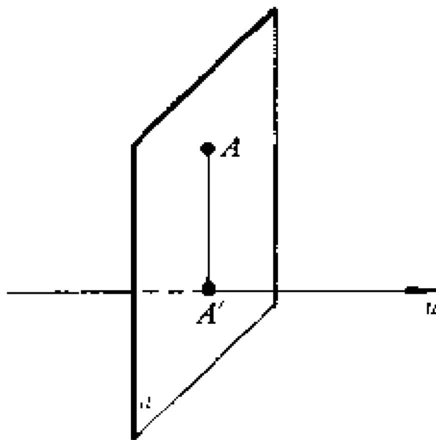


图 7—14

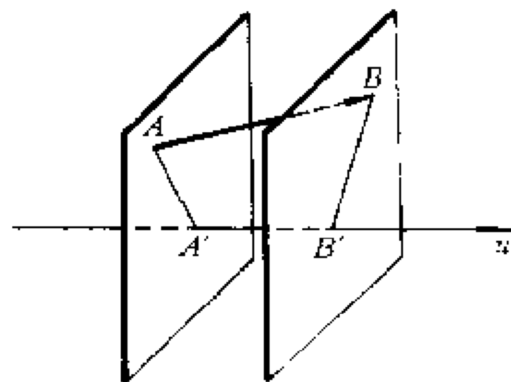


图 7—15

向量的投影有下列性质:

性质 1(投影定理)　向量$\overrightarrow{AB}$在轴 u 上的投影等于向量的模乘以轴与向量的夹角 φ 的余弦：

$$\mathrm{Prj}_u \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\varphi.$$

证　如图 7－16，通过向量$\overrightarrow{AB}$的起点 A 引轴 u'，使 u' 与轴 u 平行且具有相同的正方向，那末轴 u 和向量$\overrightarrow{AB}$的夹角 φ 等于轴 u' 和向量$\overrightarrow{AB}$的夹角，而且有

$$\mathrm{Prj}_u \overrightarrow{AB} = \mathrm{Prj}_{u'} \overrightarrow{AB}.$$

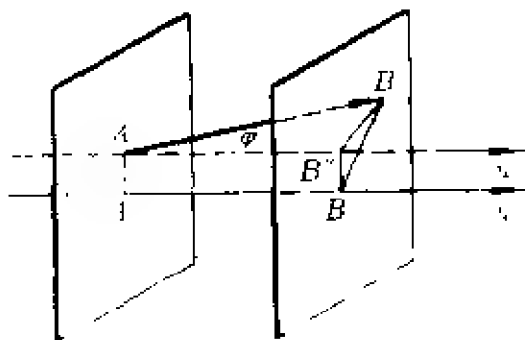


图　7－16

设点 B 在轴 u' 上的投影为点 B''，于是

$$\mathrm{Prj}_{u'} \overrightarrow{AB} = AB'' = |\overrightarrow{AB}|\cos\varphi.$$

所以
$$\mathrm{Prj}_u \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\varphi.$$

由 $\cos\varphi$ 取值的符号与 φ 的关系可知：当一非零向量与其投影轴成锐角时，向量的投影为正；成钝角时，向量的投影为负；成直角时，向量的投影为零.

性质 2　两个向量的和在轴上的投影等于两个向量在该轴上的投影的和，即

$$\mathrm{Prj}(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2) = \mathrm{Prj}\,\boldsymbol{a}_1 + \mathrm{Prj}\,\boldsymbol{a}_2.$$

证　设 u 为投影轴，并作折线 ABC，使$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}_1$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}_2$，由向量加法的三角形法则可知，向量$\overrightarrow{AC}$就是它们的和(图 7－17)，即 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2$.

设点 A、B、C 在轴 u 上的投影分别为 A'、B'、C'，那末

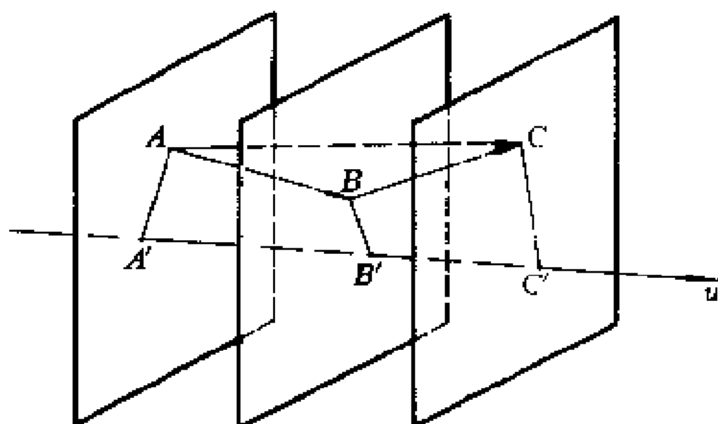


图 7－17

$$\mathrm{Prj}\,\overrightarrow{AB}=A'B',$$

$$\mathrm{Prj}\,\overrightarrow{BC}=B'C',$$

$$\mathrm{Prj}\,\overrightarrow{AC}=A'C'.$$

由于不论 A'、B'、C' 在轴 u 上的位置如何，总有

$$A'B'+B'C'=A'C',$$

所以
$$\mathrm{Prj}\,\overrightarrow{AB}+\mathrm{Prj}\,\overrightarrow{BC}=\mathrm{Prj}\,\overrightarrow{AC},$$

即
$$\mathrm{Prj}\boldsymbol{a}_1+\mathrm{Prj}\boldsymbol{a}_2=\mathrm{Prj}(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2).$$

显然性质 2 可推广到有限个向量，即

$$\mathrm{Prj}(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n)=\mathrm{Prj}\,\boldsymbol{a}_1+\mathrm{Prj}\,\boldsymbol{a}_2+\cdots+\mathrm{Prj}\,\boldsymbol{a}_n.$$

性质 3　向量与数的乘积在轴上的投影等于向量在轴上的投影与数的乘积. 即

$$\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}.$$

证　设 $\boldsymbol{a}$ 与 u 轴的夹角为 φ，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 u 轴的夹角为 φ_1，则当 $\lambda>0$ 时 $\varphi_1=\varphi$，当 $\lambda<0$ 时 $\varphi_1=\pi-\varphi$. 于是

当 $\lambda>0$ 时，$\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a})=|\lambda\boldsymbol{a}|\cos\varphi_1=\lambda|\boldsymbol{a}|\cos\varphi=\lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$；

当 $\lambda<0$ 时，$\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a})=|\lambda|\,|\boldsymbol{a}|\cos\varphi_1=-\lambda|\boldsymbol{a}|(-\cos\varphi)=\lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$；

当 $\lambda=0$ 时，$\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a})=0=\lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$.

二、向量在坐标轴上的分向量与向量的坐标

通过坐标法，使平面上或空间的点与有序数组之间建立了一一对应关系，从而为沟通数与形的研究提供了条件. 类似地，为了沟通数与向量的研究，需要建立向量与有序数组之间的对应关系，这可借助于向量在坐标轴上的投影来实现.

设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$ 为一向量，u 为一条数轴. 点 M_1、M_2 在轴 u 上的投影分别为点 P_1、P_2（图 7－18）. 又设 P_1、P_2 在轴 u 上的坐标依次为 u_1、u_2. 由于向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 在轴 u 上的投影 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{M_1M_2}=a_u$ 就是有向线段的值 P_1P_2，而

$$P_1P_2=OP_2-OP_1=u_2-u_1,$$

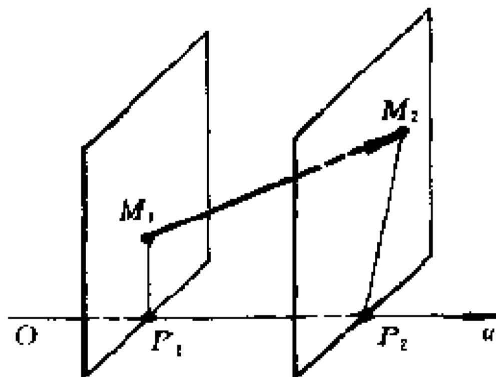


图　7－18

因此
$$a_u=u_2-u_1.$$

如果 $\boldsymbol{e}$ 是与轴 u 正向一致的单位向量，那末由例 1 可知

$$\overrightarrow{P_1P_2}=a_u\boldsymbol{e}=(u_2-u_1)\boldsymbol{e}.$$

设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$ 是以 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为起点、$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为终点的向量. 过点 M_1、M_2 各作垂直于三个坐标轴的平面. 这六个平面围成一个以线段 M_1M_2 为对角线的长方体. 从图 7－19 可以看出

$$\overrightarrow{M_1P}+\overrightarrow{M_1Q}=\overrightarrow{M_1N},$$

$$\overrightarrow{M_1N}+\overrightarrow{M_1R}=\overrightarrow{M_1M_2}.$$

从而得到
$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{M_1P}+\overrightarrow{M_1Q}+\overrightarrow{M_1R}.$$

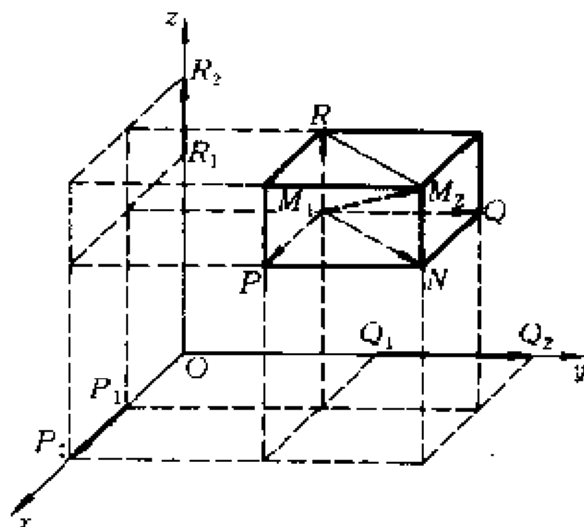


图 7—19

但是 $\overrightarrow{M_1P}=\overrightarrow{P_1P_2}$， $\overrightarrow{M_1Q}=\overrightarrow{Q_1Q_2}$， $\overrightarrow{M_1R}=\overrightarrow{R_1R_2}$，

所以 $$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{P_1P_2}+\overrightarrow{Q_1Q_2}+\overrightarrow{R_1R_2}.$$

上式右端的向量$\overrightarrow{P_1P_2}$、$\overrightarrow{Q_1Q_2}$、$\overrightarrow{R_1R_2}$分别称为向量$\overrightarrow{M_1M_2}$在 x 轴、y 轴、z 轴上的分向量.

以 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 分别表示沿 x、y、z 轴正向的单位向量，并称它们为这一坐标系的基本单位向量，那末

$$\overrightarrow{P_1P_2}=a_x\boldsymbol{i}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i},$$

$$\overrightarrow{Q_1Q_2}=a_y\boldsymbol{j}=(y_2-y_1)\boldsymbol{j},$$

$$\overrightarrow{R_1R_2}=a_z\boldsymbol{k}=(z_2-z_1)\boldsymbol{k}.$$

因此 $$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}.$$

或 $$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}.$$

上式称为向量 $\boldsymbol{a}$ 按基本单位向量的分解式.

从上面推导过程可以看出，一方面，从向量 $\boldsymbol{a}$ 可以唯一地定出它在三条坐标轴上的投影 a_x、a_y、a_z；另一方面，从 a_x、a_y、a_z 可以唯一地定出向量 $\boldsymbol{a}$. 这样，有序数组 a_x、a_y、a_z 就与向量 $\boldsymbol{a}$ 一一对应. 向量 $\boldsymbol{a}$ 在三条坐标轴上的投影 a_x、a_y、a_z 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，并记

$$\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\},$$

上式叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式.

于是，起点为 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 而终点为 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 的向量

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}.$$

特别，点 $M(x, y, z)$ 对于原点 O 的向径

$$\overrightarrow{OM} = \{x, y, z\},$$

这就是说，如果向量的起点在坐标原点，那末这向量的坐标与它的终点的坐标一致.

这里要注意，向量在坐标轴上的分向量与向量在坐标轴上的投影（即向量的坐标）有本质的区别. 向量 $\boldsymbol{a}$ 在坐标轴上的投影是三个数 a_x、a_y、a_z，而向量 $\boldsymbol{a}$ 在坐标轴上的分向量是三个向量 $a_x\boldsymbol{i}$、$a_y\boldsymbol{j}$、$a_z\boldsymbol{k}$.

利用向量的坐标，可得向量的加法、减法以及向量与数的乘法的运算如下：

设 $\quad \boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \ \boldsymbol{b} = \{b_x, b_y, b_z\},$

即 $\quad \boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}, \ \boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}.$

利用向量加法的交换律与结合律，以及向量与数乘法的结合律与分配律，有

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_x + b_x)\boldsymbol{i} + (a_y + b_y)\boldsymbol{j} + (a_z + b_z)\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (a_x - b_x)\boldsymbol{i} + (a_y - b_y)\boldsymbol{j} + (a_z - b_z)\boldsymbol{k},$$

$$\lambda\boldsymbol{a} = (\lambda a_x)\boldsymbol{i} + (\lambda a_y)\boldsymbol{j} + (\lambda a_z)\boldsymbol{k}, (\lambda \text{ 为数})$$

即

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \{a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z\},$$

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \{a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z\},$$

$$\lambda\boldsymbol{a} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}.$$

由此可见，对向量进行加、减及与数相乘，只须对向量的各个坐标分别进行相应的数量运算就行了.

上节定理 1 指出，当向量 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ 时，向量 $\boldsymbol{b} /\!/ \boldsymbol{a}$ 相当于 $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$，按坐标表示式即为

$$\{b_x, b_y, b_z\} = \lambda\{a_x, a_y, a_z\},$$

这也就相当于向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 对应的坐标成比例：

$$\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}\text{[1]}. \qquad (1)$$

例 2 设 $A(x_1,y_1,z_1)$和 $B(x_2,y_2,z_2)$为两已知点，而在 AB 直线上的点 M 分有向线段$\overrightarrow{AB}$为两个有向线段$\overrightarrow{AM}$与$\overrightarrow{MB}$，使它们的值[2]的比等于某数 $\lambda(\lambda\neq-1)$，即

$$\frac{AM}{MB}=\lambda,$$

求分点 M 的坐标 x、y 及 z.

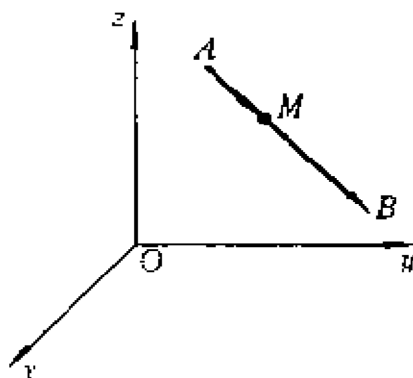


图 7—20

解 因为$\overrightarrow{AM}$与$\overrightarrow{MB}$在一直线上(图 7—20)，所以依题意有

$$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}.$$

而 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}$,

$$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM},$$

因此 $\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})$.

从而 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB})$,

即
$$\{x,y,z\}=\frac{1}{1+\lambda}(\{x_1,y_1,z_1\}+\lambda\{x_2,y_2,z_2\})$$
$$=\frac{1}{1+\lambda}\{x_1+\lambda x_2,y_1+\lambda y_2,z_1+\lambda z_2\}.$$

由此即得点 M 的坐标为

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

点 M 叫做有向线段$\overrightarrow{AB}$的定比分点. 当 $\lambda=1$ 时，点 M 是有向

---

① 当 a_x、a_y、a_z 有一个为零，例如 $a_x=0$，a_y、$a_z\neq0$，这时(1)式应理解为

$$\begin{cases}b_x=0,\\ \frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z};\end{cases}$$

当 a_x、a_y、a_z 有两个为零，例如 $a_x=a_y=0$，$a_z\neq0$，这时(1)式应理解为

$$\begin{cases}b_x=0,\\ b_y=0.\end{cases}$$

② 这里假定有一个轴通过有向线段$\overrightarrow{AB}$.

线段AB的中点，其坐标为

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},y=\frac{y_1+y_2}{2},z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

三、向量的模与方向余弦的坐标表示式

向量可以用它的模和方向来表示，也可以用它的坐标来表示。为了应用上的方便，有必要找出这两种表示法之间的联系，就是说要找出向量的坐标与向量的模、方向之间的联系。

对于非零向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$ 我们可以用它与三条坐标轴的夹角 α、β、γ（$0\leqslant\alpha\leqslant\pi$、$0\leqslant\beta\leqslant\pi$、$0\leqslant\gamma\leqslant\pi$）来表示它的方向（图 7－21），称 α、β、γ 为非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角.

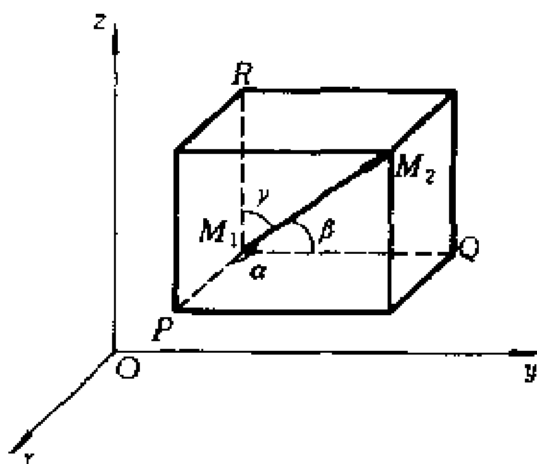


图 7－21

因为向量的坐标就是向量在坐标轴上的投影，所以由性质 1，就得

$$\begin{cases}a_x=|\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\alpha=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha;\\ a_y=|\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\beta=|\boldsymbol{a}|\cos\beta;\\ a_z=|\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\gamma=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma.\end{cases}\qquad(2)$$

公式(2)中出现的 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.通常也用向量的方向余弦来表示向量的方向.

由图 7－21 可以看出，向量 $\boldsymbol{a}$ 的模为

$$|\boldsymbol{a}|=|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{|M_1P|^2+|M_1Q|^2+|M_1R|^2},$$

因 $M_1P=a_x, M_1Q=a_y, M_1R=a_z$，故

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}. \tag{3}$$

再把公式(3)代入公式(2)中，当 $\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\neq 0$ 时，可得

$$\begin{cases} \cos\alpha=\dfrac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}, \\ \cos\beta=\dfrac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}, \\ \cos\gamma=\dfrac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}. \end{cases} \tag{4}$$

(3)和(4)是用向量的坐标表示向量的模和方向余弦的公式.

把公式(4)的三个等式两边分别平方后相加，便得到

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\frac{a_x^2+a_y^2+a_z^2}{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=1. \tag{5}$$

这就是说，任一向量的方向余弦的平方和等于 1.

据公式(2)，与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}^\circ &= \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\{a_x,a_y,a_z\} \\ &= \{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}. \end{aligned}$$

例 3 设已知两点 $M_1(2,2,\sqrt{2})$ 和 $M_2(1,3,0)$，计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

解 $\overrightarrow{M_1M_2}=\{1-2,3-2,0-\sqrt{2}\}$

$$=\{-1,1,-\sqrt{2}\};$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{M_1M_2}| &= \sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt{1+1+2}=\sqrt{4}=2; \end{aligned}$$

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2}, \cos\beta=\frac{1}{2}, \cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\alpha=\frac{2\pi}{3},\beta=\frac{\pi}{3},\gamma=\frac{3\pi}{4}.$$

例 4 设已知两点 $A(4,0,5)$ 和 $B(7,1,3)$，求方向和 $\overrightarrow{AB}$ 一致的单位向量.

解 因 $\overrightarrow{AB}=\{7-4,1-0,3-5\}=\{3,1,-2\}$，

于是 $$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{14}.$$

设 $\boldsymbol{a}^\circ$ 为和 $\overrightarrow{AB}$ 方向一致的单位向量，由于

$$\boldsymbol{a}^\circ=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|},$$

即得

$$\boldsymbol{a}^\circ=\left\{\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}},-\frac{2}{\sqrt{14}}\right\}.$$

习 题 7—3

1. 设向量 $\boldsymbol{r}$ 的模是 4，它与轴 u 的夹角是 60°，求 $\boldsymbol{r}$ 在轴 u 上的投影.

2. 一向量的终点在点 $B(2,-1,7)$，它在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影依次为 4，-4 和 7. 求这向量的起点 A 的坐标.

3. 已知两点 $M_1(0,1,2)$ 和 $M_2(1,-1,0)$. 试用坐标表示式表示向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 及 $-2\overrightarrow{M_1M_2}$.

4. 设已知两点 $M_1(4,\sqrt{2},1)$ 和 $M_2(3,0,2)$. 计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

5. 设向量的方向余弦分别满足 (1) $\cos\alpha=0$；(2) $\cos\beta=1$；(3) $\cos\alpha=\cos\beta=0$，问这些向量与坐标轴或坐标面的关系如何？

6. 分别求出向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$ 及 $\boldsymbol{c}=-2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 的模，并分别用单位向量 $\boldsymbol{a}^\circ$、$\boldsymbol{b}^\circ$、$\boldsymbol{c}^\circ$ 表达向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$.

7. 设 $\boldsymbol{m}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{p}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$. 求向量 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$ 在 x 轴上的投影及在 y 轴上的分向量.

8. 求平行于向量 $\boldsymbol{a}=\{6,7,-6\}$ 的单位向量.

第四节 数量积 向量积* 混合积

一、两向量的数量积

设一物体在常力 $\boldsymbol{F}$ 作用下沿直线从点 M_1 移动到点 M_2. 以 $\boldsymbol{s}$ 表示位移 $\overrightarrow{M_1M_2}$. 由物理学知道，力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功为

$$W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta,$$

其中 θ 为 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角(图 7－22).



图 7－22



图 7－23

从这个问题看出，我们有时要对两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 作这样的运算，运算的结果是一个数，它等于 $|\boldsymbol{a}|$、$|\boldsymbol{b}|$ 及它们的夹角 θ 的余弦的乘积. 我们把它叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$(图 7－23)，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

根据这个定义，上述问题中力所作的功 W 是力 $\boldsymbol{F}$ 与位移 $\boldsymbol{s}$ 的数量积，即

$$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}.$$

由于 $|\boldsymbol{b}|\cos\theta=|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时是向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向上的投影，用 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$[①]来表示这个投影，便有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b},$$

同理，当 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时有 $$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}.$$

---

① 这里把 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$ 理解为 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{b}$，其中轴 u 是与向量 $\boldsymbol{a}$ 方向相同的轴.

这就是说，两向量的数量积等于其中一个向量的模和另一个向量在这向量的方向上的投影的乘积.

由数量积的定义可以推得：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$.

这是因为夹角 $\theta=0$，所以

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2\cos 0=|\boldsymbol{a}|^2.$$

(2) 对于两个非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，那末 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$①；反之，如果 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，那末 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

这是因为如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，由于 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$，$|\boldsymbol{b}|\neq 0$，所以 $\cos\theta=0$，从而 $\theta=\frac{\pi}{2}$，即 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$；反之，如果 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，那末 $\theta=\frac{\pi}{2}$，$\cos\theta=0$，于是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=0$.

由于零向量的方向可以看作是任意的，故可以认为零向量与任何向量都垂直. 因此，上述结论可叙述为：向量 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

数量积符合下列运算规律：

(1) 交换律 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

因根据定义有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}),\quad \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}}),$$

而 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|$，且 $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\cos(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$，

所以 $$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}.$$

(2) 分配律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

因为当 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 时，上式显然成立；当 $\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0}$ 时，有

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{c}|\mathrm{Prj}_c(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),$$

由投影性质 2，可知

$$\mathrm{Prj}_c(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_c\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_c\boldsymbol{b},$$

---

① 如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta=\frac{\pi}{2}$，就称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

所以

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{c}|(\mathrm{Prj}_c\,\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_c\,\boldsymbol{b})$$
$$=|\boldsymbol{c}|\mathrm{Prj}_c\,\boldsymbol{a}+|\boldsymbol{c}|\mathrm{Prj}_c\,\boldsymbol{b}$$
$$=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}.$$

(3) 数量积还符合如下的结合律：

$$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}),\quad \lambda\text{ 为数}.$$

这是因为当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 时，上式显然成立；当 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时，按投影性质3，可得

$$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_b(\lambda\boldsymbol{a})=|\boldsymbol{b}|\lambda\mathrm{Prj}_b\,\boldsymbol{a}=\lambda|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_b\,\boldsymbol{a}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}).$$

由上述结合律，利用交换律，容易推得

$$\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\text{ 及 }(\lambda\boldsymbol{a})\cdot(\mu\boldsymbol{b})=\lambda\mu(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}).$$

这是因为

$$\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=\lambda(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b});$$
$$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot(\mu\boldsymbol{b})=\lambda[\boldsymbol{a}\cdot(\mu\boldsymbol{b})]=\lambda[\mu(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})]=\lambda\mu(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}).$$

例 1 试用向量证明三角形的余弦定理.

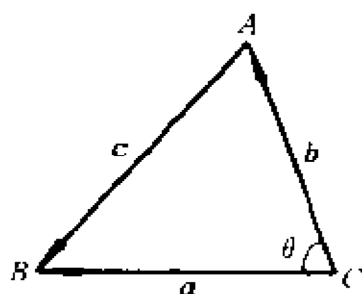


图 7-24

证 设在△ABC 中，$\angle BCA=\theta$（图 7-24），$|BC|=a$，$|CA|=b$，$|AB|=c$，要证

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta.$$

记 $\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，则有

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},$$

从而
$$|\boldsymbol{c}|^2=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$
$$=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}).$$

由 $|\boldsymbol{a}|=a$，$|\boldsymbol{b}|=b$，$|\boldsymbol{c}|=c$ 及 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\theta$，即得

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta.$$

下面我们来推导数量积的坐标表示式.

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$. 按数量积的运算规

律可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_x\boldsymbol{i}\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})+a_y\boldsymbol{j}\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&\quad+a_z\boldsymbol{k}\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}\\&\quad+a_yb_x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+a_yb_z\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}\\&\quad+a_zb_x\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 互相垂直，所以 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0$，$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=0$. 又由于 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 的模均为 1，所以 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$. 因而得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

这就是两个向量的数量积的坐标表示式.

由于 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$，所以当 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 都不是零向量时，有

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}.$$

以数量积的坐标表示式及向量的模的坐标表示式代入上式，就得

$$\cos\theta=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

这就是两向量夹角余弦的坐标表示式.

例 2 已知三点 $M(1,1,1)$、$A(2,2,1)$ 和 $B(2,1,2)$，求 $\angle AMB$.

解 作向量 $\overrightarrow{MA}$ 及 $\overrightarrow{MB}$，$\angle AMB$ 就是向量 $\overrightarrow{MA}$ 与 $\overrightarrow{MB}$ 的夹角. 这里，$\overrightarrow{MA}=\{1,1,0\}$，$\overrightarrow{MB}=\{1,0,1\}$，从而

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=1\times1+1\times0+0\times1=1;$$

$$|\overrightarrow{MA}|=\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2};$$

$$|\overrightarrow{MB}|=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}.$$

代入两向量夹角余弦的表达式，得

$$\cos\angle AMB = \frac{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MA}||\overrightarrow{MB}|}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

由此得
$$\angle AMB = \frac{\pi}{3}.$$

例 3 设液体流过平面 S 上面积为 A 的一个区域，液体在这区域上各点处的流速均为(常向量) $\boldsymbol{v}$. 设 $\boldsymbol{n}$ 为垂直于 S 的单位向量(图 7－25(a))，计算单位时间内经过这区域流向 $\boldsymbol{n}$ 所指一方的液体的质量 P(液体的密度为 ρ).

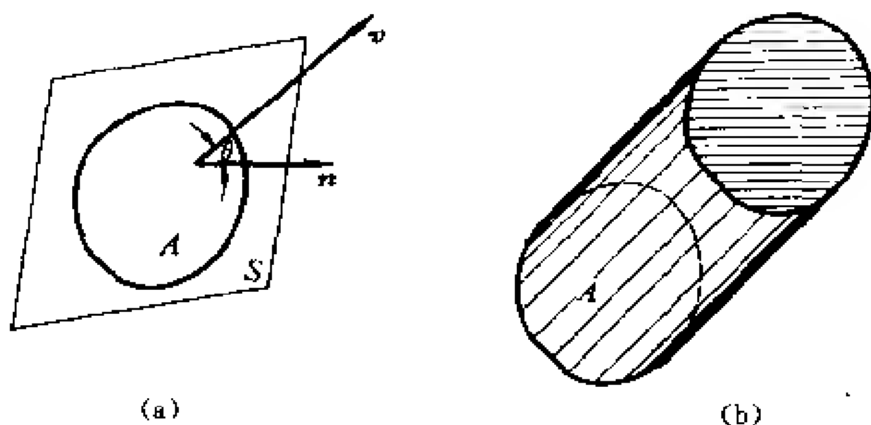


图 7－25

解 单位时间内流过这区域的液体组成一个底面积为 A、斜高为 $|\boldsymbol{v}|$ 的斜柱体(图 7－25(b)). 这柱体的斜高与底面的垂线的夹角就是 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角 θ，所以这柱体的高为 $|\boldsymbol{v}|\cos\theta$，体积为

$$A|\boldsymbol{v}|\cos\theta = A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}.$$

从而，单位时间内经过这区域流向 $\boldsymbol{n}$ 所指一方的液体的质量为

$$P = \rho A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}.$$

二、两向量的向量积

在研究物体转动问题时，不但要考虑这物体所受的力，还要分析这些力所产生的力矩. 下面就举一个简单的例子来说明表达力矩的方法.

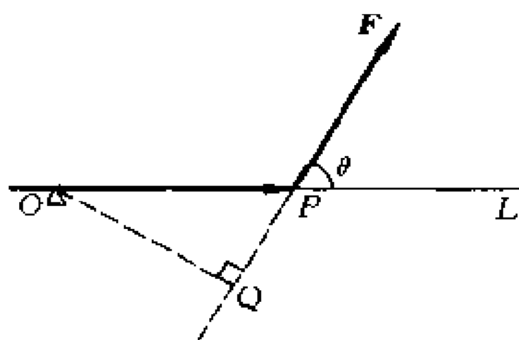


图 7－26

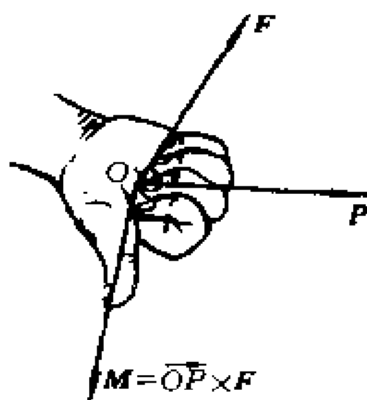


图 7－27

设 O 为一根杠杆 L 的支点．有一个力 $\boldsymbol{F}$ 作用于这杠杆上 P 点处．$\boldsymbol{F}$ 与 $\overrightarrow{OP}$ 的夹角为 θ（图 7－26）．由力学规定，力 $\boldsymbol{F}$ 对支点 O 的力矩是一向量 $\boldsymbol{M}$，它的模

$$|\boldsymbol{M}|=|OQ||\boldsymbol{F}|=|\overrightarrow{OP}||\boldsymbol{F}|\sin\theta,$$

而 $\boldsymbol{M}$ 的方向垂直于 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 所决定的平面，$\boldsymbol{M}$ 的指向是按右手规则从 $\overrightarrow{OP}$ 以不超过 π 的角转向 $\boldsymbol{F}$ 来确定的，即当右手的四个手指从 $\overrightarrow{OP}$ 以不超过 π 的角转向 $\boldsymbol{F}$ 握拳时，大拇指的指向就是 $\boldsymbol{M}$ 的指向（图 7－27）．

这种由两个已知向量按上面的规则来确定另一个向量的情况，在其他力学和物理问题中也会遇到．从而可以抽象出两个向量的向量积概念．

设向量 $\boldsymbol{c}$ 是由两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 按下列方式定出：

$\boldsymbol{c}$ 的模 $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$，其中 θ 为 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 间的夹角；

$\boldsymbol{c}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所决定的平面（即 $\boldsymbol{c}$ 既垂直于 $\boldsymbol{a}$，又垂直于 $\boldsymbol{b}$），$\boldsymbol{c}$ 的指向按右手规则从 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$ 来确定（图 7－28）．

那末，向量 $\boldsymbol{c}$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积，记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}.$$

因此，上面的力矩 $\boldsymbol{M}$ 等于 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 的向量积，即

$$\boldsymbol{M}=\overrightarrow{OP}\times\boldsymbol{F}.$$

由向量积的定义可以推得：

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$.

这是因为夹角 $\theta=0$，所以 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}|^2\sin 0=0$.

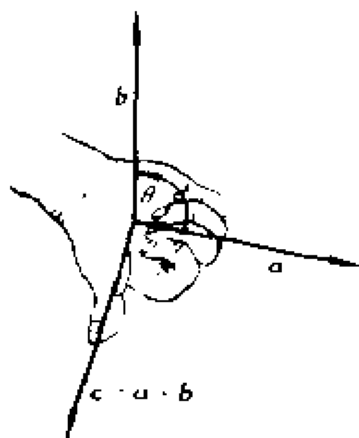


图 7-28

(2) 对于两个非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，如果 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$，那末 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$；反之，如果 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，那末 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$.

这是因为如果 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$，由于 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$，$|\boldsymbol{b}|\neq 0$，故必有 $\sin\theta=0$，于是 $\theta=0$ 或 π，即 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$；反之，如果 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，那末 $\theta=0$ 或 π，于是 $\sin\theta=0$，从而 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=0$，即 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$.

由于可以认为零向量与任何向量都平行，因此，上述结论可叙述为：向量 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$.

向量积符合下列运算规律：

(1) $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

这是因为按右手规则从 $\boldsymbol{b}$ 转向 $\boldsymbol{a}$ 定出的方向恰好与按右手规则从 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$ 定出的方向相反. 它表明交换律对向量积不成立.

(2) 分配律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$.

(3) 向量积还符合如下的结合律：

$$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\ (\lambda\text{ 为数}).$$

这两个规律的证明这里从略了.

下面来推导向量积的坐标表示式.

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$. 那末，按上述运算规律，得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_x\boldsymbol{i}\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&\quad+a_y\boldsymbol{j}\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&\quad+a_z\boldsymbol{k}\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})+a_xb_y(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+a_xb_z(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})\\&\quad+a_yb_x(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+a_yb_y(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})+a_yb_z(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})\end{aligned}$$

$$+a_zb_x(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})+a_zb_y(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})+a_zb_z(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}).$$

由于 $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}$、$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k}$、$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}$,所以

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}.$$

为了帮助记忆,利用三阶行列式,上式可写成

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}.$$

例 4 设 $\boldsymbol{a}=\{2,1,-1\}$,$\boldsymbol{b}=\{1,-1,2\}$,计算 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

解
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&1&-1\\1&-1&2\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}.$$

例 5 已知三角形 ABC 的顶点分别是 $A(1,2,3)$、$B(3,4,5)$ 和 $C(2,4,7)$,求三角形 ABC 的面积.

解 根据向量积的定义,可知三角形 ABC 的面积

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\angle A$$
$$=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|.$$

由于 $\overrightarrow{AB}=\{2,2,2\}$,$\overrightarrow{AC}=\{1,2,4\}$,因此

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&2&2\\1&2&4\end{vmatrix}=4\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}.$$

于是

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|4\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}|=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+(-6)^2+2^2}=\sqrt{14}.$$

例 6 设刚体以等角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 绕 l 轴旋转,计算刚体上一点 M 的线速度.

解 刚体绕 l 轴旋转时,我们可以用在 l 轴上的一个向量 $\boldsymbol{\omega}$ 表示角速度,它的大小等于角速度的大小,它的方向由右手规则定

出：即以右手握住 l 轴，当右手的四个手指的转向与刚体的旋转方向一致时，大拇指的指向就是 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向(图 7—29).

设点 M 到旋转轴 l 的距离为 a，再在 l 轴上任取一点 O 作向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$，并以 θ 表示 $\boldsymbol{\omega}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 的夹角，那末

$$a=|\boldsymbol{r}|\sin\theta.$$

设线速度为 $\boldsymbol{v}$，那末由物理学上线速度与角速度间的关系可知，$\boldsymbol{v}$ 的大小为

$$|\boldsymbol{v}|=|\boldsymbol{\omega}|a=|\boldsymbol{\omega}||\boldsymbol{r}|\sin\theta;$$

$\boldsymbol{v}$ 的方向垂直于通过 M 点与 l 轴的平面，即 $\boldsymbol{v}$ 垂直于 ω 与 r；又 $\boldsymbol{v}$ 的指向是使 ω、r、$\boldsymbol{v}$ 合于右手规则. 因此有

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}.$$

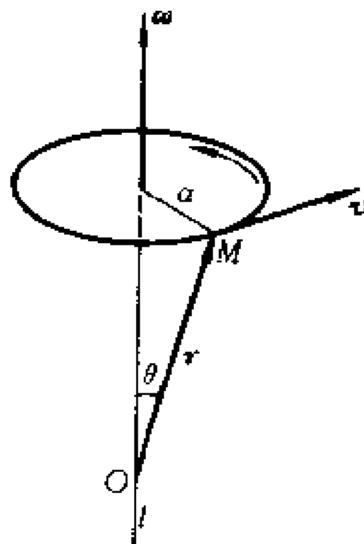


图 7-29

*三、向量的混合积

设已知三个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$. 如果先作两向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，把所得到的向量与第三个向量 $\boldsymbol{c}$ 再作数量积 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$，这样得到的数量叫做三向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的混合积，记作 $[\boldsymbol{abc}]$.

下面我们来推出三向量的混合积的坐标表示式.

设 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，$\boldsymbol{c}=\{c_x,c_y,c_z\}$，

因为
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\boldsymbol{k},$$

再按两向量的数量积的坐标表示式，便得

$$[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$$

$$=c_x\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-c_y\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}+c_z\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix},$$

或

$$[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

向量的混合积有下述几何意义：

向量的混合积$[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$是这样一个数，它的绝对值表示以向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$为棱的平行六面体的体积. 如果向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$组成右手系（即$\boldsymbol{c}$的指向按右手规则从$\boldsymbol{a}$转向$\boldsymbol{b}$来确定），那末混合积的符号是正的；如果$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$组成左手系（即$\boldsymbol{c}$的指向按左手规则从$\boldsymbol{a}$转向$\boldsymbol{b}$来确定），那末混合积的符号是负的.

事实上，设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$. 按向量积的定义，向量积$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{f}$是一个向量，它的模在数值上等于以向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$为边所作平行四边形$OADB$的面积，它的方向垂直于这平行四边形的平面，且当$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$组成右手系时，向量$\boldsymbol{f}$与向量$\boldsymbol{c}$朝着这平面的同侧（图 7－30）；当$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$组成左手系时，向量$\boldsymbol{f}$与向量$\boldsymbol{c}$朝着这平面的异侧. 所以，如设$\boldsymbol{f}$与$\boldsymbol{c}$的夹角为$\alpha$，那末当$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$组成右手系时，$\alpha$为锐角；当$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$组成左手系时，$\alpha$为钝角. 由于

$$[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\,|\boldsymbol{c}|\cos\alpha,$$

所以当$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$组成右手系时，$[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]$为正；当$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$组成左手系时，$[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]$为负.

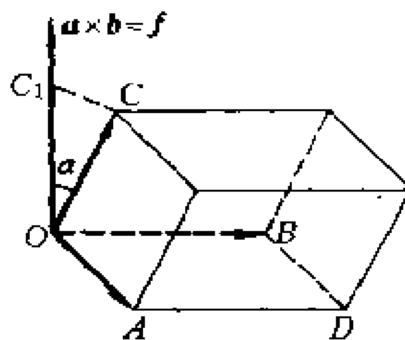


图 7－30

因为以向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$为棱的平行六面体的底（平行四边形$OADB$）的面积A在数值上等于$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$，它的高$h$等于向量$\boldsymbol{c}$在向量$\boldsymbol{f}$上的投影的绝对值，即

$$h=|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{c}|\,|\cos\alpha|,$$

所以平行六面体的体积

$$V=Ah=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\,|\boldsymbol{c}|\,|\cos\alpha|=|[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]|.$$

例 7 已知不在一平面上的四点：$A(x_1,y_1,z_1)$、$B(x_2,y_2,z_2)$、$C(x_3,y_3,z_3)$、$D(x_4,y_4,z_4)$. 求四面体 $ABCD$ 的体积.

解 由立体几何知道，四面体的体积 V_T 等于以向量$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$和$\overrightarrow{AD}$为棱的平行六面体的体积的六分之一. 因而

$$V_T=\frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB}\quad\overrightarrow{AC}\quad\overrightarrow{AD}]|.$$

由于

$$\overrightarrow{AB}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\},$$
$$\overrightarrow{AC}=\{x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1\},$$
$$\overrightarrow{AD}=\{x_4-x_1,y_4-y_1,z_4-z_1\},$$

所以

$$V_T=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1\end{vmatrix}.$$

上式中符号的选择必须和行列式的符号一致.

习 题 7—4

1. 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，求

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$； (2) $(-2\boldsymbol{a})\cdot 3\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times 2\boldsymbol{b}$； (3) $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦.

2. 设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为单位向量，且满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

3. 已知 $M_1(1,-1,2)$、$M_2(3,3,1)$和 $M_3(3,1,3)$. 求与$\overrightarrow{M_1M_2}$、$\overrightarrow{M_2M_3}$同时垂直的单位向量.

4. 设质量为 100kg 的物体从点 $M_1(3,1,8)$沿直线移动到点 $M_2(1,4,2)$计算重力所作的功(长度单位为 m，重力方向为 z 轴负方向).

5. 在杠杆上支点 O 的一侧与点 O 的距离为 x_1 的点 P_1 处，有一与$\overrightarrow{OP_1}$成角 θ_1 的力 $\boldsymbol{F}_1$ 作用着；在 O 的另一侧与点 O 的距离为 x_2 的点 P_2 处，有一与$\overrightarrow{OP_2}$成角 θ_2 的力 $\boldsymbol{F}_2$ 作用着(图 7－31). 问 θ_1、θ_2、x_1、x_2、$|\boldsymbol{F}_1|$、$|\boldsymbol{F}_2|$符合怎样的条件才能使杠杆保持平衡？

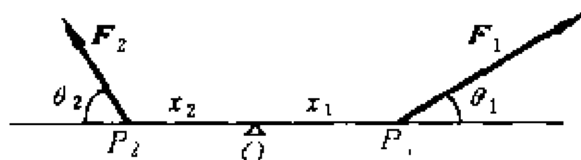


图 7-31

6. 求向量 $\boldsymbol{a}=\{4,-3,4\}$ 在向量 $\boldsymbol{b}=\{2,2,1\}$ 上的投影.

7. 设 $\boldsymbol{a}=\{3,5,-2\}$，$\boldsymbol{b}=\{2,1,4\}$，问 λ 与 μ 有怎样的关系，能使得 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直?

8. 试用向量证明直径所对的圆周角是直角.

9. 已知向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$，计算：

(1) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$；　(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；　(3) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$.

10. 已知 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，求 $\triangle OAB$ 的面积.

11*. 已知 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，$\boldsymbol{c}=\{c_x,c_y,c_z\}$，

(1) 试利用行列式的性质证明

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}.$$

(2) 试利用混合积的几何意义证明三向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件是：

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0.$$

12. 试用向量证明不等式：

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\ \sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\geqslant|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|,$$

其中 a_1、a_2、a_3、b_1、b_2、b_3 为任意实数. 并指出等号成立的条件.

第五节　曲面及其方程

一、曲面方程的概念

在日常生活中，我们经常会遇到各种曲面，例如反光镜的镜面、管道的外表面以及锥面等等.

像在平面解析几何中把平面曲线当作动点的轨迹一样，在空

间解析几何中，任何曲面都看作点的几何轨迹.在这样的意义下，如果曲面 S 与三元方程

$$F(x,y,z)=0 \tag{1}$$

有下述关系：

(1) 曲面 S 上任一点的坐标都满足方程(1)；

(2) 不在曲面 S 上的点的坐标都不满足方程(1)，

那末，方程(1)就叫做曲面 S 的方程，而曲面 S 就叫做方程(1)的图形(图 7—32).

现在我们来建立几个常见曲面的方程.

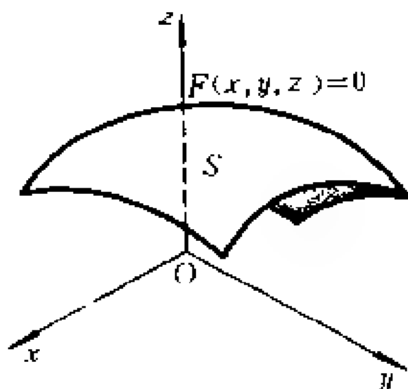


图 7—32

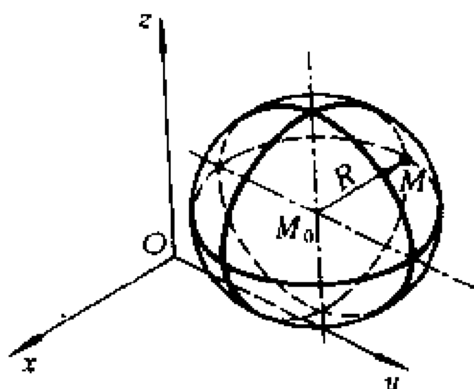


图 7—33

例 1 建立球心在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$、半径为 R 的球面的方程.

解 设 $M(x,y,z)$是球面上的任一点(图 7—33)，那末

$$|M_0M|=R.$$

由于 $$|M_0M|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2},$$

所以 $$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R,$$

或

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2. \tag{2}$$

这就是球面上的点的坐标所满足的方程.而不在球面上的点的坐标都不满足这方程.所以方程(2)就是以 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为球心、R 为半径的球面方程.

如果球心在原点，那末 $x_0=y_0=z_0=0$，从而球面方程为

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

例 2 设有点 $A(1,2,3)$ 和 $B(2,-1,4)$，求线段 AB 的垂直平分面的方程.

解 由题意知道，所求的平面就是与 A 和 B 等距离的点的几何轨迹. 设 $M(x,y,z)$ 为所求平面上的任一点，由于

$$|AM|=|BM|,$$

所以

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}$$
$$=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2}.$$

等式两边平方，然后化简便得

$$2x-6y+2z-7=0.$$

这就是所求平面上的点的坐标所满足的方程，而不在此平面上的点的坐标都不满足这个方程，所以这个方程就是所求平面的方程.

以上表明作为点的几何轨迹的曲面可以用它的点的坐标间的方程来表示. 反之，变量 x、y 和 z 间的方程通常表示一个曲面. 因此在空间解析几何中关于曲面的研究，有下列两个基本问题：

(1) 已知一曲面作为点的几何轨迹时，建立这曲面的方程；

(2) 已知坐标 x、y 和 z 间的一个方程时，研究这方程所表示的曲面的形状.

上述例 1、例 2 是从已知曲面建立其方程的例子. 下面举一个由已知方程研究它所表示的曲面的例子.

例 3 方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y=0$ 表示怎样的曲面?

解 通过配方，原方程可以改写成

$$(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=5.$$

与(2)式比较，就知道原方程表示球心在点 $M_0(1,-2,0)$、半径为 $R=\sqrt{5}$ 的球面.

一般地，设有三元二次方程

$$Ax^2+Ay^2+Az^2+Dx+Ey+Fz+G=0,$$

这个方程的特点是缺 xy, yz, zx 各项，而且平方项系数相同，只要将方程经过配方可以化成方程(2)的形式，那末它的图形就是一个球面.

下面，作为基本问题(1)的例子，我们讨论旋转曲面；作为基本问题(2)的例子，我们讨论柱面. 第九节中对二次曲面的讨论，也可看作基本问题(2)的例子.

二、旋转曲面

以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面叫做旋转曲面，这条定直线叫做旋转曲面的轴.

设在 yOz 坐标面上有一已知曲线 C，它的方程为

$$f(y,z)=0,$$

把这曲线绕 z 轴旋转一周，就得到一个以 z 轴为轴的旋转曲面(图 7—34). 它的方程可以求得如下：

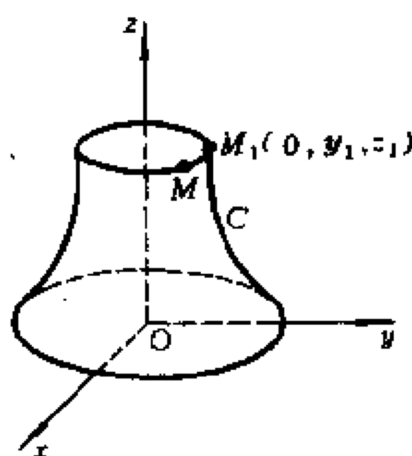


图 7—34

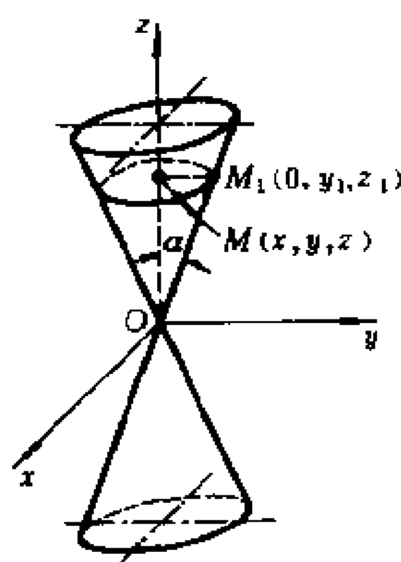


图 7—35

设 $M_1(0,y_1,z_1)$ 为曲线 C 上的任一点，那末有

$$f(y_1,z_1)=0. \tag{3}$$

当曲线 C 绕 z 轴旋转时，点 M_1 也绕 z 轴转到另一点 $M(x,y,z)$，这时 $z=z_1$ 保持不变，且点 M 到 z 轴的距离

$$d=\sqrt{x^2+y^2}=|y_1|.$$

将 $z_1=z, y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 代入(3)式，就有

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0, \tag{4}$$

这就是所求旋转曲面的方程.

由此可知，在曲线 C 的方程 $f(y,z)=0$ 中将 y 改成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$，便得曲线 C 绕 z 轴旋转所成的旋转曲面的方程.

同理，曲线 C 绕 y 轴旋转所成的旋转曲面的方程为

$$f(y, \pm\sqrt{x^2+z^2})=0. \tag{5}$$

例 4 直线 L 绕另一条与 L 相交的直线旋转一周，所得旋转曲面叫做圆锥面. 两直线的交点叫做圆锥面的顶点，两直线的夹角 $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ 叫做圆锥面的半顶角. 试建立顶点在坐标原点 O，旋转轴为 z 轴，半顶角为 α 的圆锥面(图 7－35)的方程.

解 在 yOz 坐标面上，直线 L 的方程为

$$z=y\cot\alpha, \tag{6}$$

因为旋转轴为 z 轴，所以只要将方程(6)中的 y 改成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$，便得到这圆锥面的方程

$$z=\pm\sqrt{x^2+y^2}\cot\alpha$$

或

$$z^2=a^2(x^2+y^2), \tag{7}$$

其中 $a=\cot\alpha$.

显然，圆锥面上任一点 M 的坐标一定满足方程(7). 如果点 M 不在圆锥面上，那末直线 OM 与 z 轴的夹角就不等于 α，于是点 M 的坐标就不满足方程(7).

例 5 将 xOz 坐标面上的双曲线

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

分别绕 x 轴和 z 轴旋转一周，求所生成的旋转面曲的方程.

解 绕 x 轴旋转所成的旋转曲面的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1.$$

绕 z 轴旋转所成的旋转曲面的方程为

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

这两种曲面都叫做旋转双曲面.

三、柱面

我们先分析一个具体的例子.

例 6 方程 $x^2+y^2=R^2$ 表示怎样的曲面?

解 方程 $x^2+y^2=R^2$ 在 xOy 面上表示圆心在原点 O、半径为 R 的圆. 在空间直角坐标系中，这方程不含竖坐标 z，即不论空间点的竖坐标 z 怎样，只要它的横坐标 x 和纵坐标 y 能满足这方程，那末这些点就在这曲面上. 这就是说，凡是通过 xOy 面内圆 $x^2+y^2=R^2$ 上一点 $M(x,y,0)$，且平行于 z 轴的直线 l 都在这曲面上. 因此，这曲面可以看作是由平行于 z 轴的直线 l 沿 xOy 面上的圆 $x^2+y^2=R^2$ 移动而形成的. 这曲面叫做圆柱面(图 7—36)，xOy 面上的圆 $x^2+y^2=R^2$ 叫做它的准线，这平行于 z 轴的直线 l 叫做它的母线.

一般地，平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 形成的轨迹叫做柱面，定曲线 C 叫做柱面的准线，动直线 L 叫做柱面的母线.

上面我们看到，不含 z 的方程 $x^2+y^2=R^2$ 在空间直角坐标系中表示圆柱面，它的母线平行于 z 轴，它的准线是 xOy 面上的圆 $x^2+y^2=R^2$.

类似地，方程 $y^2=2x$ 表示母线平行于 z 轴的柱面，它的准线是 xOy 面上的抛物线 $y^2=2x$，该柱面叫做抛物柱面(图 7—37).

又如，方程 $x-y=0$ 表示母线平行于 z 轴的柱面，其准线是 xOy 面上的直线 $x-y=0$，所以它是过 z 轴的平面(图 7—38).

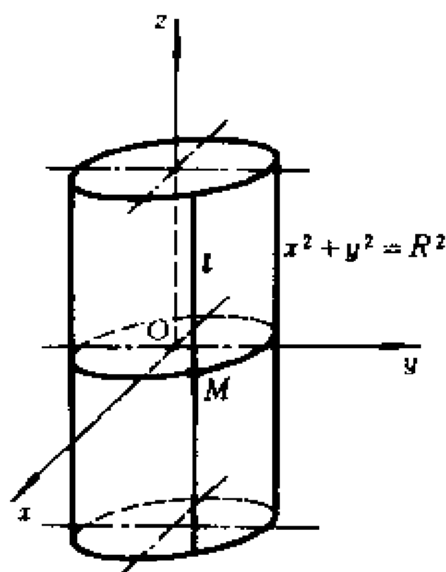


图 7—36

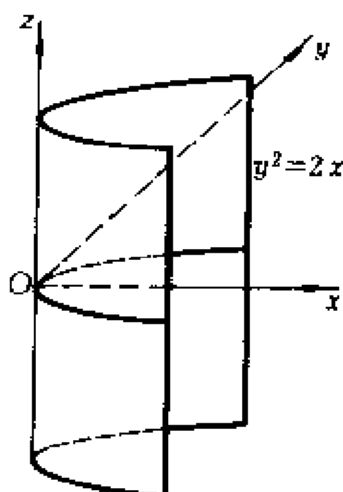


图 7—37

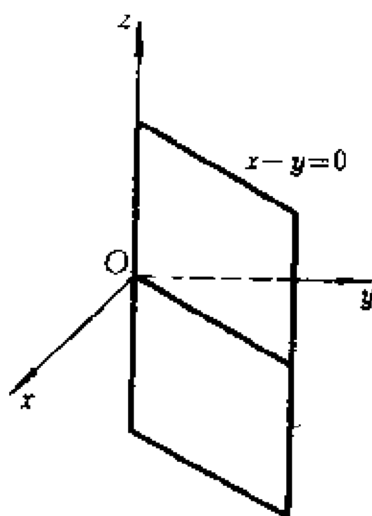


图 7—38

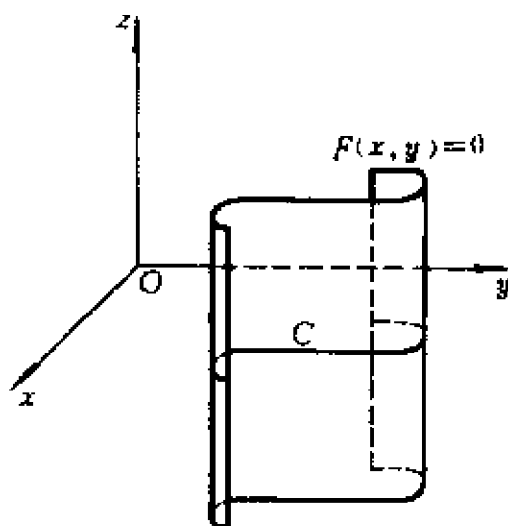


图 7—39

一般地，只含 x、y 而缺 z 的方程 $F(x,y)=0$，在空间直角坐标系中表示母线平行于 z 轴的柱面，其准线是 xOy 面上的曲线 C：$F(x,y)=0$（图 7—39）.

类似可知，只含 x、z 而缺 y 的方程 $G(x,z)=0$ 和只含 y、z 而缺 x 的方程 $H(y,z)=0$ 分别表示母线平行于 y 轴和 x 轴的柱面.

例如，方程 $x-z=0$ 表示母线平行于 y 轴的柱面，其准线是

xOz 面上的直线 $x-z=0$. 所以它是过 y 轴的平面(图 7—40).

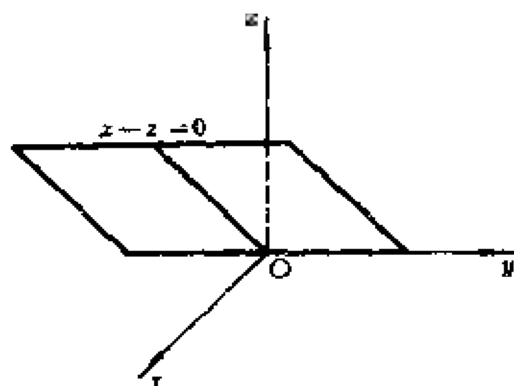


图 7—40

习 题 7—5

1. 一动点与两定点(2,3,1)和(4,5,6)等距离,求这动点的轨迹方程.

2. 建立以点(1,3,−2)为球心,且通过坐标原点的球面方程.

3. 方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z=0$ 表示什么曲面?

4. 求与坐标原点 O 及点(2,3,4)的距离之比为 1∶2 的点的全体所组成的曲面的方程,它表示怎样的曲面?

5. 将 xOz 坐标面上的抛物线 $z^2=5x$ 绕 x 轴旋转一周,求所生成的旋转曲面的方程.

6. 将 xOz 坐标面上的圆 $x^2+z^2=9$ 绕 z 轴旋转一周,求所生成的旋转曲面的方程.

7. 将 xOy 坐标面上的双曲线 $4x^2-9y^2=36$ 分别绕 x 轴及 y 轴旋转一周,求所生成的旋转曲面的方程.

8. 画出下列各方程所表示的曲面:

(1) $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$;　　(2) $-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$;

(3) $\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$;　　(4) $y^2-z=0$;

(5) $z=2-x^2$.

9. 指出下列方程在平面解析几何中和在空间解析几何中分别表示什么图形:

(1) $x=2$;　　(2) $y=x+1$;

(3) $x^2+y^2=4$;　　　　　　(4) $x^2-y^2=1$.

10. 说明下列旋转曲面是怎样形成的：

(1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{9}=1$;　　　　(2) $x^2-\frac{y^2}{4}+z^2=1$;

(3) $x^2-y^2-z^2=1$;　　　　(4) $(z-a)^2=x^2+y^2$.

第六节　空间曲线及其方程

一、空间曲线的一般方程

空间曲线可以看作两个曲面的交线. 设

$$F(x,y,z)=0 \quad 和 \quad G(x,y,z)=0$$

是两个曲面的方程，它们的交线为 C(图 7—41). 因为曲线 C 上的任何点的坐标应同时满足这两个曲面的方程，所以应满足方程组

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases} \tag{1}$$

反过来，如果点 M 不在曲线 C 上，那末它不可能同时在两个曲面上，所以它的坐标不满足方程组(1). 因此，曲线 C 可以用方程组(1)来表示. 方程组(1)叫做空间曲线 C 的一般方程.

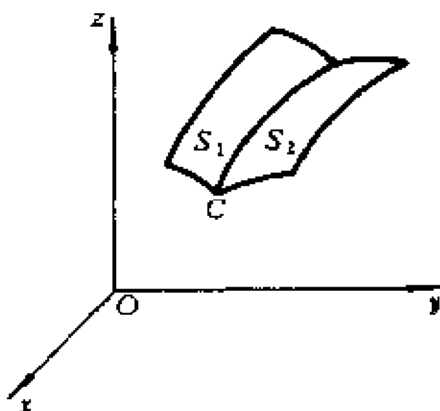


图　7—41

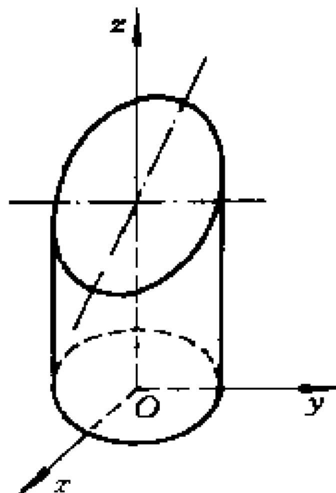


图　7—42

例 1　方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ 2x+3z=6 \end{cases}$$

表示怎样的曲线?

解 方程组中第一个方程表示母线平行于 z 轴的圆柱面,其准线是 xOy 面上的圆,圆心在原点 O,半径为 1. 方程组中第二个方程表示一个母线平行于 y 轴的柱面,由于它的准线是 zOx 面上的直线,因此它是一个平面. 方程组就表示上述平面与圆柱面的交线,如图 7—42 所示.

例 2 方程组

$$\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}, \\ \left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 \end{cases}$$

表示怎样的曲线?

解 方程组中第一个方程表示球心在坐标原点 O,半径为 a 的上半球面. 第二个方程表示母线平行于 z 轴的圆柱面,它的准线是 xOy 面上的圆,这圆的圆心在点 $\left(\dfrac{a}{2},0\right)$,半径为 $\dfrac{a}{2}$. 方程组就表示上述半球面与圆柱面的交线,如图 7—43 所示.

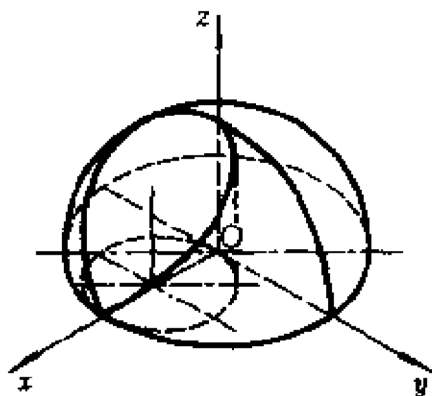


图 7—43

二、空间曲线的参数方程

空间曲线 C 的方程除了一般方程之外,也可以用参数形式表示,只要将 C 上动点的坐标 x、y、z 表示为参数 t 的函数:

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t). \end{cases} \tag{2}$$

当给定 $t=t_1$ 时,就得到 C 上的一个点 (x_1,y_1,z_1);随着 t 的变动便可得曲线 C 上的全部点. 方程组(2)叫做空间曲线的参数方程.

例 3 如果空间一点 M 在圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 上以角速度 ω 绕 z 轴旋转，同时又以线速度 v 沿平行于 z 轴的正方向上升（其中 ω、v 都是常数），那末点 M 构成的图形叫做螺旋线. 试建立其参数方程.

解 取时间 t 为参数. 设当 $t=0$ 时，动点位于 x 轴上的一点 $A(a,0,0)$ 处. 经过时间 t，动点由 A 运动到 $M(x,y,z)$（图 7－44）. 记 M 在 xOy 面上的投影为 M'，M' 的坐标为 $x,y,0$. 由于动点在圆柱面上以角速度 ω 绕 z 轴旋转，所以经过时间 t，$\angle AOM'=\omega t$. 从而

$$x=|OM'|\cos\angle AOM'=a\cos\omega t,$$
$$y=|OM'|\sin\angle AOM'=a\sin\omega t.$$

由于动点同时以线速度 v 沿平行于 z 轴的正方向上升，所以

$$z=M'M=vt.$$

因此螺旋线的参数方程为

$$\begin{cases}x=a\cos\omega t,\\ y=a\sin\omega t,\\ z=vt.\end{cases}$$

也可以用其它变量作参数；例如令 $\theta=\omega t$，则螺旋线的参数方程可写为

$$\begin{cases}x=a\cos\theta,\\ y=a\sin\theta,\\ z=b\theta.\end{cases}$$

这里 $b=\dfrac{v}{\omega}$，而参数为 θ.

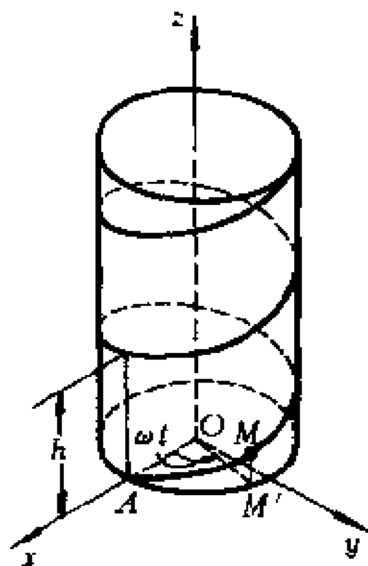


图 7－44

螺旋线是实践中常用的曲线. 例如，平头螺丝钉的外缘曲线就是螺旋线. 当我们拧紧平头螺丝钉时，它的外缘曲线上的任一点 M，一方面绕螺丝钉的轴旋转，另一方面又沿平行于轴线的方向前进，点 M 就走出一段螺旋线.

螺旋线有一个重要性质：当 θ 从 θ_0 变到 $\theta_0+\alpha$ 时，z 由 $b\theta_0$ 变到 $b\theta_0+b\alpha$. 这说明当 OM' 转过角 α 时，M 点沿螺旋线上升了高度 $b\alpha$，即上升的高度与 OM' 转过的角度成正比. 特别是当 OM' 转过一周，即 $\alpha=2\pi$ 时，M 点就上升固定的高度 $h=2\pi b$. 这个高度 $h=2\pi b$ 在工程技术上叫做**螺距**.

三、空间曲线在坐标面上的投影

设空间曲线 C 的一般方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases} \tag{3}$$

现在我们来研究由方程组(3)消去变量 z 后所得的方程

$$H(x,y)=0. \tag{4}$$

由于方程(4)是由方程组(3)消去 z 后所得的结果，因此当 x、y 和 z 满足方程组(3)时，前两个数 x、y 必定满足方程(4)，这说明曲线 C 上的所有点都在由方程(4)所表示的曲面上.

由上节知道，方程(4)表示一个母线平行于 z 轴的柱面. 由上面的讨论可知，这柱面必定包含曲线 C. 以曲线 C 为准线、母线平行于 z 轴(即垂直于 xOy 面)的柱面叫做曲线 C 关于 xOy 面的**投影柱面**，投影柱面与 xOy 面的交线叫做空间曲线 C 在 xOy 面上的**投影曲线**，或简称**投影**. 因此，方程(4)所表示的柱面必定包含投影柱面，而方程

$$\begin{cases} H(x,y)=0, \\ z=0 \end{cases}$$

所表示的曲线必定包含空间曲线 C 在 xOy 面上的投影.

同理，消去方程组(3)中的变量 x 或变量 y，再分别和 $x=0$ 或 $y=0$ 联立，我们就可得到包含曲线 C 在 yOz 面或 xOz 面上的投影的曲线方程：

$$\begin{cases} R(y,z)=0, \\ x=0, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} T(x,z)=0, \\ y=0. \end{cases}$$

例 4 已知两球面的方程为

$$x^2+y^2+z^2=1, \tag{5}$$

和

$$x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1, \tag{6}$$

求它们的交线 C 在 xOy 面上的投影方程.

解 先求包含交线 C 而母线平行于 z 轴的柱面方程. 因此要由方程(5)、(6)消去 z,为此可先从(5)式减去(6)式并化简,得到

$$y+z=1.$$

再以 $z=1-y$ 代入方程(5)或(6)即得所求的柱面方程为

$$x^2+2y^2-2y=0.$$

容易看出,这就是交线 C 关于 xOy 面的投影柱面方程,于是两球面的交线在 xOy 面上的投影方程是

$$\begin{cases} x^2+2y^2-2y=0, \\ z=0. \end{cases}$$

在重积分和曲面积分的计算中,往往需要确定一个立体或曲面在坐标面上的投影,这时要利用投影柱面和投影曲线.

例 5 设一个立体由上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和锥面 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 所围成(图 7-45),求它在 xOy 面上的投影.

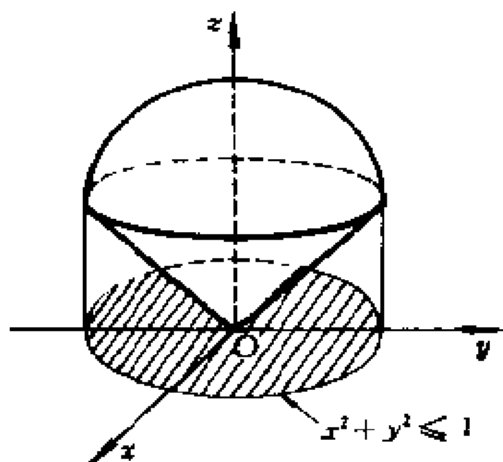


图 7-45

解 半球面和锥面的交线为

$$C:\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2}, & (7)\\ z=\sqrt{3(x^2+y^2)}. & (8)\end{cases}$$

由方程(7)、(8)消去 z，得到 $x^2+y^2=1$. 这是一个母线平行于 z 轴的圆柱面，容易看出，这恰好是交线 C 关于 xOy 面的投影柱面，因此交线 C 在 xOy 面上的投影曲线为

$$\begin{cases} x^2+y^2=1,\\ z=0.\end{cases}$$

这是 xOy 面上的一个圆，于是所求立体在 xOy 面上的投影，就是该圆在 xOy 面上所围的部分：$x^2+y^2\leqslant 1$.

习　题　7—6

1. 画出下列曲线在第一卦限内的图形：

(1) $\begin{cases} x=1,\\ y=2;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2},\\ x-y=0;\end{cases}$

(3) $\begin{cases} x^2+y^2=a^2,\\ x^2+z^2=a^2.\end{cases}$

2. 指出下列方程组在平面解析几何中与在空间解析几何中分别表示什么图形：

(1) $\begin{cases} y=5x+1,\\ y=2x-3;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1,\\ y=3.\end{cases}$

3. 分别求母线平行于 x 轴及 y 轴而且通过曲线 $\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=16,\\ x^2+z^2-y^2=0\end{cases}$ 的柱面方程.

4. 求球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与平面 $x+z=1$ 的交线在 xOy 面上的投影的方程.

5. 将下列曲线的一般方程化为参数方程：

(1) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9,\\ y=x\end{cases}$；　　(2) $\begin{cases} (x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4,\\ z=0.\end{cases}$

6. 求螺旋线 $\begin{cases} x=a\cos\theta,\\ y=a\sin\theta,\\ z=b\theta\end{cases}$

在三个坐标面上的投影曲线的直角坐标方程.

7. 求上半球 $0\leqslant z\leqslant\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 与圆柱体 $x^2+y^2\leqslant ax(a>0)$ 的公共部分在 xOy 面和 xOz 面上的投影.

8. 求旋转抛物面 $z=x^2+y^2(0\leqslant z\leqslant 4)$ 在三坐标面上的投影.

第七节 平面及其方程

在本节和下一节里，我们将以向量为工具，在空间直角坐标系中讨论最简单的曲面和曲线——平面和直线.

一、平面的点法式方程

如果一非零向量垂直于一平面，这向量就叫做该平面的法线向量. 容易知道，平面上的任一向量均与该平面的法线向量垂直.

因为过空间一点可以作而且只能作一平面垂直于一已知直线，所以当平面 Π 上一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 和它的一个法线向量 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$ 为已知时，平面 Π 的位置就完全确定了. 下面我们来建立平面 Π 的方程.

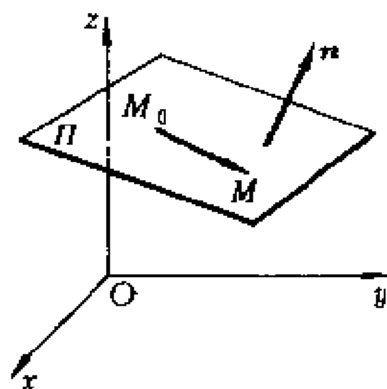


图 7-46

设 $M(x,y,z)$ 是平面 Π 上的任一点(图 7-46). 那末向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 必与平面 Π 的法线向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直，即它们的数量积等于零：

$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0.$$

由于 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$，$\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0,y-y_0,z-z_0\}$，所以有

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (1)$$

这就是平面 Π 上任一点 M 的坐标 x,y,z 所满足的方程.

反过来，如果 $M(x,y,z)$ 不在平面 Π 上，那末向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 与法线向量 $\boldsymbol{n}$ 不垂直，从而 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}\neq 0$，即不在平面 Π 上的点 M 的坐标 x,y,z 不满足方程(1).

由此可知，平面 Π 上的任一点的坐标 x,y,z 都满足方程(1)；不在平面 Π 上的点的坐标都不满足方程(1). 这样，方程(1)就是平面 Π 的方程，而平面 Π 就是方程(1)的图形. 由于方程(1)是由平面 Π 上的一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 及它的一个法线向量 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$ 确定的，所以方程(1)叫做平面的点法式方程.

例 1 求过点$(2,-3,0)$且以 $\boldsymbol{n}=\{1,-2,3\}$ 为法线向量的平面的方程.

解 根据平面的点法式方程(1)，得所求平面的方程为

$$(x-2)-2(y+3)+3z=0,$$

即

$$x-2y+3z-8=0.$$

例 2 求过三点 $M_1(2,-1,4)$、$M_2(-1,3,-2)$ 和 $M_3(0,2,3)$ 的平面的方程.

解 先找出这平面的法线向量 $\boldsymbol{n}$. 由于向量 $\boldsymbol{n}$ 与向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$、$\overrightarrow{M_1M_3}$ 都垂直，而 $\overrightarrow{M_1M_2}=\{-3,4,-6\}$，$\overrightarrow{M_1M_3}=\{-2,3,-1\}$. 所以可取它们的向量积为 $\boldsymbol{n}$：

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=14\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k},$$

根据平面的点法式方程(1)，得所求平面的方程为

$$14(x-2)+9(y+1)-(z-4)=0,$$

即

$$14x+9y-z-15=0.$$

二、平面的一般方程

由于平面的点法式方程(1)是 x、y、z 的一次方程，而任一平面都可以用它上面的一点及它的法线向量来确定，所以任一平面都可以用三元一次方程来表示.

反过来，设有三元一次方程

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{2}$$

我们任取满足该方程的一组数 x_0, y_0, z_0，即

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0. \tag{3}$$

把上述两等式相减，得

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \tag{4}$$

把它和平面的点法式方程(1)作比较，可以知道方程(4)是通过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 且以 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$ 为法线向量的平面方程. 但方程(2)与方程(4)同解，这是因为由(2)减去(3)即得(4)，又由(4)加上(3)就得(2). 由此可知，任一三元一次方程(2)的图形总是一个平面. 方程(2)称为平面的一般方程，其中 x、y、z 的系数就是该平面的一个法线向量 $\boldsymbol{n}$ 的坐标，即 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$.

例如，方程

$$3x-4y+z-9=0.$$

表示一个平面，$\boldsymbol{n}=\{3,-4,1\}$ 是这平面的一个法线向量.

对于一些特殊的三元一次方程，应该熟悉它们的图形的特点.

当 $D=0$ 时，方程(2)成为 $Ax+By+Cz=0$，它表示一个通过原点的平面.

当 $A=0$ 时，方程(2)成为 $By+Cz+D=0$，法线向量 $\boldsymbol{n}=\{0,B,C\}$ 垂直于 x 轴，方程表示一个平行于 x 轴的平面.

同样，方程 $Ax+Cz+D=0$ 和 $Ax+By+D=0$，分别表示一个平行于 y 轴和 z 轴的平面.

当 $A=B=0$ 时，方程(2)成为 $Cz+D=0$ 或 $z=-\dfrac{D}{C}$，法线向量 $\boldsymbol{n}=\{0,0,C\}$ 同时垂直 x 轴和 y 轴，方程表示一个平行于 xOy 面的平面.

同样，方程 $Ax+D=0$ 和 $By+D=0$ 分别表示一个平行于 yOz 面和 xOz 面的平面.

例 3 求通过 x 轴和点 $(4,-3,-1)$ 的平面的方程.

解 由于平面通过 x 轴，从而它的法线向量垂直于 x 轴，于是法线向量在 x 轴上的投影为零，即 $A=0$；又由平面通过 x 轴，它

必通过原点，于是 $D=0$. 因此可设这平面的方程为

$$By+Cz=0.$$

又因这平面通过点(4，−3，−1)，所以有

$$-3B-C=0,$$

或
$$C=-3B.$$

以此代入所设方程并除以 $B(B\neq 0)$，便得所求的平面方程为

$$y-3z=0.$$

例 4 设一平面与 x、y、z 轴的交点依次为 $P(a,0,0)$、$Q(0,b,0)$、$R(0,0,c)$三点(图 7—47)，求这平面的方程(其中 $a\neq 0,b\neq 0,c\neq 0$).

解 设所求平面的方程为

$$Ax+By+Cz+D=0. \qquad (2)$$

因 $P(a,0,0)$、$Q(0,b,0)$、$R(0,0,c)$三点都在这平面上，所以点 P、Q、R 的坐标都满足方程(2)；即有

$$\begin{cases} aA+D=0, \\ bB+D=0, \\ cC+D=0, \end{cases}$$

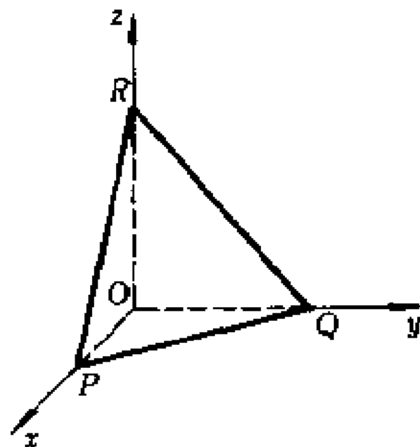


图 7—47

得 $A=-\dfrac{D}{a},B=-\dfrac{D}{b},C=-\dfrac{D}{c}$.

以此代人(2)并除以 $D(D\neq 0)$，便得所求的平面方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \qquad (5)$$

方程(5)叫做平面的截距式方程，而 a、b、c 依次叫做平面在 x、y、z 轴上的截距.

三、两平面的夹角

两平面的法线向量的夹角(通常指锐角)称为两平面的夹角.

设平面 Π_1 和 Π_2 的法线向量依次为 $\boldsymbol{n}_1=\{A_1,B_1,C_1\}$ 和 $\boldsymbol{n}_2=$

$\{A_2, B_2, C_2\}$，那末平面 Π_1 和 Π_2 的夹角 θ（图 7－48）应是 $(\widehat{\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2})$ 和 $(\widehat{-\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2}) = \pi - (\widehat{\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2})$ 两者中的锐角，因此，$\cos\theta = |\cos(\widehat{\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2})|$. 按两向量夹角余弦的坐标表示式，平面 Π_1 和平面 Π_2 的夹角 θ 可由

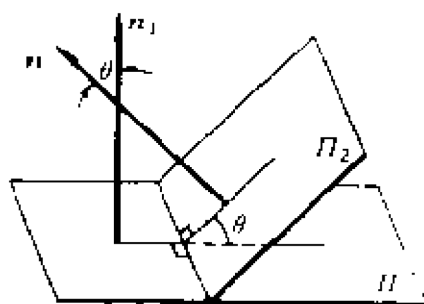


图 7－48

$$\cos\theta = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \tag{6}$$

来确定.

从两向量垂直、平行的充分必要条件立即推得下列结论：

Π_1、Π_2 互相垂直相当于 $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$；

Π_1、Π_2 互相平行或重合相当于 $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

例 5 求两平面 $x - y + 2z - 6 = 0$ 和 $2x + y + z - 5 = 0$ 的夹角.

解 由公式(6)有

$$\cos\theta = \frac{|1\times 2 + (-1)\times 1 + 2\times 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{2},$$

因此，所求夹角 $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

例 6 一平面通过两点 $M_1(1,1,1)$ 和 $M_2(0,1,-1)$ 且垂直于平面 $x + y + z = 0$，求它的方程.

解 设所求平面的一个法线向量为

$$\boldsymbol{n} = \{A, B, C\}.$$

因 $\overrightarrow{M_1M_2} = \{-1, 0, -2\}$ 在所求平面上，它必与 $\boldsymbol{n}$ 垂直，所以有

$$-A - 2C = 0. \tag{7}$$

又因所求的平面垂直于已知平面 $x + y + z = 0$，所以又有

$$A+B+C=0. \tag{8}$$

由(7)、(8)得到

$$A=-2C,$$

$$B=C.$$

由平面的点法式方程可知，所求平面方程为

$$A(x-1)+B(y-1)+C(z-1)=0.$$

将 $A=-2C$ 及 $B=C$ 代入上式，并约去 $C(C\neq0)$，便得

$$-2(x-1)+(y-1)+(z-1)=0.$$

或

$$2x-y-z=0.$$

这就是所求的平面方程.

例 7 设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$是平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 外一点，求 P_0 到这平面的距离(图 7—49).

解 在平面上任取一点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，并作一法线向量 $\boldsymbol{n}$，由图 7—49，并考虑到$\overrightarrow{P_1P_0}$与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角也可能是钝角，得所求的距离

$$d=|\text{Prj}_{\boldsymbol{n}}\overrightarrow{P_1P_0}|.$$

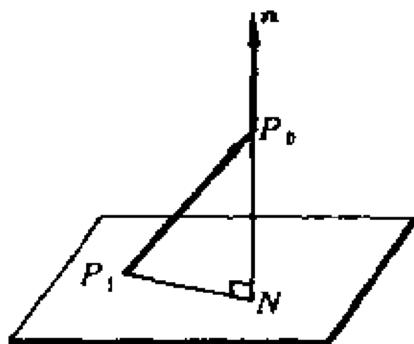


图 7—49

设 $\boldsymbol{n}^\circ$为与向量 $\boldsymbol{n}$ 方向一致的单位向量，那末有

$$\text{Prj}_{\boldsymbol{n}}\overrightarrow{P_1P_0}=\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\boldsymbol{n}^\circ,$$

而

$$\boldsymbol{n}^\circ=\left\{\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right\},$$

$$\overrightarrow{P_1P_0}=\{x_0-x_1,y_0-y_1,z_0-z_1\},$$

所以

$$\text{Prj}_{\boldsymbol{n}}\overrightarrow{P_1P_0}=\frac{A(x_0-x_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}+\frac{B(y_0-y_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}+\frac{C(z_0-z_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$=\frac{Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax_1+By_1+Cz_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

由于 $$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0,$$

所以 $$\mathrm{Prj}_n\,\overrightarrow{P_1P_0}=\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

由此得点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离公式：

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{9}$$

例如，求点(2,1,1)到平面 $x+y-z+1=0$ 的距离，可利用公式(9)，便得

$$d=\frac{|1\times2+1\times1-1\times1+1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}.$$

习 题 7—7

1. 求过点(3,0,−1)且与平面 $3x-7y+5z-12=0$ 平行的平面方程.

2. 求过点 $M_0(2,9,-6)$ 且与连接坐标原点及点 M_0 的线段 OM_0 垂直的平面方程.

3. 求过(1,1,−1)、(−2,−2,2)和(1,−1,2)三点的平面方程.

4. 指出下列各平面的特殊位置，并画出各平面：

(1) $x=0$； (2) $3y-1=0$；

(3) $2x-3y-6=0$； (4) $x-\sqrt{3}\,y=0$；

(5) $y+z=1$； (6) $x-2z=0$；

(7) $6x+5y-z=0$.

5. 求平面 $2x-2y+z+5=0$ 与各坐标面的夹角的余弦.

6. 一平面过点(1,0,−1)且平行于向量 $\boldsymbol{a}=\{2,1,1\}$ 和 $\boldsymbol{b}=\{1,-1,0\}$，试求这平面方程.

7. 求三平面 $x+3y+z=1$，$2x-y-z=0$，$-x+2y+2z=3$ 的交点.

8. 分别按下列条件求平面方程：

(1) 平行于 xOz 面且经过点(2,−5,3)；

(2) 通过 z 轴和点(−3,1,−2)；

(3) 平行于 x 轴且经过两点(4,0, 2)和(5,1,7).

9. 求点(1,2,1)到平面 $x+2y+2z-10=0$ 的距离.

第八节　空间直线及其方程

一、空间直线的一般方程

空间直线 L 可以看作是两个平面 Π_1 和 Π_2 的交线(图 7—50). 如果两个相交的平面 Π_1 和 Π_2 的方程分别为 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 和 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$,那末直线 L 上的任一点的坐标应同时满足这两个平面的方程,即应满足方程组

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.\end{cases}\tag{1}$$

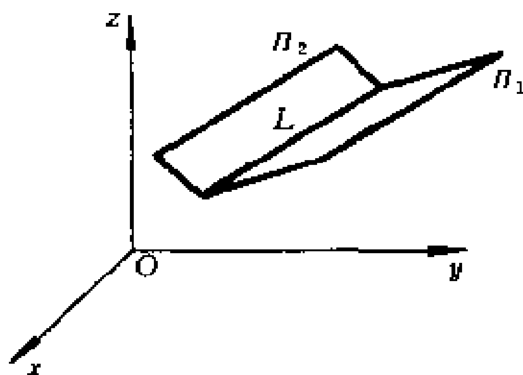


图　7—50

反过来,如果点 M 不在直线 L 上,那末它不可能同时在平面 Π_1 和 Π_2 上,所以它的坐标不满足方程组(1). 因此,直线 L 可以用方程组(1)来表示. 方程组(1)叫做空间直线的一般方程.

通过空间一直线 L 的平面有无限多个,只要在这无限多个平面中任意选取两个,把它们的方程联立起来,所得的方程组就表示空间直线 L.

二、空间直线的对称式方程与参数方程

如果一个非零向量平行于一条已知直线,这个向量就叫做这

条直线的方向向量. 容易知道,直线上任一向量都平行于该直线的方向向量.

由于过空间一点可作而且只能作一条直线平行于一已知直线,所以当直线 L 上一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 和它的一方向向量 $s=\{m,n,p\}$ 为已知时,直线 L 的位置就完全确定了. 下面我们来建立这直线的方程.

设点 $M(x,y,z)$ 是直线 L 上的任一点,那末向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 L 的方向向量 s 平行(图 7—51). 所以两向量的对应坐标成比例,由于 $\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0,y-y_0,z-z_0\}$, $s=\{m,n,p\}$,从而有

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}. \text{①} \tag{2}$$

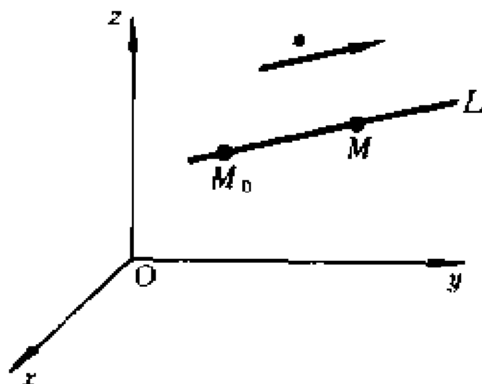


图 7—51

反过来,如果点 M 不在直线 L 上,那末由于 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 s 不平行,这两向量的对应坐标就不成比例. 因此方程组(2)就是直线 L 的方程,叫做直线的对称式方程或点向式方程.

直线的任一方向向量 s 的坐标 m、n、p 叫做这直线的一组方

---

① 当 m,n,p 中有一个为零,例如 $m=0$,而 n、$p\neq0$ 时,这方程组应理解为

$$\begin{cases} x-x_0=0, \\ \dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}; \end{cases}$$

当 m,n,p 中有两个为零,例如 $m=n=0$,而 $p\neq0$ 时,这方程组应理解为

$$\begin{cases} x-x_0=0, \\ y-y_0=0. \end{cases}$$

向数，而向量 s 的方向余弦叫做该直线的方向余弦.

由直线的对称式方程容易导出直线的参数方程. 如设

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t,$$

那末

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt. \end{cases} \tag{3}$$

方程组(3)就是直线的参数方程.

例 1 用对称式方程及参数方程表示直线

$$\begin{cases} x+y+z+1=0, \\ 2x-y+3z+4=0. \end{cases} \tag{4}$$

解 先找出这直线上的一点 (x_0,y_0,z_0). 例如，可以取 $x_0=1$，代入方程组(4)，得

$$\begin{cases} y+z=-2, \\ y-3z=6. \end{cases}$$

解这个二元一次方程组，得

$$y_0=0,\ z_0=-2,$$

即(1,0,−2)是这直线上的一点.

下面再找出这直线的方向向量 s. 由于两平面的交线与这两平面的法线向量 $n_1=\{1,1,1\}$，$n_2=\{2,-1,3\}$ 都垂直，所以可取

$$s=n_1\times n_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=4i-j-3k.$$

因此，所给直线的对称式方程为

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{-3}.$$

令

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{-3}=t,$$

得所给直线的参数方程为

$$\begin{cases} x=1+4t, \\ y=-t, \\ z=-2-3t. \end{cases}$$

三、两直线的夹角

两直线的方向向量的夹角(通常指锐角)叫做两直线的夹角.

设直线 L_1 和 L_2 的方向向量依次为 $s_1=\{m_1,n_1,p_1\}$ 和 $s_2=\{m_2,n_2,p_2\}$,那末 L_1 和 L_2 的夹角 φ 应是 $(\widehat{s_1,s_2})$ 和 $(\widehat{-s_1,s_2})=\pi-(\widehat{s_1,s_2})$ 两者中的锐角,因此 $\cos\varphi=|\cos(\widehat{s_1,s_2})|$. 按两向量的夹角的余弦公式,直线 L_1 和直线 L_2 的夹角 φ 可由

$$\cos\varphi=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}} \tag{5}$$

来确定.

从两向量垂直、平行的充分必要条件立即推得下列结论:

两直线 L_1、L_2 互相垂直相当于 $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$;

两直线 L_1、L_2 互相平行或重合相当于 $\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$.

例 2 求直线 L_1:$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-4}=\frac{z+3}{1}$ 和 L_2:$\frac{x}{2}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{-1}$ 的夹角.

解 直线 L_1 的方向向量为 $s_1=\{1,-4,1\}$;直线 L_2 的方向向量为 $s_2=\{2,-2,-1\}$. 设直线 L_1 和 L_2 的夹角为 φ,那末由公式(5)有

$$\cos\varphi=\frac{|1\times2+(-4)\times(-2)+1\times(-1)|}{\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以 $$\varphi=\frac{\pi}{4}.$$

四、直线与平面的夹角

当直线与平面不垂直时，直线和它在平面上的投影直线的夹角 $\varphi(0\leqslant\varphi<\frac{\pi}{2})$ 称为直线与平面的夹角（图 7—52），当直线与平面垂直时，规定直线与平面的夹角为 $\frac{\pi}{2}$.

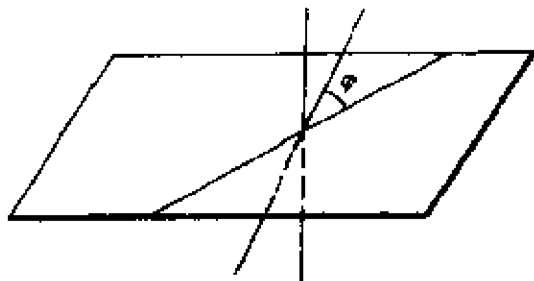


图 7—52

设直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}=\{m,n,p\}$，平面的法线向量为 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$，直线与平面的夹角为 φ，那末 $\varphi=\left|\frac{\pi}{2}-(\widehat{\boldsymbol{s},\boldsymbol{n}})\right|$，因此 $\sin\varphi=|\cos(\widehat{\boldsymbol{s},\boldsymbol{n}})|$. 按两向量夹角余弦的坐标表示式，有

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \tag{6}$$

因为直线与平面垂直相当于直线的方向向量与平面的法线向量平行，所以，直线与平面垂直相当于

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}. \tag{7}$$

因为直线与平面平行或直线在平面上相当于直线的方向向量与平面的法线向量垂直，所以，直线与平面平行或直线在平面上相当于

$$Am+Bn+Cp=0. \tag{8}$$

例 3 求过点 $(1,-2,4)$ 且与平面 $2x-3y+z-4=0$ 垂直的直线的方程.

解 因为所求直线垂直于已知平面，所以可以取已知平面的

法线向量$\{2,-3,1\}$作为所求直线的方向向量. 由此可得所求直线的方程为

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-4}{1}.$$

五、杂例

例 4 求与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行且过点$(-3,2,5)$的直线的方程.

解 因为所求直线与两平面的交线平行,也就是直线的方向向量 $\boldsymbol{s}$ 一定同时与两平面的法线向量 $\boldsymbol{n}_1$、$\boldsymbol{n}_2$ 垂直,所以可以取

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 0 & -4\\ 2 & -1 & -5\end{vmatrix}=-(4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}),$$

因此所求直线的方程为

$$\frac{x+3}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-5}{1}.$$

例 5 求直线$\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}$与平面 $2x+y+z-6=0$ 的交点.

解 所给直线的参数方程为

$$x=2+t,\ y=3+t,\ z=4+2t,$$

代入平面方程中,得

$$2(2+t)+(3+t)+(4+2t)-6=0.$$

解上列方程,得 $t=-1$. 把求得的 t 值代入直线的参数方程中,即得所求交点的坐标为

$$x=1,\ y=2,\ z=2.$$

例 6 求过点$(2,1,3)$且与直线$\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$垂直相交的直线的方程.

解 先作一平面过点$(2,1,3)$且垂直于已知直线,那末这平面的方程应为

$$3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0. \tag{9}$$

再求已知直线与这平面的交点. 已知直线的参数方程为

$$x=-1+3t,\ y=1+2t,\ z=-t. \tag{10}$$

把(10)代入(9)中,求得 $t=\dfrac{3}{7}$,从而求得交点为$\left(\dfrac{2}{7},\dfrac{13}{7},-\dfrac{3}{7}\right)$.

以点(2,1,3)为起点,点$\left(\dfrac{2}{7},\dfrac{13}{7},-\dfrac{3}{7}\right)$为终点的向量

$$\left\{\frac{2}{7}-2,\frac{13}{7}-1,-\frac{3}{7}-3\right\}=-\frac{6}{7}\{2,-1,4\}$$

是所求直线的一个方向向量,故所求直线的方程为

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}.$$

有时用平面束的方程解题比较方便,现在我们来介绍它的方程.

设直线 L 由方程组

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, & (11)\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 & (12)\end{cases}$$

所确定,其中系数 A_1、B_1、C_1 与 A_2、B_2、C_2 不成比例. 我们建立三元一次方程:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0, \tag{13}$$

其中 λ 为任意常数. 因为 A_1、B_1、C_1 与 A_2、B_2、C_2 不成比例,所以对于任何一个 λ 值,方程(13)的系数:$A_1+\lambda A_2$、$B_1+\lambda B_2$、$C_1+\lambda C_2$ 不全为零,从而方程(13)表示一个平面,若一点在直线 L 上,则点的坐标必同时满足方程(11)和(12),因而也满足方程(13),故方程(13)表示通过直线 L 的平面,且对应于不同的 λ 值,方程(13)表示通过直线 L 的不同的平面. 反之,通过直线 L 的任何平面(除平面(12)外)都包含在方程(13)所表示的一族平面内. 通过定直线的所有平面的全体称为**平面束**,而方程(13)就作为通过直线 L 的**平面束的方程**(实际上,方程(13)表示缺少一个平面的平面束).

例 7 求直线$\begin{cases}x+y-z-1=0,\\ x-y+z+1=0\end{cases}$ 在平面 $x+y+z=0$ 上的投

影直线的方程.

解 设过直线 $\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ 的平面束的方程为

$$(x+y-z-1)+\lambda(x-y+z+1)=0,$$

即

$$(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(-1+\lambda)z+(-1+\lambda)=0, \qquad (14)$$

其中 λ 为待定常数. 这平面与平面 $x+y+z=0$ 垂直的条件是

$$(1+\lambda)\cdot 1+(1-\lambda)\cdot 1+(-1+\lambda)\cdot 1=0,$$

即
$$\lambda+1=0,$$

由此得
$$\lambda=-1.$$

代入(14)式，得投影平面的方程为

$$2y-2z-2=0,$$

即
$$y-z-1=0.$$

所以投影直线的方程为

$$\begin{cases} y-z-1=0, \\ x+y+z=0. \end{cases}$$

习 题 7-8

1. 求过点(4,-1,3)且平行于直线 $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{5}$ 的直线方程.

2. 求过两点 $M_1(3,-2,1)$ 和 $M_2(-1,0,2)$ 的直线方程.

3. 用对称式方程及参数方程表示直线

$$\begin{cases} x-y+z=1, \\ 2x+y+z=4. \end{cases}$$

4. 求过点(2,0,-3)且与直线

$$\begin{cases} x-2y+4z-7=0, \\ 3x+5y-2z+1=0 \end{cases}$$

垂直的平面方程.

5. 求直线 $\begin{cases} 5x-3y+3z-9=0, \\ 3x-2y+z-1=0 \end{cases}$ 与直线 $\begin{cases} 2x+2y-z+23=0, \\ 3x+8y+z-18=0 \end{cases}$ 的夹角的余弦.

6. 证明直线 $\begin{cases} x+2y-z=7, \\ -2x-y+z=7 \end{cases}$ 与直线 $\begin{cases} 3x+6y-3z=8, \\ 2x-y-z=0 \end{cases}$ 平行.

7. 求过点$(0,2,4)$且与两平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 平行的直线方程.

8. 求过点$(3,1,-2)$且通过直线$\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$的平面方程.

9. 求直线 $\begin{cases} x+y+3z=0, \\ x-y-z=0 \end{cases}$ 与平面 $x-y-z+1=0$ 的夹角.

10. 试确定下列各组中的直线和平面间的关系：

(1) $\frac{x+3}{-2}=\frac{y+4}{-7}=\frac{z}{3}$ 和 $4x-2y-2z=3$；

(2) $\frac{x}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{7}$ 和 $3x-2y+7z=8$；

(3) $\frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{-4}$ 和 $x+y+z=3$.

11. 求过点$(1,2,1)$而与两直线

$$\begin{cases} x+2y-z+1=0, \\ x-y+z-1=0 \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} 2x-y+z=0, \\ x-y+z=0 \end{cases}$$

平行的平面的方程.

12. 求点$(-1,2,0)$在平面 $x+2y-z+1=0$ 上的投影.

13. 求点 $P(3,-1,2)$到直线 $\begin{cases} x+y-z+1=0, \\ 2x-y+z-4=0 \end{cases}$ 的距离.

14. 设 M_0 是直线 L 外一点，M 是直线 L 上任意一点，且直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}$，试证：点 M_0 到直线 L 的距离

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M}\times\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}.$$

15. 求直线 $\begin{cases} 2x-4y+z=0, \\ 3x-y-2z-9=0 \end{cases}$ 在平面 $4x-y+z=1$ 上的投影直线的方程.

第九节 二次曲面

与平面解析几何中规定的二次曲线相类似，我们把三元二次方程所表示的曲面叫做二次曲面．而把平面叫做一次曲面．

怎样了解三元方程 $F(x,y,z)=0$ 所表示的曲面的形状呢？方法之一是用坐标面和平行于坐标面的平面与曲面相截，考察其交线（即截痕）的形状，然后加以综合，从而了解曲面的全貌．这种方

法叫做截痕法.

下面我们利用截痕法来讨论几个特殊的二次曲面.

一、椭球面

由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{1}$$

所表示的曲面叫做椭球面.

由方程(1)可知

$$\frac{x^2}{a^2}\leqslant 1,\ \frac{y^2}{b^2}\leqslant 1,\ \frac{z^2}{c^2}\leqslant 1,$$

即 $|x|\leqslant a,\ |y|\leqslant b,\ |z|\leqslant c.$

这说明椭球面(1)完全包含在一个以原点 O 为中心的长方体内，这长方体的六个面的方程为 $x=\pm a, y=\pm b, z=\pm c$. $a、b、c$ 叫做椭球面的半轴.

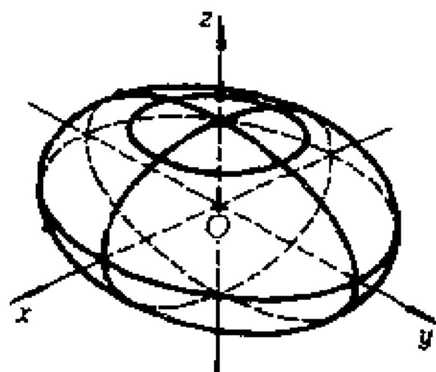


图 7—53

为了要知道这一曲面的形状，我们先求出它与三个坐标面的交线

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0;\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0;\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0.\end{cases}$$

这些交线都是椭圆.

再看这曲面与平行于 xOy 面的平面 $z=z_1$ ($|z_1|<c$)的交线

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{\dfrac{a^2}{c^2}(c^2-z_1^2)}+\dfrac{y^2}{\dfrac{b^2}{c^2}(c^2-z_1^2)}=1,\\ z=z_1,\end{cases}$$

这是平面 $z=z_1$ 内的椭圆，它的两个半轴分别等于 $\frac{a}{c}\sqrt{c^2-z_1^2}$ 与

$\frac{b}{c}\sqrt{c^2-z_1^2}$. 当 z_1 变动时，这种椭圆的中心都在 z 轴上. 当 $|z_1|$ 由 0 逐渐增大到 c，椭圆截面由大到小，最后缩成一点.

以平面 $y=y_1(|y_1|\leqslant b)$，或 $x=x_1(|x_1|\leqslant a)$ 去截椭球面，分别可得与上述类似的结果.

综合上面的讨论，可知椭球面(1)的形状如图 7－53 所示.

如果 $a=b$，那末方程(1)变为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

由第七节关于旋转曲面的内容可知，这方程表示一个由 xOz 平面上的椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

绕 z 轴旋转而成的旋转曲面，叫做旋转椭球面. 它与一般的椭球面不同之处在于，如用平面 $z=z_1(|z_1|\leqslant c)$ 与旋转椭球面相截，所得的截痕是圆心在 z 轴上的圆：

$$\begin{cases}x^2+y^2=\dfrac{a^2}{c^2}(c^2-z_1^2),\\ z=z_1,\end{cases}$$

其半径为 $\frac{a}{c}\sqrt{c^2-z_1^2}$.

如果 $a=b=c$，那末方程(1)变为

$$x^2+y^2+z^2=a^2.$$

这方程表示一个球心在原点 O、半径为 a 的球面. 所以，我们可以说球面是椭球面的一种特殊情形.

二、抛物面

由方程

$$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z \quad (p\text{ 与 }q\text{ 同号}) \tag{2}$$

所表示的曲面叫做椭圆抛物面. 设 $p>0,q>0$,我们用截痕法来考察它的形状.

(1) 用坐标面 $xOy(z=0)$ 与这曲面相截,截得一点为原点(0,0,0). 用平面 $z=z_1(z_1>0)$ 截这曲面所得截痕为中心在 z 轴上的椭圆

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{2pz_1}+\dfrac{y^2}{2qz_1}=1,\\ z=z_1,\end{cases}$$

它的两个半轴分别为 $\sqrt{2pz_1}$ 及 $\sqrt{2qz_1}$. 当 z_1 变动时,这种椭圆的中心都在 z 轴上. 平面 $z=z_1(z_1<0)$ 与这曲面不相交,原点叫做这椭圆抛物面的顶点.

(2) 用坐标面 $xOz(y=0)$ 截这曲面所得截痕为抛物线

$$\begin{cases}x^2=2pz,\\ y=0,\end{cases}$$

它的轴与 z 轴相合. 用平面 $y=y_1$ 截这曲面所得截痕为抛物线

$$\begin{cases}x^2=2p\left(z-\dfrac{y_1^2}{2q}\right),\\ y=y_1,\end{cases}$$

它的轴平行于 z 轴,顶点为 $\left(0,y_1,\dfrac{y_1{}^2}{2q}\right)$.

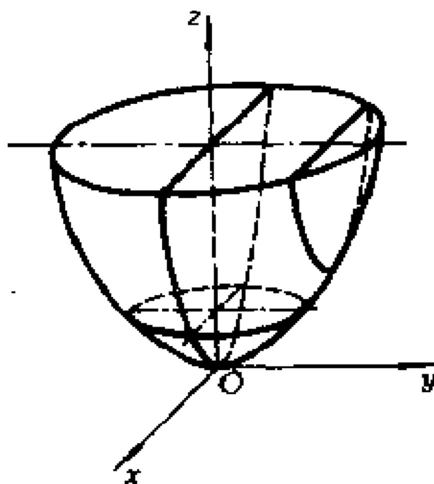


图 7—54

(3) 同理可知，用坐标面 $yOz(x=0)$ 及与其平行的平面 $x=x_1$ 截这曲面的截痕也是抛物线.

综上所述，可知椭圆抛物面(2)的形状如图 7—54 所示.

如果 $p=q$，那末方程(2)变为

$$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2p}=z \quad (p>0).$$

这方程可看成是由 xOz 平面上的抛物线 $x^2=2pz$ 绕它的轴旋转而成的旋转曲面，这曲面叫做旋转抛物面. 它被平行于 xOy 面的平面

$$z=z_1 \quad (z_1>0)$$

所截得的截痕是圆

$$\begin{cases} x^2+y^2=2pz_1, \\ z=z_1, \end{cases}$$

当 z_1 变动时，这种圆的圆心都在 z 轴上.

由方程 $$-\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z \quad (p\text{ 与 }q\text{ 同号})$$

所表示的曲面叫做双曲抛物面或鞍形曲面. 读者可用截痕法对它进行讨论. 当 $p>0, q>0$ 时，它的形状如图 7—55 所示.

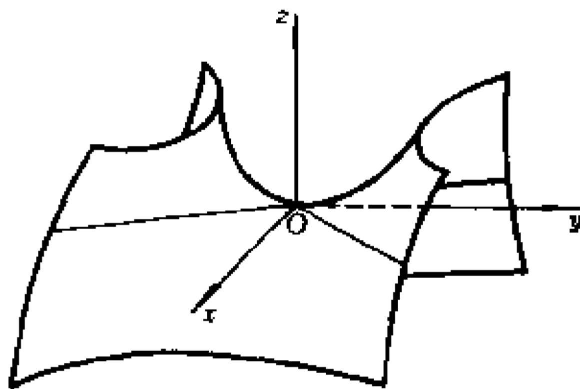


图 7—55

三、双曲面

由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{3}$$

所表示的曲面叫做单叶双曲面.我们也来用截痕法考察它的形状.

(1) 用平面 $xOy(z=0)$ 截曲面(3)所得截痕为中心在原点 O 的椭圆

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0,\end{cases}$$

它的两个半轴分别为 a 及 b. 用平行于平面 $z=0$ 的平面 $z=z_1$ 截曲面(3)所得截痕是中心在 z 轴上的椭圆

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{z_1^2}{c^2},\\ z=z_1,\end{cases}$$

它的两个半轴分别为 $\frac{a}{c}\sqrt{c^2+z_1^2}$ 及 $\frac{b}{c}\sqrt{c^2+z_1^2}$.

(2) 用平面 $xOz(y=0)$ 截曲面(3)所得截痕为中心在原点 O 的双曲线

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0,\end{cases}$$

它的实轴与 x 轴相合,虚轴与 z 轴相合.平行于平面 $y=0$ 的平面 $y=y_1(y_1\neq\pm b)$ 截曲面(3)所得截痕是中心在 y 轴上的双曲线

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{y_1^2}{b^2},\\ y=y_1,\end{cases}$$

它的两个半轴的平方为 $\frac{a^2}{b^2}|b^2-y_1^2|$ 及 $\frac{c^2}{b^2}|b^2-y_1^2|$.

如果 $y_1^2<b^2$,那末双曲线的实轴平行于 x 轴,虚轴平行于 z

轴.

如果 $y_1^2>b^2$,那末双曲线的实轴平行于 z 轴,虚轴平行于 x 轴.

如果 $y_1=b$,那末平面 $y=b$ 截曲面(3)所得截痕为一对相交于点$(0,b,0)$的直线,它们的方程为

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=0,\\ y=b\end{cases}\quad 和 \quad \begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=0,\\ y=b.\end{cases}$$

如果 $y_1=-b$,那末平面 $y=-b$ 截曲面(3)所得截痕为一对相交于点$(0,-b,0)$的直线,它们的方程为

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=0,\\ y=-b\end{cases}\quad 和 \quad \begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=0,\\ y=-b.\end{cases}$$

(3) 类似地,用平面 $yOz(x=0)$和平行于平面 yOz 的平面截曲面所得截痕也是双曲线,两平面 $x=\pm a$ 截曲面(3)所得截痕是两对相交的直线.

综上所述,可知单叶双曲面(3)的形状如图 7—56 所示.

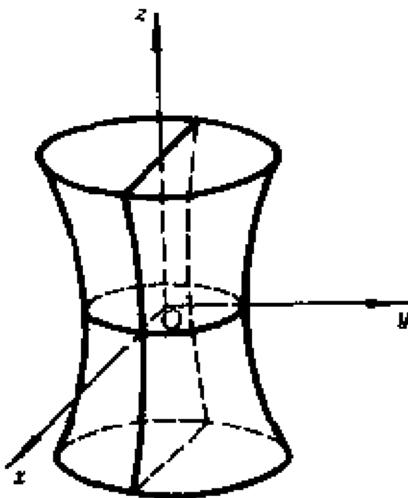


图 7 56

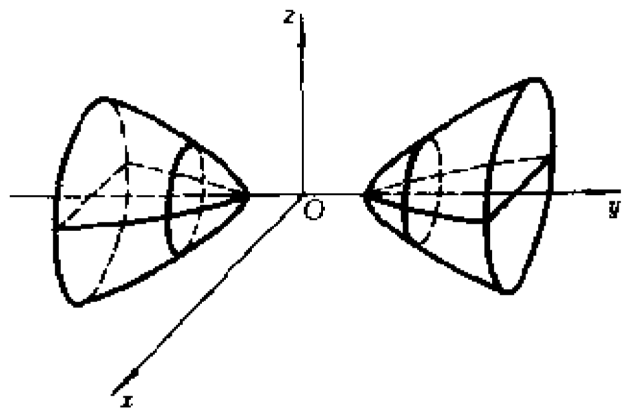


图 7—57

由方程
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$
所表示的曲面叫做双叶双曲面.读者可用截痕法对它进行讨论.它

的形状如图 7—57 所示.

习　题　7－9

1. 画出下列方程所表示的曲面:

(1) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+z^2=1$;　　(2) $\frac{z}{3}=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$;

(3) $16x^2+4y^2-z^2=64$.

2. 求曲线 $\begin{cases} y^2+z^2-2x=0, \\ z=3 \end{cases}$ 在 xOy 面上的投影曲线的方程,并指出原曲线是什么曲线.

3. 指出下列方程所表示的曲线:

(1) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=25, \\ x=3; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x^2+4y^2+9z^2=36, \\ y=1; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x^2-4y^2+z^2=25, \\ x=-3; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} y^2+z^2-4x+8=0, \\ y=4; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} \frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1, \\ x-2=0. \end{cases}$

4. 画出下列各曲面所围成的立体的图形:

(1) $x=0, y=0, z=0, x=2, y=1, 3x+4y+2z-12=0$;

(2) $x=0, z=0, x=1, y=2, z=\frac{y}{4}$;

(3) $z=0, z=3, x-y=0, x-\sqrt{3}y=0, x^2+y^2=1$(在第一卦限内);

(4) $x=0, y=0, z=0, x^2+y^2=R^2, y^2+z^2=R^2$(在第一卦限内).

总 习 题 七

1. 在 y 轴上求与点 $A(1,-3,7)$ 和点 $B(5,7,-5)$ 等距离的点.

2. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点为 $A(3,2,-1)$、$B(5,-4,7)$ 和 $C(-1,1,2)$,求从顶点 C 所引中线的长度.

3. 设 $\triangle ABC$ 的三边 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$、$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$、$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$,三边中点依次为 D、E、F,试用向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 表示 $\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{BE}$、$\overrightarrow{CF}$,并证明

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\boldsymbol{0}.$$

4. 试用向量证明三角形两边中点的连线平行于第三边,且其长度等于

第三边长度的一半.

5. 在边长为1的立方体中,OM 为对角线,OA 为棱,求$\overrightarrow{OM}$在$\overrightarrow{OA}$上的投影及$\overrightarrow{OA}$在$\overrightarrow{OM}$上的投影.

6. 设$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$,$\boldsymbol{a}=\{3,-5,8\}$,$\boldsymbol{b}=\{-1,1,z\}$,求 z.

7. 设$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}$,$|\boldsymbol{b}|=1$,$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{6}$,求向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角.

8. 设 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}\perp 7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}\perp 7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$,求$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

9. 设 $\boldsymbol{a}=\{2,-1,-2\}$,$\boldsymbol{b}=\{1,1,z\}$,问 z 为何值时$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$最小?并求出此最小值.

10. 设$|\boldsymbol{a}|=4$,$|\boldsymbol{b}|=3$,$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{6}$,求以 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的面积.

11. 设 $\boldsymbol{a}=\{2,-3,1\}$, $\boldsymbol{b}=\{1,-2,3\}$, $\boldsymbol{c}=\{2,1,2\}$,向量 $\boldsymbol{r}$ 满足 $\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{b}$,$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{r}=14$,求 $\boldsymbol{r}$.

12. 设 $\boldsymbol{a}=\{-1,3,2\}$,$\boldsymbol{b}=\{2,-3,-4\}$,$\boldsymbol{c}=\{-3,12,6\}$,证明三向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面,并用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示 $\boldsymbol{c}$.

13. 已知动点 $M(x,y,z)$到 xOy 平面的距离与点 M 到点$(1,-1,2)$的距离相等,求点 M 的轨迹的方程.

14. 指出下列旋转曲面的一条母线和旋转轴:

(1) $z=2(x^2+y^2)$;　　　　(2) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{36}=1$;

(3) $z^2=3(x^2+y^2)$;　　　　(4) $x^2-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{4}=1$.

15. 求通过点 $A(3,0,0)$和 $B(0,0,1)$且与 xOy 面成$\frac{\pi}{3}$角的平面的方程.

16. 设一平面垂直于平面 $z=0$,并通过从点$(1,-1,1)$到直线 $\begin{cases} y-z+1=0 \\ x=0 \end{cases}$ 的垂线,求此平面的方程.

17. 求过点$(-1,0,4)$,且平行于平面 $3x-4y+z-10=0$,又与直线 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$相交的直线的方程.

18. 已知点 $A(1,0,0)$及点 $B(0,2,1)$,试在 z 轴上求一点 C,使$\triangle ABC$ 的面积最小.

19. 求曲线 $\begin{cases} z=2-x^2-y^2, \\ z=(x-1)^2+(y-1)^2 \end{cases}$ 在三个坐标面上的投影曲线的方程.

20. 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与柱面 $z^2=2x$ 所围立体在三个坐标面上的投影.

21. 画出下列各曲面所围立体的图形:

(1) 抛物柱面 $2y^2=x$, 平面 $z=0$ 及 $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1$;

(2) 抛物柱面 $x^2=1-z$, 平面 $y=0$, $z=0$ 及 $x+y=1$;

(3) 圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及旋转抛物面 $z=2-x^2-y^2$;

(4) 旋转抛物面 $x^2+y^2=z$, 柱面 $y^2=x$, 平面 $z=0$ 及 $x=1$.

附录Ⅰ　二阶和三阶行列式简介

给出二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2, \end{cases} \tag{1}$$

求这方程组的解.

用大家熟知的消元法,分别消去方程组(1)中的 x_2 及 x_1,得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2, \\ (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}. \end{cases} \tag{2}$$

下面引入二阶行列式,然后利用二阶行列式来进一步讨论上述问题.

设已知四个数排成正方形表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

则数 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为对应于这个表的二阶行列式,用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{3}$$

表示,因此

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

数 $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ 叫做行列式(3)的元素,横排叫做行,竖排叫做列.元素 a_{ij} 中的第一个指标 i 和第二个指标 j,依次表示行数和列数.例如,元素 a_{21} 在行列式(3)中位于第二行和第一列.

现在,方程组(2)可利用行列式来表示.设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21},$$

则方程组(2)可写成

$$\begin{cases} Dx_1=D_1, \\ Dx_2=D_2. \end{cases} \tag{2'}$$

我们注意到，D 就是方程组(1)中 x_1 及 x_2 的系数构成的行列式，因此称为系数行列式，而 D_1 和 D_2 分别是用方程组(1)右端的常数项代替 D 的第一列和第二列而形成的.

若 $D\neq0$，则方程组(2)的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}. \tag{4}$$

把(4)中 x_1 及 x_2 的值代入方程组(1)，便可证实 x_1 及 x_2 的这对值也是方程组(1)的解. 另一方面，(2)是由(1)导出的，因此(1)的解一定是(2)的解. 现在(2)只有一组解(4)，所以(4)是方程组(1)的唯一解. 由此得出结论：

在 $D\neq0$ 的条件下，方程组(1)有唯一的解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}.$$

例 1 解方程组

$$\begin{cases} 2x+3y=8, \\ x-2y=-3. \end{cases}$$

解 $D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=2\times(-2)-3\times1=-7,$

$$D_1=\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}=8\times(-2)-3\times(-3)=-7,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=2\times(-3)-8\times1=-14.$$

因 $D=-7\neq0$，故所给方程组有唯一解

$$x=\frac{D_1}{D}=\frac{-7}{-7}=1,\quad y=\frac{D_2}{D}=\frac{-14}{-7}=2.$$

下面介绍三阶行列式概念.

设已知九个数排成正方形表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

则数 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$ 称为对应于这个表的三阶行列式,用记号

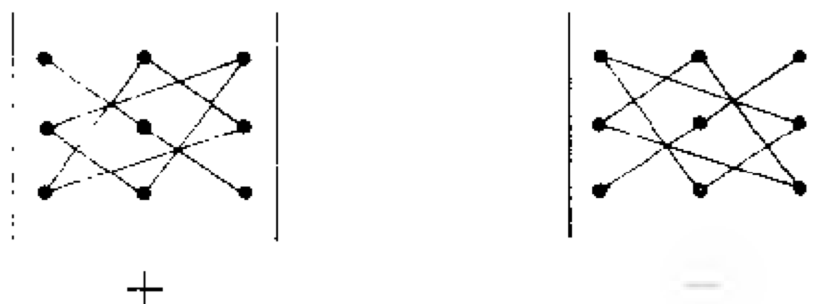
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

表示,因此

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{5}$$

关于三阶行列式的元素、行、列等概念,与二阶行列式的相应概念类似,不再重复.

(5) 式右端相当复杂,我们可以借助下列图形得出它的计算法则(通常称为对角线法则):



+　　　　　　　　　　—

行列式中从左上角到右下角的直线称为主对角线,从右上角到左下角的直线称为次对角线. 主对角线上元素的乘积,以及位于主对角线的平行线上的元素与对角上的元素的乘积,前面都取正

号.次对角线上元素的乘积,以及位于次对角线的平行线上的元素与对角上的元素的乘积,前面都取负号.

例 2

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\times3\times5+1\times1\times2+2\times(-4)\times3$$
$$-2\times3\times2-1\times(-4)\times5-2\times1\times3$$
$$=30+2-24-12+20-6=10.$$

利用交换律及结合律,可把(5)式改写如下:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})$$
$$+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}).$$

把上式右端三个括号中的式子表示为二阶行列式,则有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

上式称为三阶行列式按第一行的展开式.

例 3 将例 2 中的行列式按第一行展开并计算它的值.

解

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$
$$=2\times12-(-22)+2\times(-18)$$
$$=24+22-36=10.$$

习　　题

1. 利用二阶行列式解下列方程组:

(1) $\begin{cases} 5x-y=2, \\ 3x+2y=9; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3x-4y=2, \\ 2x-3y=7. \end{cases}$

2. 利用对角线法则,计算下列各行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$； (4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix}$.

3. 将下列行列式按第一行展开并计算它们的值：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

4. 证明下列等式：

(1) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix};$$

(2) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix};$$

[注：上面这两个等式分别称为三阶行列式按第二行和按第三行的展开式.]

答　　案

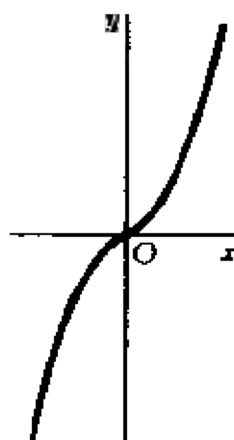
1. (1) $x=1$，$y=3$； (2) $x=-22$，$y=17$.

2. (1) -4； (2) 8； (3) -48； (4) ab.

3. (1) 18； (2) 27.

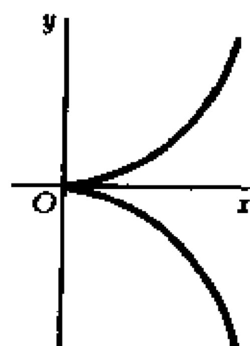
附录Ⅱ　几种常用的曲线

(1) 三次抛物线



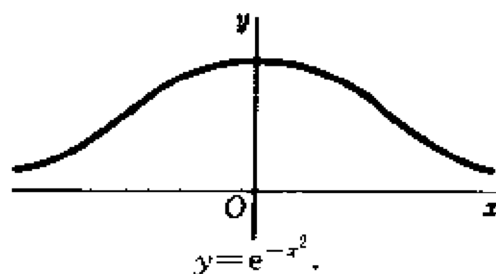
$y=ax^3$.

(2) 半立方抛物线



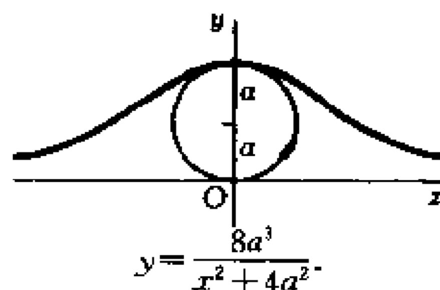
$y^2=ax^3$.

(3) 概率曲线



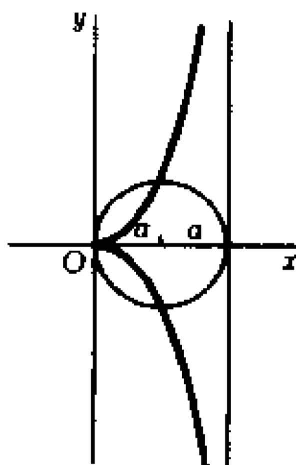
$y=e^{-x^2}$.

(4) 箕舌线



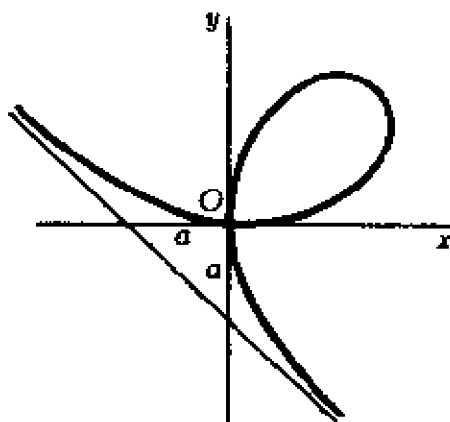
$y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}$.

(5) 蔓叶线



$y^2(2a-x)=x^3.$

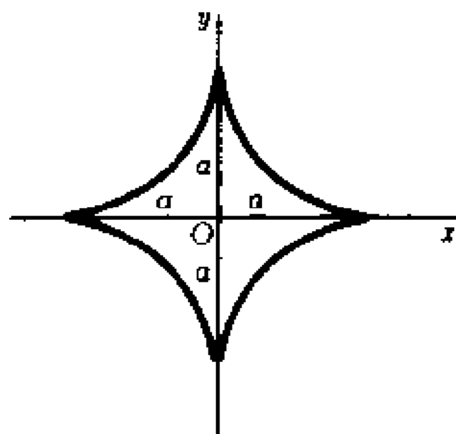
(6) 笛卡儿叶形线



$x^3+y^3-3axy=0.$

$x=\frac{3at}{1+t^3}, y=\frac{3at^2}{1+t^3}.$

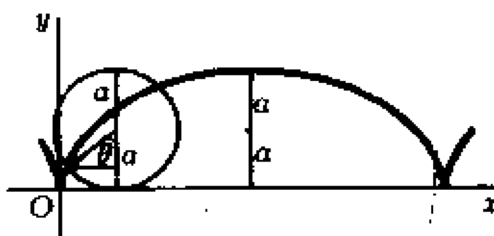
(7) 星形线(内摆线的一种)



$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}.$

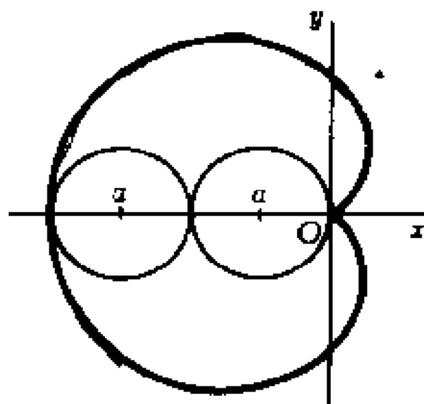
$\begin{cases} x=a\cos^3\theta, \\ y=a\sin^3\theta. \end{cases}$

(8) 摆线



$\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta), \\ y=a(1-\cos\theta). \end{cases}$

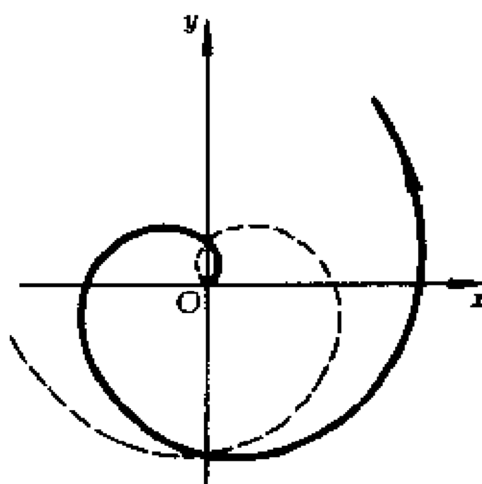
(9) 心形线(外摆线的一种)



$x^2+y^2+ax=a\sqrt{x^2+y^2}$,

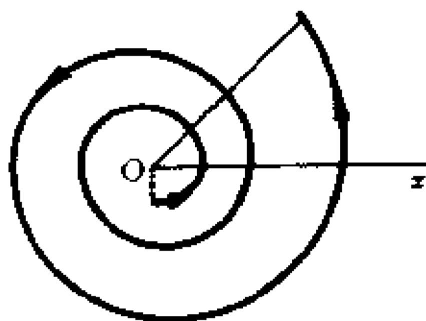
$r=a(1-\cos\theta)$.

(10) 阿基米德螺线



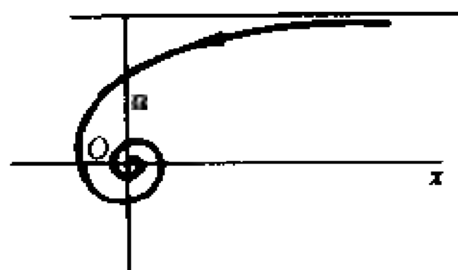
$r=a\theta$.

(11) 对数螺线



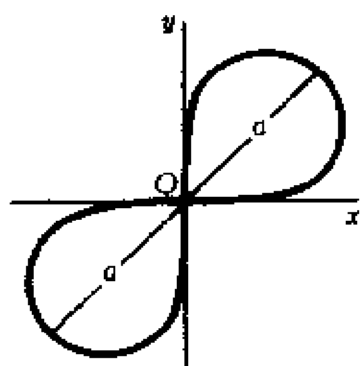
$r=e^{a\theta}$.

(12) 双曲螺线



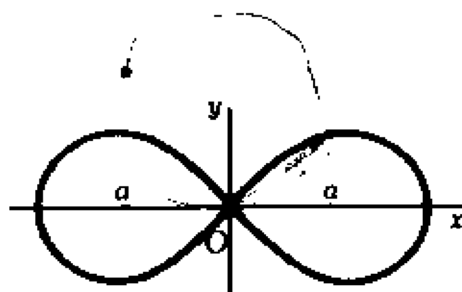
$r\theta=a$.

(13) 伯努利双纽线



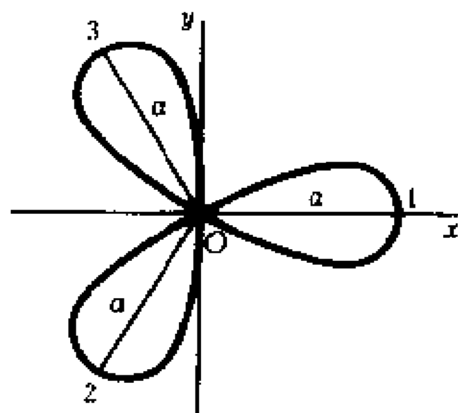
$$(x^2+y^2)^2=2a^2xy,$$
$$r^2=a^2\sin 2\theta.$$

(14) 伯努利双纽线



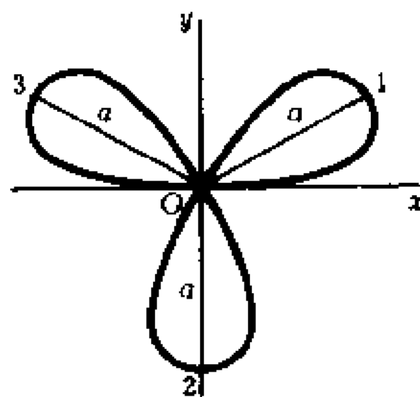
$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2),$$
$$r^2=a^2\cos 2\theta.$$

(15) 三叶玫瑰线



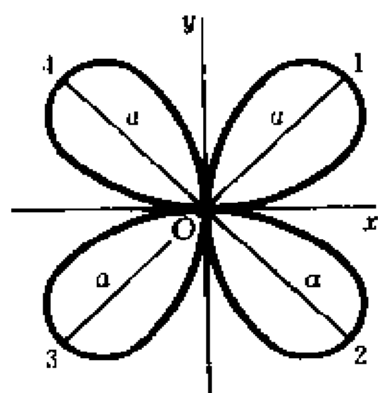
$$r=a\cos 3\theta.$$

(16) 三叶玫瑰线



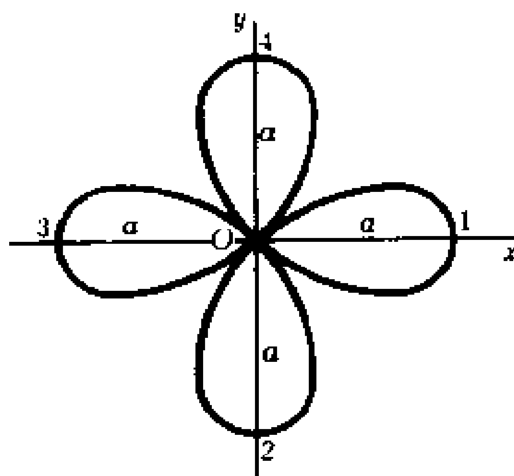
$$r=a\sin 3\theta.$$

(17) 四叶玫瑰线



$r = a\sin 2\theta$.

(18) 四叶玫瑰线



$r = a\cos 2\theta$.

附录Ⅲ 积 分 表

（一）含有 $ax+b$ 的积分

1. $\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b}=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C$

2. $\int (ax+b)^{\mu}\mathrm{d}x=\frac{1}{a(\mu+1)}(ax+b)^{\mu+1}+C\ (\mu\neq-1)$

3. $\int \frac{x}{ax+b}\mathrm{d}x=\frac{1}{a^2}(ax+b-b\ln|ax+b|)+C$

4. $\int \frac{x^2}{ax+b}\mathrm{d}x=\frac{1}{a^3}\left[\frac{1}{2}(ax+b)^2-2b(ax+b)+b^2\ln|ax+b|\right]+C$

5. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(ax+b)}=-\frac{1}{b}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right|+C$

6. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(ax+b)}=-\frac{1}{bx}+\frac{a}{b^2}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right|+C$

7. $\int \frac{x}{(ax+b)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{a^2}\left(\ln|ax+b|+\frac{b}{ax+b}\right)+C$

8. $\int \frac{x^2}{(ax+b)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{a^3}\left(ax+b-2b\ln|ax+b|-\frac{b^2}{ax+b}\right)+C$

9. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(ax+b)^2}=\frac{1}{b(ax+b)}-\frac{1}{b^2}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right|+C$

（二）含有 $\sqrt{ax+b}$ 的积分

10. $\int \sqrt{ax+b}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3a}\sqrt{(ax+b)^3}+C$

11. $\int x\sqrt{ax+b}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{15a^2}(3ax-2b)\sqrt{(ax+b)^3}+C$

12. $\int x^2\sqrt{ax+b}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{105a^3}(15a^2x^2-12abx+8b^2)\sqrt{(ax+b)^3}+C$

13. $\int \frac{x}{\sqrt{ax+b}}\mathrm{d}x=\frac{2}{3a^2}(ax-2b)\sqrt{ax+b}+C$

14. $\int \frac{x^2}{\sqrt{ax+b}}\mathrm{d}x=\frac{2}{15a^3}(3a^2x^2-4abx+8b^2)\sqrt{ax+b}+C$

15. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax+b}}=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{b}}\ln\left|\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right|+C & (b>0)\\ \frac{2}{\sqrt{-b}}\arctan\sqrt{\frac{ax+b}{-b}}+C & (b<0)\end{cases}$$

16. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{ax+b}}=-\frac{\sqrt{ax+b}}{bx}-\frac{a}{2b}\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax+b}}$

17. $\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x}\mathrm{d}x=2\sqrt{ax+b}+b\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax+b}}$

18. $\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{\sqrt{ax+b}}{x}+\frac{a}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax+b}}$

（三）含有 $x^2\pm a^2$ 的积分

19. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$

20. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}=\frac{x}{2(n-1)a^2(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2(n-1)a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n-1}}$

21. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$

（四）含有 $ax^2+b\ (a>0)$ 的积分

22. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+b}=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{ab}}\arctan\sqrt{\frac{a}{b}}x+C & (b>0)\\ \frac{1}{2\sqrt{-ab}}\ln\left|\frac{\sqrt{a}\,x-\sqrt{-b}}{\sqrt{a}\,x+\sqrt{-b}}\right|+C & (b<0)\end{cases}$$

23. $\int \frac{x}{ax^2+b}\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}\ln|ax^2+b|+C$

24. $\int \frac{x^2}{ax^2+b}\mathrm{d}x=\frac{x}{a}-\frac{b}{a}\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+b}$

25. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(ax^2+b)}=\frac{1}{2b}\ln\frac{x^2}{|ax^2+b|}+C$

26. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(ax^2+b)}=-\frac{1}{bx}-\frac{a}{b}\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+b}$

27. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3(ax^2+b)}=\frac{a}{2b^2}\ln\frac{|ax^2+b|}{x^2}-\frac{1}{2bx^2}+C$

28. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+b)^2}=\frac{x}{2b(ax^2+b)}+\frac{1}{2b}\int\frac{\mathrm{d}x}{ax^2+b}$

（五）含有 ax^2+bx+c $(a>0)$的积分

29. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}+C & (b^2<4ac)\\ \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right|+C & (b^2>4ac)\end{cases}$$

30. $\int \frac{x}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}\ln|ax^2+bx+c|-\frac{b}{2a}\int\frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}$

（六）含有 $\sqrt{x^2+a^2}$ $(a>0)$的积分

31. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\operatorname{arsh}\frac{x}{a}+C_1=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$

32. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}=\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}+C$

33. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x=\sqrt{x^2+a^2}+C$

34. $\int \frac{x}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}\mathrm{d}x=-\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}+C$

35. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}-\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$

36. $\int \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}\mathrm{d}x=-\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}+\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$

37. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{1}{a}\ln\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{|x|}+C$

38. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}=-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}+C$

39. $\int \sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$

40. $\int \sqrt{(x^2+a^2)^3}\mathrm{d}x=\frac{x}{8}(2x^2+5a^2)\sqrt{x^2+a^2}$

$$+\frac{3}{8}a^4\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$$

41. $\int x\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+a^2)^3}+C$

42. $\int x^2\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{x}{8}(2x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2}-\frac{a^4}{8}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$

43. $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}dx=\sqrt{x^2+a^2}+a\ln\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{|x|}+C$

44. $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}dx=\quad\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}+\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$

（七）含有 $\sqrt{x^2-a^2}$ $(a>0)$的积分

45. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{x}{|x|}\text{arch}\frac{|x|}{a}+C_1=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$

46. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}=-\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}}+C$

47. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\sqrt{x^2-a^2}+C$

48. $\int \frac{x}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}dx=-\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}+C$

49. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$

50. $\int \frac{x^2}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}dx=-\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}+\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$

51. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{1}{a}\arccos\frac{a}{|x|}+C$

52. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x}+C$

53. $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$

54. $\int \sqrt{(x^2-a^2)^3}\,dx=\frac{x}{8}(2x^2-5a^2)\sqrt{x^2-a^2}$

$$+\frac{3}{8}a^4\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$$

55. $\int x\sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{1}{3}\sqrt{(x^2-a^2)^3}+C$

56. $\int x^2\sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^4}{8}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$

57. $\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx=\sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{|x|}+C$

58. $\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}dx=-\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}+\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$

（八）含有 $\sqrt{a^2-x^2}$ $(a>0)$的积分

59. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$

60. $\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}+C$

61. $\int\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=-\sqrt{a^2-x^2}+C$

62. $\int\frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}dx=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}+C$

63. $\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$

64. $\int\frac{x^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}dx=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}-\arcsin\frac{x}{a}+C$

65. $\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{a}\ln\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{|x|}+C$

66. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x}+C$

67. $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$

68. $\int\sqrt{(a^2-x^2)^3}\,dx=\frac{x}{8}(5a^2-2x^2)\sqrt{a^2-x^2}$

$$+\frac{3}{8}a^4\arcsin\frac{x}{a}+C$$

69. $\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx=-\frac{1}{3}\sqrt{(a^2-x^2)^3}+C$

70. $\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a}+C$

71. $\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx=\sqrt{a^2-x^2}+a\ln\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{|x|}+C$

72. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\arcsin\frac{x}{a}+C$

（九）含有 $\sqrt{\pm ax^2+bx+c}$ $(a>0)$的积分

73. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln|2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}|+C$

74. $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x=\frac{2ax+b}{4a}\sqrt{ax^2+bx+c}$

$$+\frac{4ac-b^2}{8\sqrt{a^3}}\ln|2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}|+C$$

75. $\int \frac{x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\sqrt{ax^2+bx+c}$

$$-\frac{b}{2\sqrt{a^3}}\ln|2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}|+C$$

76. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{c+bx-ax^2}}=-\frac{1}{\sqrt{a}}\arcsin\frac{2ax-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+C$

77. $\int \sqrt{c+bx-ax^2}\,\mathrm{d}x=\frac{2ax-b}{4a}\sqrt{c+bx-ax^2}$

$$+\frac{b^2+4ac}{8\sqrt{a^3}}\arcsin\frac{2ax-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+C$$

78. $\int \frac{x}{\sqrt{c+bx-ax^2}}\mathrm{d}x=-\frac{1}{a}\sqrt{c+bx-ax^2}+\frac{b}{2\sqrt{a^3}}\arcsin\frac{2ax-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+C$

（十）含有 $\sqrt{\pm\frac{x-a}{x-b}}$或 $\sqrt{(x-a)(b-x)}$的积分

79. $\int \sqrt{\frac{x-a}{x-b}}\mathrm{d}x=(x-b)\sqrt{\frac{x-a}{x-b}}+(b-a)\ln(\sqrt{|x-a|}+\sqrt{|x-b|})+C$

80. $\int \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\mathrm{d}x=(x-b)\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}+(b-a)\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C$

81. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C\ (a<b)$

82. $\int \sqrt{(x-a)(b-x)}\,\mathrm{d}x=\frac{2x-a-b}{4}\sqrt{(x-a)(b-x)}$

$$+\frac{(b-a)^2}{4}\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C\ (a<b)$$

（十一）含有三角函数的积分

83. $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$

84. $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$

85. $\int \tan x\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$

86. $\int \cot x\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$

87. $\int \sec x\mathrm{d}x = \ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right| + C = \ln|\sec x + \tan x| + C$

88. $\int \csc x\mathrm{d}x = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C = \ln|\csc x - \cot x| + C$

89. $\int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x + C$

90. $\int \csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x + C$

91. $\int \sec x\tan x\mathrm{d}x = \sec x + C$

92. $\int \csc x\cot x\mathrm{d}x = -\csc x + C$

93. $\int \sin^2 x\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x - C$

94. $\int \cos^2 x\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

95. $\int \sin^n x\mathrm{d}x = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x\mathrm{d}x$

96. $\int \cos^n x\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\mathrm{d}x$

97. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^n x} = -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^{n-2}x}$

98. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{\sin x}{\cos^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^{n-2}x}$

99. $$\begin{aligned}\int \cos^m x\sin^n x\mathrm{d}x &= \frac{1}{m+n}\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x + \frac{m-1}{m+n}\int \cos^{m-2}x\sin^n x\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{m+n}\cos^{m+1}x\sin^{n-1}x + \frac{n-1}{m+n}\int \cos^m x\sin^{n-2}x\mathrm{d}x\end{aligned}$$

100. $\int \sin ax\cos bx\mathrm{d}x = -\frac{1}{2(a+b)}\cos(a+b)x - \frac{1}{2(a-b)}\cos(a-b)x + C$

101. $\int \sin ax \sin bx \mathrm{d}x = -\frac{1}{2(a+b)}\sin(a+b)x + \frac{1}{2(a-b)}\sin(a-b)x + C$

102. $\int \cos ax \cos bx \mathrm{d}x = \frac{1}{2(a+b)}\sin(a+b)x + \frac{1}{2(a-b)}\sin(a-b)x + C$

103. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\sin x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\mathrm{artan}\frac{a\tan\frac{x}{2}+b}{\sqrt{a^2-b^2}} + C \quad (a^2>b^2)$

104. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\sin x} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\frac{a\tan\frac{x}{2}+b-\sqrt{b^2-a^2}}{a\tan\frac{x}{2}+b+\sqrt{b^2-a^2}}\right| + C \quad (a^2<b^2)$

105. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x} = \frac{2}{a+b}\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right) + C \quad (a^2>b^2)$

106. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x} = \frac{1}{a+b}\sqrt{\frac{a+b}{b-a}}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{a+b}{b-a}}}{\tan\frac{x}{2}-\sqrt{\frac{a+b}{b-a}}}\right| + C \quad (a^2<b^2)$

107. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x} = \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{b}{a}\tan x\right) + C$

108. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\cos^2 x-b^2\sin^2 x} = \frac{1}{2ab}\ln\left|\frac{b\tan x+a}{b\tan x-a}\right| + C$

109. $\int x\sin ax \mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\sin ax - \frac{1}{a}x\cos ax + C$

110. $\int x^2\sin ax \mathrm{d}x = -\frac{1}{a}x^2\cos ax + \frac{2}{a^2}x\sin ax + \frac{2}{a^3}\cos ax + C$

111. $\int x\cos ax \mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\cos ax + \frac{1}{a}x\sin ax + C$

112. $\int x^2\cos ax \mathrm{d}x = \frac{1}{a}x^2\sin ax + \frac{2}{a^2}x\cos ax - \frac{2}{a^3}\sin ax + C$

（十二）含有反三角函数的积分（其中 $a>0$）

113. $\int \arcsin\frac{x}{a}\mathrm{d}x = x\arcsin\frac{x}{a} + \sqrt{a^2-x^2} + C$

114. $\int x\arcsin\frac{x}{a}\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{4}\sqrt{a^2-x^2} + C$

115. $\int x^2\arcsin\frac{x}{a}\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{9}(x^2+2a^2)\sqrt{a^2-x^2} + C$

116. $\int \arccos\frac{x}{a}\mathrm{d}x = x\arccos\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} + C$

117. $\int x\arccos\frac{x}{a}\mathrm{d}x=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)\arccos\frac{x}{a}-\frac{x}{4}\sqrt{a^2-x^2}+C$

118. $\int x^2\arccos\frac{x}{a}\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}\arccos\frac{x}{a}-\frac{1}{9}(x^2+2a^2)\sqrt{a^2-x^2}+C$

119. $\int \arctan\frac{x}{a}\mathrm{d}x=x\arctan\frac{x}{a}-\frac{a}{2}\ln(a^2+x^2)+C$

120. $\int x\arctan\frac{x}{a}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(a^2+x^2)\arctan\frac{x}{a}-\frac{a}{2}x+C$

121. $\int x^2\arctan\frac{x}{a}\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}\arctan\frac{x}{a}-\frac{a}{6}x^2+\frac{a^3}{6}\ln(a^2+x^2)+C$

（十三）含有指数函数的积分

122. $\int a^x\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln a}a^x+C$

123. $\int \mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}+C$

124. $\int x\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x=\frac{1}{a^2}(ax-1)\mathrm{e}^{ax}+C$

125. $\int x^n\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}x^n\mathrm{e}^{ax}-\frac{n}{a}\int x^{n-1}\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x$

126. $\int xa^x\mathrm{d}x=\frac{x}{\ln a}a^x-\frac{1}{(\ln a)^2}a^x+C$

127. $\int x^na^x\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln a}x^na^x-\frac{n}{\ln a}\int x^{n-1}a^x\mathrm{d}x$

128. $\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\mathrm{d}x=\frac{1}{a^2+b^2}\mathrm{e}^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)+C$

129. $\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\mathrm{d}x=\frac{1}{a^2+b^2}\mathrm{e}^{ax}(b\sin bx+a\cos bx)+C$

130. $\int \mathrm{e}^{ax}\sin^n bx\mathrm{d}x=\frac{1}{a^2+b^2n^2}\mathrm{e}^{ax}\sin^{n-1}bx(a\sin bx-nb\cos bx)$

$$+\frac{n(n-1)b^2}{a^2+b^2n^2}\int \mathrm{e}^{ax}\sin^{n-2}bx\mathrm{d}x$$

131. $\int \mathrm{e}^{ax}\cos^n bx\mathrm{d}x=\frac{1}{a^2+b^2n^2}\mathrm{e}^{ax}\cos^{n-1}bx(a\cos bx+nb\sin bx)$

$$+\frac{n(n-1)b^2}{a^2+b^2n^2}\int \mathrm{e}^{ax}\cos^{n-2}bx\mathrm{d}x$$

（十四）含有对数函数的积分

132. $\int \ln x\mathrm{d}x=x\ln x-x+C$

133. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}=\ln|\ln x|+C$

134. $\int x^n \ln x\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}x^{n+1}\left(\ln x-\frac{1}{n+1}\right)+C$

135. $\int (\ln x)^n \mathrm{d}x=x(\ln x)^n-n\int (\ln x)^{n-1}\mathrm{d}x$

136. $\int x^m (\ln x)^n \mathrm{d}x=\frac{1}{m+1}x^{m+1}(\ln x)^n-\frac{n}{m+1}\int x^m (\ln x)^{n-1}\mathrm{d}x$

（十五）含有双曲函数的积分

137. $\int \mathrm{sh}\ x\mathrm{d}x=\mathrm{ch}\ x+C$

138. $\int \mathrm{ch}\ x\mathrm{d}x=\mathrm{sh}\ x+C$

139. $\int \mathrm{th}\ x\mathrm{d}x=\ln\mathrm{ch}\ x+C$

140. $\int \mathrm{sh}^2 x\mathrm{d}x=-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\mathrm{sh}\ 2x+C$

141. $\int \mathrm{ch}^2 x\mathrm{d}x=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\mathrm{sh}\ 2x+C$

（十六）定 积 分

142. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\mathrm{d}x=0$

143. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\sin nx\mathrm{d}x=0$

144. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\cos nx\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \pi, & m=n\end{cases}$

145. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\sin nx\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \pi, & m=n\end{cases}$

146. $\int_{0}^{\pi} \sin mx\sin nx\mathrm{d}x=\int_{0}^{\pi} \cos mx\cos nx\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \pi/2, & m=n\end{cases}$

147. $I_n=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\mathrm{d}x$

$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$

$$\begin{cases} I_n=\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}\,(n\text{ 为大于 1 的正奇数}),I_1=1 \\ I_n=\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}\,(n\text{ 为正偶数}),I_0=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

习题答案与提示

第一章

习题 1—1（第 16 页）

1. (1) $(2,6]$； (2) $[0,+\infty)$； (3) $(-3,3)$； (4) $[-1,7]$.

2. 定义域$(-\infty,+\infty)$，值域$[-1,1]$.

4. (1) $x\neq1$，即$(-\infty,1),(1,+\infty)$；

   (2) $x\geqslant-\dfrac{2}{3}$，即$\left[-\dfrac{2}{3},+\infty\right)$；

   (3) $x\neq-1$ 且 $x\neq1$，即$(-\infty,-1),(-1,1),(1,+\infty)$；

   (4) $x\geqslant2$ 或 $x\leqslant-2$，即$(-\infty,-2],[2,+\infty)$；

   (5) $x\neq-1,x\neq1$ 且 $x\geqslant-2$，即$[-2,-1),(-1,1),(1,+\infty)$；

   (6) $x\neq0$ 且 $-1\leqslant x\leqslant1$，即$[-1,0),(0,1]$；

   (7) $-2<x<2$，即$(-2,2)$；

   (8) $x\neq1$ 且 $x\neq2$，即$(-\infty,1),(1,2),(2,+\infty)$.

6. $f(0)=2,f(1)=\sqrt{5},f(-1)=\sqrt{5},f\left(\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{1}{|a|}\sqrt{4a^2+1}$，

   $f(x_0)=\sqrt{4+x_0^2},f(x_0+h)=\sqrt{4+(x_0+h)^2}$.

8. $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2},\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\varphi(-2)=0.$

9. (1) 偶函数； (2) 既非奇函数又非偶函数；

   (3) 偶函数； (4) 奇函数；

   (5) 既非奇函数又非偶函数；(6)偶函数.

10. $\varphi(x)=2x^2-3$ 是偶函数；$\psi(x)=6x$ 是奇函数.

11. (3) 提示：参阅第 10 题.

12. (3) **提示**：利用三角函数的和差化积公式.

14. (1) 是周期函数，周期 $l=2\pi$；(2) 是周期函数，周期 $l=\frac{\pi}{2}$；

(3) 是周期函数，周期 $l=2$；(4)不是周期函数；

(5) 是周期函数，周期 $l=\pi$.

15. (1) $y=x^3-1$； (2) $y=\frac{1-x}{1+x}$；

(3) $y=\frac{-dx+b}{cx-a}$，当 $a+d=0$ 或 $b=c=0$，$a-d\neq 0$ 时反函数与直接函数相同.

16. 取 $\sqrt{2}$ 或小于 $\sqrt{2}$ 的任何正数为 δ.

习题 1－2（第 31 页）

1. (1) $x\geqslant 0$，即 $[0,+\infty)$；

(2) $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}-1$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$；

(3) $2\leqslant x\leqslant 4$，即 $[2,4]$；

(4) $x\neq 0$ 且 $x\leqslant 3$，即 $(-\infty,0),(0,3]$；

(5) $x>-1$，即 $(-1,+\infty)$；

(6) $x\neq 0$，即 $(-\infty,0),(0,+\infty)$.

2. $f(0)=0, f(-1)=-\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}, f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$,

$f(1)=\frac{\pi}{2}$.

3. $G(0)=\frac{\pi}{4}, G(1)=\frac{\pi}{6}, G(\sqrt{2})=\frac{\pi}{8}, G(-\sqrt{3})=\frac{5\pi}{12}$,

$G(-2)=\frac{\pi}{2}$.

8. (1) $y=\frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{2}$；

(2) $y=\frac{e^x}{e}-2$；

(3) $y=\log_2\frac{x}{1-x}$.

9. (1) $y=\sin^2 x, y_1=\frac{1}{4}, y_2=\frac{3}{4}$；

(2) $y=\sin 2x, y_1=\frac{\sqrt{2}}{2}, y_2=1$;

(3) $y=\sqrt{1+x^2}, y_1=\sqrt{2}, y_2=\sqrt{5}$;

(4) $y=e^{x^2}, y_1=1, y_2=e$;

(5) $y=e^{2x}, y_1=e^2, y_2=e^{-2}$.

10. (1) $-1\leqslant x\leqslant 1$,即$[-1,1]$;

(2) $[2n\pi,(2n+1)\pi], (n=0,\pm 1,\cdots)$;

(3) $-a\leqslant x\leqslant 1-a$,即$[-a,1-a]$;

(4) 若 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$,则 $a\leqslant x\leqslant 1-a$,即$[a,1-a]$;

若 $a>\frac{1}{2}$,则函数无处有定义.

11. $f[g(x)]=\begin{cases}1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x>0;\end{cases}$ $\quad g[f(x)]=\begin{cases}e, & |x|<1,\\ 1, & |x|=1,\\ e^{-1}, & |x|>1.\end{cases}$

14. $F=\frac{\mu P}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}$.

15. $L=\frac{S_0}{h}+\frac{2-\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}h$, $\quad 0<h<\sqrt{S_0\tan 40^\circ}$.

16. $V=\frac{\pi r^2h^3}{3[(h-r)^2-r^2]}$, $\quad 2r<h<+\infty$.

17. $y=\begin{cases}0.15x, & x\leqslant 50;\\ 7.5+0.25(x-50), & x>50.\end{cases}$

习题 1－3（第 42 页）

1. (1) 0; (2) 0; (3) 2; (4) 1; (5) 没有极限.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, $\quad N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$.

习题 1－4（第 50 页）

3. $\delta=0.0002$. 提示:因为 $x\to 2$,所以不妨设 $1<x<3$.

4. $|x|>\sqrt{397}$.

6. $\lim\limits_{x\to-0} f(x)=\lim\limits_{x\to+0} f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to1} f(x)=1$；

$\lim\limits_{x\to-0}\varphi(x)=-1$，$\lim\limits_{x\to+0}\varphi(x)=1$，$\lim\limits_{x\to0}\varphi(x)$不存在.

习题 1—5（第 54 页）

1. 两个无穷小的商不一定是无穷小，例如：$\alpha=4x$，$\beta=2x$，当 $x\to0$ 时都是无穷小，但$\dfrac{\alpha}{\beta}$当 $x\to0$ 时不是无穷小.

3. $0<|x|<\dfrac{1}{10^4+2}$.

4. (1) 2，　**提示**：应用本节定理 1；

　(2) 1，　**提示**：应用本节定理 1.

6. $y=x\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$上无界，但当 $x\to\infty$时，此函数不是无穷大.

习题 1—6（第 63 页）

1. (1) -9；　(2) 0；　(3) 0；　(4) $\dfrac{1}{2}$；　(5) $2x$；　(6) 2；　(7) $\dfrac{1}{2}$；　(8) 0；　(9) $\dfrac{2}{3}$；　(10) 2；　(11) 2；　(12) $\dfrac{1}{2}$；　(13) $\dfrac{1}{5}$；　(14) -1.

2. (1) ∞；　(2) ∞；　(3) ∞.

3. (1) 0；　(2) 0.

习题 1—7（第 71 页）

1. (1) ω；　(2) 3；　(3) $\dfrac{2}{5}$；　(4) 1；　(5) 2；　(6) x.

2. (1) $\dfrac{1}{e}$；　(2) e^2；　(3) e^2；　(4) e^{-k}.

4. (1) **提示**：$1<\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}<1+\dfrac{1}{n}$；

　(2) **提示**：$\dfrac{n}{n+\pi}\leqslant n\left(\dfrac{1}{n^2+\pi}+\dfrac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n\pi}\right)\leqslant\dfrac{n^2}{n^2+\pi}$；

　(3) **提示**：$x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}$，数列$\{x_n\}$单调增加且有界.

习题 1－8（第 74 页）

1. $x\to 0$ 时，x^2-x^3 是比 $2x-x^2$ 高阶的无穷小.

2. (1) 同阶，不等价；　　(2) 等价无穷小.

4. (1) $\dfrac{3}{2}$；

   (2) $0(m<n$ 时$)$，$1(m=n$ 时$)$，$\infty(m>n$ 时$)$；

   (3) $\dfrac{1}{2}$.

习题 1－9（第 80 页）

1. (1) $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续；

   (2) $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 与 $(-1,+\infty)$ 内连续，$x=-1$ 为跳跃间断点.

2. (1) $x=1$ 为可去间断点，$x=2$ 为第二类间断点；

   (2) $x=0$ 和 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 为可去间断点，$x=k\pi(k\neq 0)$ 为第二类间断点；

   (3) $x=0$ 为第二类间断点；

   (4) $x=1$ 为第一类间断点.

3. $f(x)=\begin{cases} x, & |x|<1; \\ 0, & |x|=1; \\ -x, & |x|>1. \end{cases}$　$x=1$ 和 $x=-1$ 为第一类间断点.

习题 1－10（第 85 页）

1. 连续区间：$(-\infty,-3)$，$(-3,2)$，$(2,+\infty)$；

   $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\dfrac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to -3}f(x)=-\dfrac{8}{5}$，$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\infty$.

2. (1) $\sqrt{5}$；　(2) 1；　(3) 0；　(4) $\dfrac{1}{2}$；　(5) 2；　(6) $\cos\alpha$；　(7) 1.

3. (1) 1；　(2) 0；　(3) $\sqrt{e}$；　(4) e^3.

4. $a=1$.

习题 1—11（第 91 页）

3. 提示：$m \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n} \leqslant M$，其中 m、M 分别为 $f(x)$ 在 $[x_1, x_n]$ 上的最小值及最大值.

5. 若 $f(a+0)$ 及 $f(b-0)$ 存在，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内一致连续.

总习题一（第 91 页）

1. (1) 必要，充分；　(2) 必要，充分；

   (3) 必要，充分；　(4) 充分必要.

2. 是.

3. $y=\begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$

4. 提示：利用有关初等函数连续性的结论.

5. (1) $(-\infty, 0]$；　(2) $[1, e]$；　(3) $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

   (4) $\left[2n\pi-\frac{\pi}{2}, 2n\pi+\frac{\pi}{2}\right]$，　$n=0, \pm 1, \cdots$.

6. $f[f(x)]=f(x)$，$g[g(x)]=0$，$f[g(x)]=0$，$g[f(x)]=g(x)$.

8. $V=\frac{R^3}{24\pi^2}(2\pi-\alpha)^2\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2}$，　$(0<\alpha<2\pi)$.

10. (1) ∞；　(2) $\frac{1}{2}$；　(3) e；　(4) $\frac{1}{2}$.

11. $a=0$.

12. $x=1$ 是第二类间断点，$x=0$ 是第一类间断点.

第　二　章

习题 2—1（第 105 页）

1. -20.

2. [illegible]

4. (1) $-f'(x_0)$；　(2) $f'(0)$；

(3) $2f'(x_0)$.

5. (1) $4x^3$;　　(2) $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$;

(3) $1.6x^{0.6}$;　　(4) $-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$;

(5) $-\frac{2}{x^3}$;　　(6) $\frac{16}{5}x^{\frac{11}{5}}$;

(7) $\frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}$.

6. $12(\mathrm{m/s})$.

8. $k_1=y'|_{x=\frac{2}{3}\pi}=-\frac{1}{2}$;　$k_2=y'|_{x=\pi}=-1$.

9. 切线方程为$\frac{\sqrt{3}}{2}x+y-\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\pi\right)=0$;

法线方法为$\frac{2\sqrt{3}}{3}x-y+\frac{1}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi=0$.

10. $x-y+1=0$.

11. $(2,4)$.

12. (1) 在 $x=0$ 处连续，不可导;

(2) 在 $x=0$ 处连续且可导.

13. $a=2$, $b=-1$.

14. $f'_+(0)=0$, $f'_-(0)=-1$, $f'(0)$不存在.

15. $f'(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0,\\ 1, & x\geq 0.\end{cases}$

16. $\left.\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}$

17. $\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}t}$

习题 2—2 (第 110 页)

2. (1) $3x^2-6x+4$;　　(2) $-\frac{20}{x^6}-\frac{28}{x^5}+\frac{2}{x^2}$;

(3) $15x^2-2^x\ln 2+3e^x$;　　(4) $\sec x(2\sec x+\tan x)$;

(5) $\frac{1}{x}(1-\frac{2}{\ln 10}+\frac{3}{\ln 2})$; (6) $\cos 2x$;

$x(2\ln x+1)$；　　(8) $3e^x(\cos x-\sin x)$；

) $-2(21x+1)$；　　(10) $\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$；

(11) $\frac{1-\ln x}{x^2}$；　　(12) $\frac{e^x(x-2)}{x^3}$；

(13) $\frac{1}{x(\ln x)^2}$；　　(14) $\frac{2}{(x+1)^2}$；

(15) $-\frac{1+2x}{(1+x+x^2)^2}$；　　(16) $2x\ln x\cos x+x\cos x-x^2\ln x\sin x$；

(17) $\frac{3(x^2-6x+1)}{(x^2-1)^2}$；　　(18) $\frac{1+\sin t+\cos t}{(1+\cos t)^2}$；

(19) $\frac{-2\csc x[(1+x^2)\cot x+2x]}{(1+x^2)^2}$

(20) $\frac{x(9x-4)\ln x+x^4-3x^3+2x}{(3\ln x+x^2)^2}$.

3. (1) $y'|_{x=\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}, y'|_{x=\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}$；

(2) $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$；

(3) $f'(0)=\frac{3}{25}, f'(2)=\frac{17}{15}$.

4. (1) $v(t)=v_0-gt$；　　(2) $t=\frac{v_0}{g}$.

5. $\left(-\frac{b}{2a},-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$.

6. 切线方程为 $2x-y=0$。法线方程为 $x+2y=0$.

7. 切线方程为 $2x-y-2=0$ 和 $2x-y+2=0$.

习题 2—3（第 118 页）

1. (1) $8(2x+5)^3$；　　(2) $3\sin(4-3x)$；

(3) $-6xe^{-3x^2}$；　　(4) $\frac{2x}{1+x^2}$；

(5) $\sin 2x$；　　(6) $\frac{2x}{1+x^4}$；

(7) $-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$；　　(8) $2x\sec^2(x^2)$；

(9) $\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$；　(10) $\dfrac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$；

(11) $\dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)\ln a}$；　(12) $-\tan x$.

2. (1) $-\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$；　(2) $\dfrac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$；

(3) $-\dfrac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}(\cos 3x+6\sin 3x)$；

(4) $\dfrac{|x|}{x^2\sqrt{x^2-1}}$；

(5) $-\dfrac{2}{x(1+\ln x)^2}$；　(6) $\dfrac{2x\cos 2x-\sin 2x}{x^2}$；

(7) $\dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$；　(8) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$；

(9) $\sec x$；　(10) $\csc x$.

3. (1) $\dfrac{2\arcsin\dfrac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}$；　(2) $\csc x$；

(3) $\dfrac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}$；　(4) $\dfrac{e^{\arctan\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}(1+x)}$；

(5) $n\sin^{n-1}x\cos(n+1)x$；　(6) $-\dfrac{1}{1+x^2}$；

(7) $\dfrac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}(\arccos x)^2}$；　(8) $\dfrac{1}{x\ln x\cdot\ln(\ln x)}$；

(9) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}+1-x^2}$；　(10) $-\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{2x(1-x)}}$.

4. $\dfrac{f(x)f'(x)+g(x)g'(x)}{\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}$.

5. (1) $2xf'(x^2)$；　(2) $\sin 2x[f'(\sin^2 x)-f'(\cos^2 x)]$.

习题 2—4 (第 121 页)

2. (1) $\operatorname{sh}(\operatorname{sh} x)\cdot\operatorname{ch} x$；　(2) $e^{\operatorname{ch} x}(\operatorname{ch} x+\operatorname{sh}^2 x)$；

(3) $\dfrac{1}{x\operatorname{ch}^2(\ln x)}$；　(4) $(3\operatorname{sh} x+2)\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x$；

(5) $-\dfrac{2x}{\operatorname{ch}^2(1-x^2)}$；　(6) $\dfrac{2x}{\sqrt{x^4+2x^2+2}}$；

(7) $\dfrac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}-1}}$;　　(8) $\dfrac{1}{1+2\text{sh}^2x}$;

(9) th^3x.

3. (1) $e^{-x}(-x^2+4x-5)$;　　(2) $\sin 2x\sin(x^2)+2x\sin^2x\cos(x^2)$;

(3) $\dfrac{4}{4+x^2}\arctan\dfrac{x}{2}$;　　(4) $\dfrac{1-n\ln x}{x^{n+1}}$;

(5) $\dfrac{1}{\text{ch}^2t}$;　　(6) $\dfrac{1}{x^2}\tan\dfrac{1}{x}$;

(7) $\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{2}{x}\cdot e^{-\sin^2\frac{1}{x}}$;　　(8) $\dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;

(9) $\arcsin\dfrac{x}{2}$;

(10) $y'=\begin{cases}\dfrac{2}{1+t^2}, & t^2<1,\\ -\dfrac{2}{1+t^2}, & t^2>1.\end{cases}$

习题 2—5（第 126 页）

1. (1) $4-\dfrac{1}{x^2}$;　　(2) $4e^{2x-1}$;

(3) $-2\sin x-x\cos x$;　　(4) $-2e^{-t}\cos t$;

(5) $-\dfrac{a^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}$;　　(6) $-\dfrac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$;

(7) $2\sec^2x\tan x$;　　(8) $\dfrac{6x(2x^3-1)}{(x^3+1)^3}$;

(9) $2\arctan x+\dfrac{2x}{1+x^2}$;　　(10) $\dfrac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}$;

(11) $2xe^{x^2}(3+2x^2)$;　　(12) $-\dfrac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$.

2. $f'''(2)=207360$.

3. (1) $2f'(x^2)+4x^2f''(x^2)$;　　(2) $\dfrac{f''(x)f(x)-[f'(x)]^2}{[f(x)]^2}$.

5. $\dfrac{d^2s}{dt^2}=-A\omega^2\sin\omega t$.

8. (1) $n!$;　　(2) $2^{n-1}\sin\left[2x+(n-1)\dfrac{\pi}{2}\right]$;

(3) $(-1)^n\dfrac{(n-2)!}{x^{n-1}}(n\geqslant 2)$； (4) $e^x(x+n)$.

9. (1) $-4e^x\cos x$； (2) $x\operatorname{sh} x+100\operatorname{ch} x$；

(3) $2^{50}(-x^2\sin 2x+50x\cos 2x+\dfrac{1225}{2}\sin 2x)$.

习题 2－6（第 138 页）

1. (1) $\dfrac{y}{y-x}$； (2) $\dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}$；

(3) $\dfrac{e^{x+y}-y}{x-e^{x+y}}$； (4) $-\dfrac{e^y}{1+xe^y}$.

2. 切线方程为 $x+y-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a=0$，法线方程为 $x-y=0$.

3. (1) $-\dfrac{1}{y^3}$； (2) $-\dfrac{b^4}{a^2y^3}$；

(3) $2\csc^2(x+y)\cot^3(x+y)$； (4) $\dfrac{e^{2y}(3-y)}{(2-y)^3}$.

4. (1) $\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x\left(\ln\dfrac{x}{1+x}+\dfrac{1}{1+x}\right)$；

(2) $\dfrac{1}{5}\sqrt[5]{\dfrac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}\left[\dfrac{1}{x-5}-\dfrac{2x}{5(x^2+2)}\right]$；

(3) $\dfrac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}\left[\dfrac{1}{2(x+2)}-\dfrac{4}{3-x}-\dfrac{5}{x+1}\right]$；

(4) $\dfrac{1}{2}\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}\left[\dfrac{1}{x}+\cot x-\dfrac{e^x}{2(1-e^x)}\right]$.

5. (1) $\dfrac{3b}{2a}t$； (2) $\dfrac{\cos\theta-\theta\sin\theta}{1-\sin\theta-\theta\cos\theta}$.

6. $\sqrt{3}-2$.

7. (1) 切线方程为 $2\sqrt{2}x+y-2=0$，法线方程为 $\sqrt{2}x-4y-1=0$；

(2) 切线方程为 $4x+3y-12a=0$，法线方程为 $3x-4y+6a=0$.

8. (1) $\dfrac{1}{t^3}$； (2) $-\dfrac{b}{a^2\sin^3 t}$；

(3) $\dfrac{4}{9}e^{3t}$； (4) $\dfrac{1}{f''(t)}$.

9. (1) $-\dfrac{3}{8t^5}(1+t^2)$； (2) $\dfrac{t^4-1}{8t^3}$.

10. 144π (m^2/s).

11. $\frac{16}{25\pi}\approx 0.204$ (m/min).

12. 0.64 (cm/min).

习题 2—7（第 148 页）

1. 当 $\Delta x=1$ 时，$\Delta y=18, dy=11$；当 $\Delta x=0.1$ 时，$\Delta y=1.161, dy=1.1$；当 $\Delta x=0.01$ 时，$\Delta y=0.110601, dy=0.11$.

2. (a) $\Delta y>0, dy>0, \Delta y-dy>0$；

   (b) $\Delta y>0, dy>0, \Delta y-dy<0$；

   (c) $\Delta y<0, dy<0, \Delta y-dy<0$；

   (d) $\Delta y<0, dy<0, \Delta y-dy>0$；

3. (1) $\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)dx$；　(2) $(\sin 2x+2x\cos 2x)dx$；

   (3) $(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}dx$；　(4) $\frac{2\ln(1-x)}{x-1}dx$；

   (5) $2x(1+x)e^{2x}dx$；　(6) $e^{-x}[\sin(3-x)-\cos(3-x)]dx$；

   (7) $dy=\begin{cases}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, & -1<x<0,\\ -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, & 0<x<1;\end{cases}$

   (8) $8x\tan(1+2x^2)\sec^2(1+2x^2)dx$；

   (9) $-\frac{2x}{1+x^4}dx$；　(10) $A\omega\cos(\omega t+\varphi)dt$.

4. (1) $2x+C$；　(2) $\frac{3}{2}x^2+C$；

   (3) $\sin t+C$；　(4) $-\frac{1}{\omega}\cos\omega x+C$；

   (5) $\ln(1+x)+C$；　(6) $-\frac{1}{2}e^{-2x}+C$；

   (7) $2\sqrt{x}+C$；　(8) $\frac{1}{3}\tan 3x+C$；

习题 2—8（第 154 页）

1. $2\pi R_0 h$.

2. 0.03355(g).

3. 约为$\frac{8f}{3l}\Delta f$.

4. 约减少 43.63cm^2；约增加 104.72cm^2.

5. (1) 0.87476；　　　(2) −0.96509.

6. (1) 30°47″；　　　(2)60°2′.

7. $\tan 45' \approx 0.01309$；$\ln 1.002 \approx 0.002$.

8. (1) 9.9867；　　　(2) 2.0052.

9. $V=343000(cm^3)$，$\delta_V=1470(cm^3)$，$\frac{\delta_V}{V}=0.4\%$.

10. 3%.

11. $\frac{2}{3}\%$.

12. $\delta_\alpha=0.00056(rad)=1'55''$.

提示：先求出中心角α与弦长l的函数关系式.

总习题二（第 156 页）

1. (1) 充分，必要；　　　(2) 充分必要；

   (3) 充分必要.

2. $\left.\frac{dm}{dx}\right|_{x=x_0}$.

3. $-\frac{1}{x^2}$.

4. (1) $f'_-(0)=f'_+(0)=f'(0)=1$；

   (2) $f'_-(0)=1$，$f'_+(0)=0$，$f'(0)$不存在.

5. 在$x=0$处连续，不可导.

6. (1) $\frac{\cos x}{|\cos x|}$；　　　(2) $\frac{1}{1+x^2}$；

   (3) $\sin x \cdot \ln\tan x$；　　　(4) $\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$；

   (5) $x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$.

7. (1) $-2\cos 2x \cdot \ln x-\frac{2\sin 2x}{x}-\frac{\cos^2 x}{x^2}$；

(2) $\frac{3x}{(1-x^2)^{5/2}}$.

8. (1) $\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{m}-n+1\right)(1+x)^{\frac{1}{m}-n}$;

(2) $(-1)^n\frac{2\cdot n!}{(1+x)^{n+1}}$.

9. $y''(0)=\frac{1}{e^2}$.

10. (1) $\frac{dy}{dx}=-\tan\theta$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{3a}\sec^4\theta\csc\theta$;

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{t}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1+t^2}{t^3}$.

11. 切线方程为 $x+2y-4=0$,法线方程为 $2x-y-3=0$.

12. -2.8(km/h).

13. 1.007.

14. 约需加长 2.23cm.

第 三 章

习题 3—1(第 166 页)

5. 有分别位于区间(1,2),(2,3)及(3,4)内的三个根.

14. 提示:令 $\varphi(x)=f(x)e^{-x}$,先证明 $\varphi(x)$ 为常数.

习题 3—2(第 171 页)

1. (1) 1; (2) 2; (3) $\cos\alpha$;

(4) $-\frac{3}{5}$; (5) $-\frac{1}{8}$; (6) $\frac{m}{n}a^{m-n}$;

(7) 1; (8) 3; (9) 1;

(10) 1; (11) $\frac{1}{2}$; (12) ∞;

(13) $-\frac{1}{2}$; (14) e^a; (15) 1;

(16) 1;

4. 连续

习题 3-3（第 177 页）

1. $f(x)=-56+21(x-4)+37(x-4)^2+11(x-4)^3+(x-4)^4$.

2. $f(x)=x^6-9x^5+30x^4-45x^3+30x^2-9x+1$.

3. $\frac{1}{x}=-[1+(x+1)+(x+1)^2+\cdots+(x+1)^n]$

$$+(-1)^{n+1}\frac{(x+1)^{n+1}}{[-1+\theta(x+1)]^{n+2}},\quad (0<\theta<1).$$

4. $\tan x=x+\frac{1+2\sin^2(\theta x)}{3\cos^4(\theta x)}x^3,\quad (0<\theta<1)$.

5. $xe^x=x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{(n-1)!}+\frac{1}{(n+1)!}(n+1+\theta x)e^{\theta x}x^{n+1},$

$$(0<\theta<1).$$

6. $\sqrt{x}=2+\frac{1}{4}(x-4)-\frac{1}{64}(x-4)^2+\frac{1}{512}(x-4)^3$

$$-\frac{15(x-4)^4}{4!\ 16[4+\theta(x-4)]^{\frac{7}{2}}},\quad (0<\theta<1).$$

7. $\sqrt{e}\approx1.645$.

8. (1) $\sqrt[3]{30}\approx3.10724$；$|R_3|<1.88\times10^{-5}$；

(2) $\sin 18°\approx0.3090$，$|R_3|<1.3\times10^{-4}$.

习题 3—4（第 182 页）

1. 单调减少.

2. 单调增加.

3. (1) 在$(-\infty,-1]$、$[3,+\infty)$内单调增加，在$[-1,3]$上单调减少；

(2) 在$(0,2]$内单调减少，在$[2,+\infty)$内单调增加；

(3) 在$(-\infty,0)$，$\left(0,\frac{1}{2}\right]$，$[1,+\infty)$内单调减少，在$\left[\frac{1}{2},1\right]$上单调增加；

(4) 在$(-\infty,+\infty)$内处处单调增加；

(5) 在$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$内单调减少，在$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$内单调增加；

(6) 在$\left(-\infty,\frac{2}{3}a\right]$，$[a,+\infty)$内单调增加，在$\left[\frac{2}{3}a,a\right]$上单调减少；

(7) 在$[0,n]$上单调增加，在$[n,+\infty)$内单调减少；

(8) 在$\left[\frac{k\pi}{2},\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right]$上单调增加，在$\left[\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3},\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right]$上单调减少，$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

6. (i) $a>\frac{1}{e}$时没有实根. (ii) $0<a<\frac{1}{e}$时有两个实根，

(iii) $a=\frac{1}{e}$时只有$x=e$一个实根.

7. 不一定. $f(x)=x+\sin x$在$(-\infty,+\infty)$内单调，但$f'(x)$在$(-\infty,+\infty)$内不单调.

习题 3-5（第 189 页）

1. (1) 极小值$y(1)=2$；

(2) 极大值$y(0)=0$，极小值$y(1)=-1$；

(3) 极大值$y(-1)=17$，极小值$y(3)=-47$；

(4) 极小值$y(0)=0$；

(5) 极大值$y(\pm1)=1$，极小值$y(0)=0$；

(6) 极大值$y\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{4}$；

(7) 极大值$y\left(\frac{12}{5}\right)=\frac{1}{10}\sqrt{205}$；

(8) 极大值$y(0)=4$，极小值$y(-2)=\frac{8}{3}$；

(9) 极大值$y\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}$，极小值$y\left(\frac{\pi}{4}+(2k+1)\pi\right)$

$=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}+(2k+1)\pi}$，$(k=0,\pm1,\pm2\cdots)$；

(10) 极大值$y(e)=e^{\frac{1}{e}}$；

(11) 极小值$y\left(-\frac{1}{2}\ln 2\right)=2\sqrt{2}$；

(12) 极大值$y(1)=2$； (13) 没有极值；

(14) 没有极值.

3. $a=2$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$ 为极大值.

习题 3－6（第 194 页）

1. (1) 最大值 $y(4)=80$，最小值 $y(-1)=-5$；

(2) 最大值 $y(3)=11$，最小值 $y(2)=-14$；

(3) 最大值 $y\left(\frac{3}{4}\right)=1.25$，最小值 $y(-5)=-5+\sqrt{6}$.

2. $x=1$ 时函数有最小值 -2.

3. $x=\frac{1}{5}$ 时函数有最大值 $\frac{1}{5}$.

4. $x=1$ 时函数有最大值 -29.

5. $x=-3$ 时函数有最小值 27.

6. $x=1$ 时函数有最大值 $\frac{1}{2}$.

7. 长为 10m，宽为 5m.

8. $r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$，$h=2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$；$d:h=1:1$.

9. 底宽为 $\sqrt{\frac{40}{4+\pi}}=2.366$(m).

10. 当 $\alpha=\arctan\mu=\arctan 0.25\approx 14°2'$ 时，可使力 F 最小.

11. 杆长为 1.4m.

12. $\varphi=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$.

13. 当 $\varphi=54°13'$ 时，屋架可吊到最大高度 7.506m，而柱子高只有 6m，所以能吊得上去.

提示：设吊臂对地面的倾角为 φ 时，屋架吊起的高度为 h，建立 h 与 φ 间的函数关系式，然后求出 h 的最大值.

习题 3－7（第 200 页）

1. (1) 是凸的；

(2) 在 $(-\infty,0]$ 内是凸的，在 $[0,+\infty)$ 内是凹的；

(3) 是凹的；　　　(4) 是凹的.

2. (1) 拐点$\left(\frac{5}{3},\frac{20}{27}\right)$，在$\left(-\infty,\frac{5}{3}\right]$内是凸的，在$\left[\frac{5}{3},+\infty\right)$内是凹的；

(2) 拐点$\left(2,\frac{2}{e^2}\right)$，在$(-\infty,2]$内是凸的，在$[2,+\infty)$内是凹的；

(3) 没有拐点，处处是凹的；

(4) 拐点$(-1,\ln 2)$，$(1,\ln 2)$，在$(-\infty,-1]$，$[1,+\infty)$内是凸的，在$[-1,1]$上是凹的；

(5) 拐点$\left(\frac{1}{2},e^{\arctan\frac{1}{2}}\right)$，在$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$内是凹的，在$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$内是凸的；

(6) 拐点$(1,-7)$，在$(0,1]$内是凸的，在$[1,+\infty)$内是凹的.

4. (1) 拐点：$(1,4)$及$(1,-4)$；

(2) 拐点：$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}a,\frac{3}{2}a\right)$及$\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}a,\frac{3}{2}a\right)$.

5. 拐点：

$(-1,-1)$，$\left(2-\sqrt{3},\frac{1-\sqrt{3}}{4(2-\sqrt{3})}\right)$，$\left(2+\sqrt{3},\frac{1+\sqrt{3}}{4(2+\sqrt{3})}\right)$.

6. $a=-\frac{3}{2}, b=\frac{9}{2}$.

7. $a=1, b=-3, c=-24, d=16$.

8. $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{8}$.

9. $x=x_0$ 不是极值点，$(x_0,f(x_0))$为拐点.

习题 3—8（第 206 页）

1. 在$(-\infty,-2]$内单调减少，在$[-2,+\infty)$内单调增加；在$(-\infty,-1]$，$[1,+\infty)$内是凹的，在$[-1,1]$上是凸的；拐点$\left(-1,-\frac{6}{5}\right)$，$(1,2)$；极小值$y(-2)=-\frac{17}{5}$.

2. 对称于原点；在$(-\infty,-1]$，$[1,+\infty)$内单调减少，在$[-1,1]$上单调增加；在$(-\infty,-\sqrt{3}]$，$[0,\sqrt{3}]$上是凸的，在$[-\sqrt{3},0]$，$[\sqrt{3},+\infty)$

内是凹的；拐点 $\left(-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$，$(0,0)$，$\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$；极小值 $y(-1)=-\frac{1}{2}$，极大值 $y(1)=\frac{1}{2}$；水平渐近线 $y=0$.

3. 在 $(-\infty,1]$ 内单调增加，在 $[1,+\infty)$ 内单调减少；在 $\left(-\infty,1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$，$\left[1+\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ 内是凹的，在 $\left[1-\frac{\sqrt{2}}{2},1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ 上是凸的；拐点 $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$，$\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$；极大值 $y(1)=1$；水平渐近线 $y=0$.

4. 在 $(-\infty,0)$，$\left(0,\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right]$ 内单调减少，在 $\left[\frac{\sqrt[3]{4}}{2},+\infty\right)$ 内单调增加；在 $(-\infty,-1]$，$(0,+\infty)$ 内是凹的，在 $[-1,0)$ 内是凸的；拐点 $(-1,0)$；极小值 $y\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$；铅直渐近线 $x=0$.

5. 定义域为 $x\neq\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{4}\right)\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$；周期为 2π；图形对称于 y 轴；在 $[0,\pi]$ 部分：在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$，$\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$，$\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right]$ 内单调增加；在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$ 内是凹的，在 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 内是凸的，在 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$ 内是凹的，在 $\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right]$ 内是凸的；拐点 $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$；极小值 $y(0)=1$，极大值 $y(\pi)=-1$；铅直渐近线 $x=\frac{\pi}{4}$，$x=\frac{3\pi}{4}$.

习题 3—9（第 217 页）

1. $K=2$.

2. $K=|\cos x|$，$\rho=|\sec x|$.

3. $K=2$，$\rho=\frac{1}{2}$.

4. $K=\left|\frac{2}{3a\sin 2t_0}\right|$.

5. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\ln 2}{2}\right)$ 处曲率半径有最小值 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

7. 约 1246(N).

提示:沿曲线运动的物体所受的向心力为 $F=\dfrac{mv^2}{\rho}$,这里 m 为物体的质量,v 为它的速度,ρ 为运动轨迹的曲率半径.

8. 约 45400(N).

参看上题提示.

9*. $(\xi-3)^2+(\eta+2)^2=8$.

10*. $\left(\xi-\dfrac{\pi-10}{4}\right)^2+\left(\eta-\dfrac{9}{4}\right)^2=\dfrac{125}{16}$.

11*. $\begin{cases}\alpha=\dfrac{3y^2}{2p}+p,\\ \beta=-\dfrac{y^3}{p^2}\end{cases}$ 或 $27p\beta^2=8(\alpha-p)^3$.

习题 3－10(第 223 页)

1. $0.18<x_0<0.19$.
2. $-0.20<x_0<-0.19$.
3. $0.32<x_0<0.33$.
4. $2.50<x_0<2.51$.

总习题三(第 223 页)

1. $f(x)=|x|,x\in[-1,1]$.

2. ka.

8. (1) 2;　　(2) $\dfrac{1}{2}$;

(3) $e^{-\frac{2}{\pi}}$;　　(4) $a_1a_2\cdots a_n$.

9. $\ln x=\ln 2+\dfrac{x-2}{2}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-2}{2}\right)^2+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\dfrac{x-2}{2}\right)^n+R_n(x)$,

$$R_n(x)=\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x-2}{\xi}\right)^{n+1}(\xi\text{ 在 } 2 \text{ 与 } x \text{ 之间}).$$

11. 极大值 $f(0)=2$,极小值 $f(\frac{1}{e})=e^{-\frac{2}{e}}$.

12. $(1,2)$和$(-1,-2)$.

13. $\sqrt[3]{3}$.

14. (1) 对称于 y 轴；在 $(-\infty,0]$ 内单调减少，在 $[0,+\infty)$ 内单调增加；在 $(-\infty,-1]$、$[1,+\infty)$ 内是凸的，在 $[-1,1]$ 上是凹的；极小值 $y(0)=0$；拐点 $(-1,\ln 2)$、$(1,\ln 2)$.

(2) 曲线可分成 $y_1=(x-1)\sqrt{x}$ 和 $y_2=-(x-1)\sqrt{x}$ 两支，这两支曲线对称于 x 轴. 对于 y_1：在 $[0,\frac{1}{3}]$ 上单调减少，在 $[\frac{1}{3},+\infty)$ 内单调增加；在 $[0,+\infty)$ 内是凹的；极小值 $y_1(\frac{1}{3})=-\frac{2}{9}\sqrt{3}$.

15. $(\frac{\pi}{2},1)$ 处曲率半径有最小值 1.

16. $2.414<x_0<2.415$.

17. **提示**：可以先用一次洛必达法则.

18. **提示**：先对 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{(x-x_0)^n}$ 接连 $n-1$ 次使用洛必达法则.

19. **提示**：记 $x_0=(1-t)x_1+tx_2$，先证

$$f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

然后在上式中分别令 $x=x_1$ 及 $x=x_2$，可得两个不等式，由此推出结论.

第 四 章

习题 4—1 (第 236 页)

1. (1) $-\frac{1}{x}+C$；　　(2) $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$；

(3) $2\sqrt{x}+C$；　　(4) $\frac{3}{10}x^{\frac{10}{3}}+C$；

(5) $-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}+C$；　　(6) $\frac{m}{m+n}x^{\frac{m+n}{m}}+C$；

(7) $\frac{5}{4}x^4+C$；　　(8) $\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+2x+C$；

(9) $\sqrt{\frac{2h}{g}}+C$；　　(10) $\frac{x^3}{3}-2x^2+4x+C$；

(11) $\frac{x^5}{5}+\frac{2}{3}x^3+x+C$；　　(12) $\frac{x^3}{3}+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x+C$；

(13) $2\sqrt{x}-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$;

(14) $x^3+\arctan x+C$;　　(15) $x-\arctan x+C$;

(16) $2e^x-3\ln|x|+C$;　　(17) $3\arctan x-2\arcsin x+C$;

(18) $e^x-2\sqrt{x}+C$;　　(19) $\frac{3^x e^x}{\ln 3+1}+C$;

(20) $2x-\frac{5\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln 2-\ln 3}+C$;　　(21) $\tan x-\sec x+C$;

(22) $\frac{x+\sin x}{2}+C$;　　(23) $\frac{1}{2}\tan x+C$;

(24) $\sin x-\cos x+C$;　　(25) $-(\cot x+\tan x)+C$;

(26) $\frac{4(x^2+7)}{7\sqrt[4]{x}}+C$.

2. $y=\ln x+1$.

3. (1) 27(m)　　(2) $\sqrt[3]{360}\approx 7.11$(s).

习题 4—2（第 252 页）

1. (1) $\frac{1}{a}$;　(2) $\frac{1}{7}$;　(3) $\frac{1}{2}$;　(4) $\frac{1}{10}$;

(5) $-\frac{1}{2}$;　(6) $\frac{1}{12}$;　(7) $\frac{1}{2}$;　(8) -2;

(9) $-\frac{2}{3}$;　(10) $\frac{1}{5}$;　(11) $-\frac{1}{5}$;　(12) $\frac{1}{3}$;

(13) -1;　(14) -1.

2. (1) $\frac{1}{5}e^{5t}+C$;　　(2) $-\frac{1}{8}(3-2x)^4+C$;

(3) $-\frac{1}{2}\ln|1-2x|+C$;　　(4) $-\frac{1}{2}(2-3x)^{\frac{2}{3}}+C$;

(5) $-\frac{1}{a}\cos ax-be^{\frac{x}{b}}+C$;　　(6) $-2\cos\sqrt{t}+C$;

(7) $\frac{1}{11}\tan^{11}x+C$;　　(8) $\ln|\ln\ln x|+C$;

(9) $-\ln|\cos\sqrt{1+x^2}|+C$;　(10) $\ln|\tan x|+C$;

(11) $\arctan e^x+C$;　　(12) $-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$;

(13) $\frac{1}{2}\sin(x^2)+C$；　(14) $-\frac{1}{3}(2-3x^2)^{\frac{1}{2}}+C$；

(15) $-\frac{3}{4}\ln|1-x^4|+C$；　(16) $-\frac{1}{3\omega}\cos^3(\omega t+\varphi)+C$；

(17) $\frac{1}{2\cos^2 x}+C$；　(18) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(\sin x-\cos x)^2}+C$；

(19) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{3}+\frac{1}{4}\sqrt{9-4x^2}+C$；

(20) $\frac{x^2}{2}-\frac{9}{2}\ln(x^2+9)+C$；(21) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x-1}{\sqrt{2}x+1}\right|+C$；

(22) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C$；　(23) $\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C$；

(24) $\frac{t}{2}+\frac{1}{4\omega}\sin 2(\omega t+\varphi)+C$；

(25) $\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{10}\cos 5x+C$；

(26) $\frac{1}{3}\sin\frac{3x}{2}+\sin\frac{x}{2}+C$；(27) $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{24}\sin 12x+C$；

(28) $\frac{1}{3}\sec^3 x-\sec x+C$；　(29) $-\frac{10^{2\arccos x}}{2\ln 10}+C$；

(30) $(\arctan\sqrt{x})^2+C$；　(31) $-\frac{1}{\arcsin x}+C$；

(32) $-\frac{1}{x\ln x}+C$；　(33) $\frac{1}{2}(\ln\tan x)^2+C$；

(34) $\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}\right)+C$；

(35) $\arccos\frac{1}{|x|}+C$；

(36) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$；　(37) $\sqrt{x^2-9}-3\arccos\frac{3}{|x|}+C$；

(38) $\sqrt{2x}-\ln(1+\sqrt{2x})+C$；

(39) $\arcsin x-\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}+C$；

(40) $\frac{1}{2}(\arcsin x+\ln|x+\sqrt{1-x^2}|)+C$.

习题 4－3（第 258 页）

1. $-x\cos x+\sin x+C$.

2. $x(\ln x-1)+C$.

3. $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$.

4. $-e^{-x}(x+1)+C$.

5. $\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+C$.

6. $\frac{e^{-x}}{2}(\sin x-\cos x)+C$.

7. $-\frac{2}{17}e^{-2x}\left(\cos\frac{x}{2}+4\sin\frac{x}{2}\right)+C$.

8. $2x\sin\frac{x}{2}+4\cos\frac{x}{2}+C$.

9. $\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\ln(1+x^2)+C$.

10. $-\frac{1}{2}x^2+x\tan x+\ln|\cos x|+C$.

11. $x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C$.

12. $-\frac{e^{-2t}}{2}\left(t+\frac{1}{2}\right)+C$.

13. $x(\ln x)^2-2x\ln x+2x+C$.

14. $-\frac{1}{4}x\cos 2x+\frac{1}{8}\sin 2x+C$.

15. $\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2}x^2\sin x+x\cos x-\sin x+C$.

16. $\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x-1)-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+C$.

17. $-\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{3}{2}\right)\cos 2x+\frac{x}{2}\sin 2x+C$.

18. $-\frac{1}{x}(\ln^3 x+3\ln^2 x+6\ln x+6)+C$.

19. $3e^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2)+C$.

20. $\frac{x}{2}(\cos\ln x+\sin\ln x)+C$.

21. $x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C$.

22. $\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{5}e^x\sin 2x-\frac{1}{10}e^x\cos 2x+C$.

习题 4－4（第 268 页）

1. $\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+9x-27\ln|x+3|+C$.

2. $\ln|x-2|+\ln|x+5|+C$.

3. $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+8\ln|x|-4\ln|x+1|-3\ln|x-1|+C$.

4. $\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)+\sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$.

5. $2\ln|x+2|-\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{3}{2}\ln|x+3|+C$.

6. $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+C$.

7. $\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$.

8. $\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}\arctan x+C$.

9. $-\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+1}{x^2+x+1}+\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$.

10. $\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}x+1)$

$+\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}x-1)+C$.

11. $-\frac{x+1}{x^2+x+1}-\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$.

12. $\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan x}{\sqrt{3}}+C$.

13. $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}+C$.

14. $\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}+C$.

15. $\ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+C$.

16. $\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+C.$

17. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(1+x)^2}-3\sqrt[3]{x+1}+3\ln|1+\sqrt[3]{1+x}|+C.$

18. $\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+x+C.$

19. $x-4\sqrt{x+1}+4\ln(\sqrt{1+x}+1)+C.$

20. $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln(\sqrt[4]{x}+1)+C.$

21. $\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\right|+2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C$

或 $\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{|x|}-\arcsin x+C.$

22. $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+C.$

习题 4—5（第 272 页）

1. $\frac{1}{2}\ln|2x+\sqrt{4x^2-9}|+C.$

2. $\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}+C.$

3. $\ln[(x-2)+\sqrt{5-4x+x^2}]+C.$

4. $\frac{x}{2}\sqrt{2x^2+9}+\frac{9\sqrt{2}}{4}\ln(\sqrt{2}x+\sqrt{2x^2+9})+C.$

5. $\frac{x}{2}\sqrt{3x^2-2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\ln|\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2-2}|+C.$

6. $\frac{e^{2x}}{5}(\sin x+2\cos x)+C.$

7. $\left(\frac{x^2}{2}-1\right)\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{4}\sqrt{4-x^2}+C.$

8. $\frac{x}{18(9+x^2)}+\frac{1}{54}\arctan\frac{x}{3}+C.$

9. $-\frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$

10. $-\frac{e^{-2x}}{13}(2\sin 3x+3\cos 3x)+C.$

11. $-\frac{\sin 8x}{16}+\frac{\sin 2x}{4}+C.$

12. $x\ln^3 x-3x\ln^2 x+6x\ln x-6x+C.$

13. $\frac{1}{x}-\ln\left|\frac{1-x}{x}\right|+C.$

14. $2\sqrt{x-1}-2\arctan\sqrt{x-1}+C.$

15. $\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\arctan x+C.$

16. $\arccos\frac{1}{|x|}+C.$

17. $\frac{1}{9}\left(\ln|2+3x|+\frac{2}{2+3x}\right)+C.$

18. $\frac{\cos^5 x\sin x}{6}+\frac{5\cos^3 x\sin x}{24}+\frac{15}{24}\left(\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}\right)+C.$

19. $\frac{x(x^2-1)\sqrt{x^2-2}}{4}-\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-2}|+C.$

20. $\frac{1}{\sqrt{21}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}\tan\frac{x}{2}+\sqrt{7}}{\sqrt{3}\tan\frac{x}{2}-\sqrt{7}}\right|+C.$

21. $\frac{\sqrt{2x-1}}{x}+2\arctan\sqrt{2x-1}+C.$

22. $\sqrt{(1-x)(1+x)}+2\arcsin\sqrt{\frac{x+1}{2}}+C.$

23. $\frac{1}{2}\ln|x^2-2x-1|+\frac{3}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-(\sqrt{2}+1)}{x+(\sqrt{2}-1)}\right|+C.$

24. $-\sqrt{1+x-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C.$

25. $\frac{1}{12}x^3-\frac{25}{16}x+\frac{125}{32}\arctan\frac{2x}{5}+C.$

总习题四（第 272 页）

1. $\frac{1}{2}\ln\frac{|e^x-1|}{e^x+1}+C.$　　　2. $\frac{1}{2(1-x)^2}-\frac{1}{1-x}+C.$

3. $\frac{1}{6a^3}\ln\left|\frac{a^3+x^3}{a^3-x^3}\right|+C.$ 4. $\ln|x+\sin x|+C.$

5. $\ln x(\ln\ln x-1)+C.$ 6. $\frac{1}{2}\arctan\sin^2x+C.$

7. $\frac{1}{3}\tan^3x-\tan x+x+C.$

8. $\frac{1}{8}(\frac{1}{3}\cos 6x-\frac{1}{2}\cos 4x-\cos 2x)+C.$

9. $\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{24}\ln(x^6+4)+C.$ 10. $a\arcsin\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+C.$

11. $\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x(x+1)}\right|+C.$ 12. $\frac{1}{4}x^2+\frac{x}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C.$

13. $\frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)+C.$

14. $\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C.$ 15. $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C.$

16. $\frac{1}{3a^4}\left[\frac{3x}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{x^3}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}\right]+C.$

17. $-\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C.$

18. $(4-2x)\cos\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+C.$

19. $x\ln(1+x^2)-2x+2\arctan x+C.$

20. $\frac{\sin x}{2\cos^2x}-\frac{1}{2}\ln|\sec x+\tan x|+C.$

21. $(x+1)\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+C.$

22. $\sqrt{2}\ln(|\csc\frac{x}{2}|-|\cot\frac{x}{2}|)+C.$

23. $\frac{x^4}{8(1+x^8)}+\frac{1}{8}\arctan x^4+C.$

24. $\frac{x^4}{4}+\ln\frac{\sqrt[4]{x^4+1}}{x^4+2}+C.$

25. $\frac{1}{32}\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right|+\frac{1}{16}\arctan\frac{x}{2}+C.$

26. $\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}-x+C$ 或 $\sec x+x-\tan x+C.$

27. $x\tan\frac{x}{2}+C.$ 　　28. $e^{\sin x}(x-\sec x)+C.$

29. $\ln\frac{x}{(\sqrt[6]{x}+1)^6}+C.$ 　　30. $\frac{1}{1+e^x}+\ln\frac{e^x}{1+e^x}+C.$

31. $\arctan(2\operatorname{sh} x)+C.$

32. $\frac{xe^x}{e^x+1}-\ln(1+e^x)+C.$

33. $x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+2x+C.$

34. $\frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}}-\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C.$

35. $\frac{1}{4}(\arcsin x)^2+\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}\arcsin x-\frac{x^2}{4}+C.$

36. $\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}(x^2+2)\arctan x-\frac{1}{9}x(x^2+6)+C.$

37. $-\ln|\csc x+1|+C.$

38. $\ln|\tan x|-\frac{1}{2\sin^2 x}+C.$

39. $\frac{1}{3}\ln(2+\cos x)-\frac{1}{2}\ln(1+\cos x)+\frac{1}{6}\ln(1-\cos x)+C.$

40. $\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\sin x}\right|+C.$

第　五　章

习题 5－1（第 281 页）

1. $\frac{1}{3}(b^3-a^3)+b-a.$

2. (1) $\frac{1}{2}(b^2-a^2)$； 　(2) $e-1.$

4. 88.2(kN).

习题 5－2（第 286 页）

2. (1) $6\leqslant\int_1^4(x^2+1)dx\leqslant 51$；

(2) $\pi \leqslant \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} (1+\sin^2 x)\mathrm{d}x \leqslant 2\pi$;

(3) $\frac{\pi}{9} \leqslant \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} x\arctan x\mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{3}\pi$;

(4) $-2\mathrm{e}^2 \leqslant \int_2^0 \mathrm{e}^{x^2-x}\mathrm{d}x \leqslant -2\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}$.

4. (1) $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$ 较大；　　(2) $\int_1^2 x^3\mathrm{d}x$ 较大；

(3) $\int_1^2 \ln x\mathrm{d}x$ 较大；　　(4) $\int_0^1 x\mathrm{d}x$ 较大；

(5) $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ 较大.

习题 5—3（第 294 页）

1. $0, \frac{\sqrt{2}}{2}$.　　2. $\cot t$.

3. $\frac{\cos x}{\sin x-1}$.　　4. 当 $x=0$ 时.

5. (1) $2x\sqrt{1+x^4}$;　　(2) $\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}-\frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}$;

(3) $(\sin x-\cos x)\cdot\cos(\pi\sin^2 x)$.

6. (1) $a\left(a^2-\frac{a}{2}+1\right)$;　　(2) $2\frac{5}{8}$;　　(3) $45\frac{1}{6}$;

(4) $\frac{\pi}{6}$;　　(5) $\frac{\pi}{3}$;　　(6) $\frac{\pi}{3a}$;

(7) $\frac{\pi}{6}$;　　(8) $\frac{\pi}{4}+1$;　　(9) -1;

(10) $1-\frac{\pi}{4}$;　　(11) 4;　　(12) $\frac{8}{3}$.

8. 提示:应用三角学中的积化和差公式.

9. (1) 1;　　(2) 2.

10. $\Phi(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3, & x\in[0,1),\\ \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}, & x\in[1,2].\end{cases}$　$\Phi(x)$在$(0,2)$内连续.

11. $\Phi(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{2}(1-\cos x), & 0\leqslant x\leqslant \pi,\\ 1, & x>\pi.\end{cases}$

习题 5—4（第 302 页）

1. (1) 0；　(2) $\frac{51}{512}$；　(3) $\frac{1}{4}$；

(4) $\pi-\frac{4}{3}$；　(5) $\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}$；　(6) $\frac{\pi}{2}$；

(7) $\sqrt{2}(\pi+2)$；　(8) $1-\frac{\pi}{4}$；　(9) $\frac{a^4}{16}\pi$；

(10) $\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}$；　(11) $\frac{1}{6}$；　(12) $2+2\ln\frac{2}{3}$

(13) $1-2\ln 2$；　(14) $(\sqrt{3}-1)a$；　(15) $1-e^{-\frac{1}{2}}$；

(16) $2(\sqrt{3}-1)$；　(17) $\frac{\pi}{2}$；　(18) $\frac{2}{3}$；

(19) $\frac{4}{3}$；　(20) $2\sqrt{2}$.

2. (1) 0；　(2) $\frac{3}{2}\pi$；　(3) $\frac{\pi^3}{324}$；

(4) 0.

习题 5—5（第 306 页）

1. $1-\frac{2}{e}$.　　2. $\frac{1}{4}(e^2+1)$.

3. $-\frac{2\pi}{\omega^2}$.　　4. $\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{9}\right)\pi+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

5. $4(2\ln 2-1)$.　　6. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$.

7. $\frac{1}{5}(e^{\pi}-2)$.　　8. $2-\frac{3}{4\ln 2}$.

9. $\frac{\pi^3}{6}-\frac{\pi}{4}$.　　10. $\frac{1}{2}(e\sin 1-e\cos 1+1)$.

11. $2\left(1-\frac{1}{e}\right)$.

12. $\begin{cases} \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot m}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot (m+1)}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & m\text{ 为奇数}, \\ \dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot m}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (m+1)}, & m\text{ 为偶数}. \end{cases}$

13. $J_m=\begin{cases} \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot m}\cdot\dfrac{\pi^2}{2}, & m\text{ 为偶数}. \\ \dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot (m-1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot m}\pi, & m\text{ 为大于 1 的奇数}, \end{cases}$

$J_1=\pi$.

习题 5－6（第 314 页）

1. $145.6(\mathrm{m}^2)$.

2. (1) 1.3890；　(2) 1.3506；　(3) 1.3506.

3. (1) 0.7188；　(2) 0.6938；　(3) 0.6931.

习题 5－7（第 320 页）

1. (1) $\frac{1}{3}$；　(2) 发散；　(3) $\frac{1}{a}$；

(4) $\frac{p}{p^2-1}$；　(5) $\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$；　(6) π；

(7) 1；　(8) 发散；　(9) $2\frac{2}{3}$；

(10) $\frac{\pi}{2}$.

2. 当 $k>1$ 时收敛于 $\frac{1}{(k-1)(\ln 2)^{k-1}}$；当 $k\leqslant 1$ 时发散；当 $k=1-\frac{1}{\ln\ln 2}$ 时取得最小值.

3. $n!$.

*习题 5－8（第 330 页）

1. (1) 收敛；　(2) 收敛；　(3) 收敛；

(4) 发散；　(5) 收敛；　(6) 发散；

(7) 收敛；　(8) 收敛.

3. (1) $\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right), n>0$;　　(2) $\Gamma(p+1), p>-1$;

(3) $\frac{1}{|n|}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right), \frac{m+1}{n}>0$.

总习题五（第 331 页）

1. (1) 必要，充分；(2) 充分必要；(3) 收敛；(4) 不一定.

2. (1) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$;　　(2) $\frac{1}{p+1}$;　　(3) -1;

(4) $af(a)$;　　(5) $\frac{\pi^2}{4}$.

4. **提示**：$1-x^p<\frac{1}{1+x^p}<1$.

5. **提示**：(1) 对任意实数 t，

$$\int_a^b f^2(x)dx+2t\int_a^b f(x)g(x)dx+t^2\int_a^b g^2(x)dx\geqslant 0;$$

(2) 利用柯西－施瓦茨不等式.

6. **提示**：利用柯西－施瓦茨不等式.

7. (1) $\frac{\pi}{2}$;　　(2) $\frac{\pi}{8}\ln 2$；**提示**：令 $x=\frac{\pi}{4}-u$.

(3) $\frac{\pi}{4}$;　　(4) $2(\sqrt{2}-1)$;

(5) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

10. $1-\ln(1+e^{-1})$.

13. (1) 收敛；　　(2) 收敛；

(3) 收敛；**提示**：先分部积分，再判别.

(4) 收敛.

14. (1) $-\frac{\pi}{2}\ln 2$；**提示**：$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x dx$.

(2) $\frac{\pi}{4}$. **提示**：令 $x=\frac{1}{t}$.

第 六 章

习题6－2（第342页）

1. (1) $\frac{1}{6}$；　　(2) 1；

   (3) $\frac{32}{3}$；　　(4) $\frac{32}{3}$.

2. (1) $2\pi+\frac{4}{3}, 6\pi-\frac{4}{3}$；　　(2) $\frac{3}{2}-\ln 2$；

   (3) $e+\frac{1}{e}-2$；　　(4) $b-a$.

3. $\frac{9}{4}$.　　4. $\frac{16}{3}p^2$.

5. (1) πa^2；　　(2) $\frac{3}{8}\pi a^2$；　　(3) $18\pi a^2$.

6. $3\pi a^2$.　　7. $\frac{a^2}{4}(e^{2\pi} \quad e^{-2\pi})$.

8. (1) $\frac{5}{4}\pi$；　　(2) $\frac{\pi}{6}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

9. $\frac{e}{2}$.　　10. $\frac{8}{3}a^2$.

习题6－3（第350页）

1. $2\pi a x_0^2$.　　2. $\frac{128}{7}\pi, \frac{64}{5}\pi$.

3. $\frac{32}{105}\pi a^3$.

5. (1) $\frac{3}{10}\pi$；　　(2) $\frac{\pi a^2}{4}\left[2a+\frac{a}{2}(e^2 \quad e^{-2})\right]$；

   (3) $160\pi^2$；　　(4) $7\pi^2 a^3$.

6. $2\pi^2 a^2 b$.　　7. $\frac{1}{6}\pi h[2(ab+AB)+aB+bA]$.

8. $\frac{4\sqrt{3}}{3}R^3$.

习题6－4（第356页）

1. $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.　　2. $2\sqrt{3}-\frac{4}{3}$.

3. $\frac{8}{9}\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right]$.

4. $\frac{y}{2p}\sqrt{p^2+y^2}+\frac{p}{2}\ln\frac{y+\sqrt{p^2+y^2}}{p}$.

5. $6a$.　　6. $\frac{a}{2}\pi^2$.　　7. $\left(\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a,\frac{3}{2}a\right)$.

8. $\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}e^{a\varphi}$.

9. $\ln\frac{3}{2}+\frac{5}{12}$.　　10. $8a$.

习题6－5（第362页）

1. 0.18k(J).　　2. $800\pi\ln 2$(J).

3. (2) 9.75×10^5(kJ).　　4. $\frac{27}{7}kc^{\frac{2}{3}}a^{\frac{7}{3}}$(其中 k 为比例常数).

5. $\sqrt{2}-1$(cm).　　6. 57697.5(kJ).

7. 205.8(kN).　　8. 17.3(kN).

9. 14373(kN).

10. 1.65(N).

11. 取 y 轴通过细直棒，$F_y=Gm\rho\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\sqrt{a^2+l^2}}\right)$，$F_x=-\frac{Gm\rho l}{a\sqrt{a^2+l^2}}$.

12. 引力的大小为$\frac{2Gm\rho}{R}\sin\frac{\varphi}{2}$，方向为 M 指向圆弧的中点.

习题6－6（第367页）

1. 12(m/s).　　2. $1-\frac{3}{e^2}$.

3. (1) $\frac{5}{\pi}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$(A)；(2) $\frac{5}{\pi}(1+\cos 100\pi t_0)$(A)；

(3) $\frac{1}{300}$(s), 0.0073(s).

4. $\frac{I_m}{2}$　　　　5. $\sqrt{\frac{c}{T}}a$

总习题六（第368页）

1. $\frac{5}{4}$m.　　　　2. $\frac{\pi-1}{4}a^2$.

3. $a=-\frac{5}{3}, b=2, c=0$.　　4. $\frac{512}{7}\pi$.

5. $4\pi^2$.　　　　6. $\sqrt{6}+\frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

7. $\frac{4}{3}\pi r^4 g$.　　　　8. $\frac{1}{2}\gamma ab(2h+b\sin\alpha)$.

9. $\boldsymbol{F}=\left\{\frac{3}{5}Ga^2, \frac{3}{5}Ga^2\right\}$.

第　七　章

习题7—1（第374页）

1. A:IV，　B:V，　C:VIII，　D:III.

2. A 在 xOy 面上，B 在 yOz 面上，C 在 x 轴上，D 在 y 轴上.

3. (1) $(a,b,-c)$, $(-a,b,c)$, $(a,-b,c)$;

(2) $(a,-b,-c)$, $(-a,b,-c)$, $(-a,-b,c)$;

(3) $(-a,-b,-c)$.

4. xOy 面：$(x_0,y_0,0)$，yOz 面：$(0,y_0,z_0)$，xOz 面：$(x_0,0,z_0)$；

x 轴：$(x_0,0,0)$，y 轴：$(0,y_0,0)$，z 轴：$(0,0,z_0)$.

6. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,0\right)$、$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,0\right)$、$\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}a,0\right)$、

$\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0\right)$、

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,a\right)$、$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,a\right)$、$\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}a,a\right)$、

$\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}a, a\right)$.

7. x 轴：$\sqrt{34}$，y 轴：$\sqrt{41}$，z 轴：5.

8. $(0,1,-2)$.

习题7－2（第380页）

1. $5\boldsymbol{a}-11\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{c}$.

3. $\overrightarrow{D_1A}=-\left(\boldsymbol{c}+\frac{1}{5}\boldsymbol{a}\right)$，$\overrightarrow{D_2A}=-\left(\boldsymbol{c}+\frac{2}{5}\boldsymbol{a}\right)$，

   $\overrightarrow{D_3A}=-\left(\boldsymbol{c}+\frac{3}{5}\boldsymbol{a}\right)$，$\overrightarrow{D_4A}=-\left(\boldsymbol{c}+\frac{4}{5}\boldsymbol{a}\right)$，

习题7－3（第391页）

1. 2.　　　　　　　　　2. $A(-2,3,0)$.

3. $\{1,-2,-2\}$，$\{-2,4,4\}$.

4. 模：2；方向余弦：$-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}$；方向角：$\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$.

5. (1) 垂直于 x 轴，平行于 yOz 平面；

   (2) 指向与 y 轴正向一致，垂直于 xOz 平面；

   (3) 平行于 x 轴，垂直于 xOy 平面.

6. $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{38}$，$|\boldsymbol{c}|=3$；

   $\boldsymbol{a}=\sqrt{3}\,\boldsymbol{a}^{\circ}$，$\boldsymbol{b}=\sqrt{38}\,\boldsymbol{b}^{\circ}$，$\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{c}^{\circ}$.

7. 13，$7\boldsymbol{j}$.

8. $\left\{\frac{6}{11},\frac{7}{11},-\frac{6}{11}\right\}$ 或 $\left\{-\frac{6}{11},-\frac{7}{11},\frac{6}{11}\right\}$.

习题7－4（第402页）

1. (1) 3，$5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}$；　　　(2) -18，$10\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+14\boldsymbol{k}$；

   (3) $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{3}{2\sqrt{21}}$.

2. $-\frac{3}{2}$.　　　　　　　　3. $\pm\frac{1}{\sqrt{17}}(3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})$.

4. 5880J. 5. $|\boldsymbol{F}_1|x_1\sin\theta_1=|\boldsymbol{F}_2|x_2\sin\theta_2$.

6. 2. 7. $\lambda=2\mu$.

9. (1) $-8\boldsymbol{j}-24\boldsymbol{k}$； (2) $-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$； (3) 2.

10. $\frac{1}{2}\sqrt{19}$.

习题7－5（第410页）

1. $4x+4y+10z-63=0$. 2. $x^2+y^2+z^2-2x-6y+4z=0$.

3. 以点$(1,-2,-1)$为球心，半径等于$\sqrt{6}$的球面.

4. $\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+(y+1)^2+\left(z+\frac{4}{3}\right)^2=\frac{116}{9}$；它表示一球面，球心为点 $\left(-\frac{2}{3},-1,-\frac{4}{3}\right)$，半径等于$\frac{2}{3}\sqrt{29}$.

5. $y^2+z^2=5x$. 6. $x^2+y^2+z^2=9$.

7. 绕x轴：$4x^2-9(y^2+z^2)=36$；绕y轴：$4(x^2+z^2)-9y^2=36$.

10. (1) xOy平面上的椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$绕$x$轴旋转一周；

(2) xOy平面上的双曲线$x^2-\frac{y^2}{4}=1$绕y轴旋转一周；

(3) xOy平面上的双曲线$x^2-y^2=1$绕x轴旋转一周；

(4) yOz平面上的直线$z=y+a$绕z轴旋转一周.

习题7－6（第416页）

3. 母线平行于x轴的柱面方程：$3y^2-z^2=16$；

母线平行于y轴的柱面方程：$3x^2+2z^2=16$.

4. $x^2+y^2+(1-x)^2=9, z=0$.

5. (1)

$$\begin{cases} x=\frac{3}{\sqrt{2}}\cos t, \\ y=\frac{3}{\sqrt{2}}\cos t, \quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi). \\ z=3\sin t; \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} x=1+\sqrt{3}\cos\theta, \\ y=\sqrt{3}\sin\theta, \\ z=0. \end{cases} \quad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi).$$

6.
$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ z=0; \end{cases} \quad \begin{cases} y=a\sin\dfrac{z}{b}, \\ x=0; \end{cases} \quad \begin{cases} x=a\cos\dfrac{z}{b}, \\ y=0. \end{cases}$$

7. $x^2+y^2\leqslant ax$; $x^2+z^2\leqslant a^2, x\geqslant 0, z\geqslant 0$.

8. $x^2+y^2\leqslant 4$; $x^2\leqslant z\leqslant 4$; $y^2\leqslant z\leqslant 4$.

习题7—7（第423页）

1. $3x-7y+5z-4=0$.　　2. $2x+9y-6z-121=0$.

3. $x-3y-2z=0$.

4. (1) 即 yOz 面；　　(2) 平行于 xOz 面的平面；

(3) 平行于 z 轴的平面；　　(4) 通过 z 轴的平面；

(5) 平行于 x 轴的平面；　　(6) 通过 y 轴的平面；

(7) 通过原点的平面.

5. $\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}$.　　6. $x+y-3z-4=0$.

7. $(1,-1,3)$.

8. (1) $y+5=0$;　　(2) $x+3y=0$;　　(3) $9y-z-2=0$.

9. 1.

习题7—8（第431页）

1. $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{5}$.　　2. $\dfrac{x-3}{-4}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$.

3. $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{3}$;　$\begin{cases} x=1-2t, \\ y=1+t, \\ z=1+3t. \end{cases}$

4. $16x-14y-11z-65=0$.　　5. $\cos\varphi=0$.

7. $\frac{x}{-2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{1}$.

8. $8x-9y-22z-59=0$.

9. $\varphi=0$.

10. (1) 平行； (2) 垂直； (3) 直线在平面上.

11. $x-y+z=0$.

12. $\left(-\frac{5}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$.

13. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

15. $\begin{cases}17x+31y-37z-117=0,\\4x-y+z-1=0.\end{cases}$

习题7－9（第439页）

2. 投影曲线的方程：$\begin{cases}y^2=2x-9,\\z=0;\end{cases}$ 原曲线是位于平面 $z=3$ 上的抛物线.

3. (1) 圆；(2) 椭圆；(3) 双曲线；(4) 抛物线；(5) 双曲线.

总习题七（第439页）

1. $(0,2,0)$.

2. $\sqrt{30}$.

3. $\overrightarrow{AD}=c+\frac{1}{2}a$, $\overrightarrow{BE}=a+\frac{1}{2}b$, $\overrightarrow{CF}=b+\frac{1}{2}c$.

5. $\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{OA}}\overrightarrow{OM}=1$, $\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{OM}}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

6. 1.

7. $\arccos\frac{2}{\sqrt{7}}$.

8. $\frac{\pi}{3}$.

9. $z=-4$, $\theta_{\min}=\frac{\pi}{4}$.

10. 30.

11. $\{14,10,2\}$.

12. $c=5a+b$.

13. $4(z-1)=(x-1)^2+(y+1)^2$.

14. (1) $\begin{cases}x=0,\\z=2y^2,\end{cases}$ z 轴； (2) $\begin{cases}x=0\\\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{36}=1,\end{cases}$ y 轴；

(3) $\begin{cases}x=0,\\z=\sqrt{3}y,\end{cases}$ z 轴； (4) $\begin{cases}z=0,\\x^2-\frac{y^2}{4}=1,\end{cases}$ x 轴.

15. $x+\sqrt{26}y+3z-3=0$ 或 $x-\sqrt{26}y+3z-3=0$.

16. $x-2y+1=0$.　　17. $\frac{x-1}{16}=\frac{y}{19}=\frac{z-1}{28}$.

18. $(0,0,\frac{1}{5})$.

19. $z=0, x^2+y^2=x+y$;

$x=0, 2y^2+2yz+z^2-4y-3z+2=0$;

$y=0, 2x^2+2xz+z^2-4x-3z+2=0$.

20. $z=0, (x-1)^2+y^2\leqslant 1$;

$x=0, (\frac{z^2}{2}-1)^2+y^2\leqslant 1, z\geqslant 0$;

$y=0, x\leqslant z\leqslant \sqrt{2x}$.

目　　录

第八章　多元函数微分法及其应用

上册中我们讨论的都是只有一个自变量的函数，这种函数叫做一元函数．但通常我们所研究的问题往往牵涉到多方面的因素，反映到数学上，就是一个变量依赖于多个变量的情形．这就提出了多元函数以及多元函数的微分和积分问题．本章将在一元函数微分学的基础上，讨论多元函数的微分法及其应用．讨论中我们以二元函数为主，因为从一元函数到二元函数会产生新的问题，而从二元函数到二元以上的多元函数则可以类推．

第一节　多元函数的基本概念

一、多元函数概念

在很多自然现象以及实际问题中，经常会遇到多个变量之间的依赖关系，举例如下：

例 1　圆柱体的体积 V 和它的底半径 r、高 h 之间具有关系

$$V=\pi r^2 h.$$

这里，V 是随着 r、h 的变化而变化的，当 r、h 在一定范围（$r>0$，$h>0$）内取定一对值时，V 的对应值就随之确定．

例 2　一定量的理想气体的压强 p、体积 V 和绝对温度 T 之间具有关系

$$p=\frac{RT}{V},$$

其中 R 为常数．这里，p 是随着 V、T 的变化而变化的，当 V、T 在一定范围（$V>0$，$T>0°K$）内取定一对值时，p 的对应值就随之确定．

例 3 设 R 是电阻 R_1、R_2 并联后的总电阻，根据电学知道，它们之间具有关系

$$R=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}.$$

这里，R 是随着 R_1、R_2 的变化而变化的，当 R_1、R_2 在一定范围 $(R_1>0,\ R_2>0)$ 内取定一对值时，R 的对应值就随之确定。

上面三个例子的具体意义虽各不相同，但它们却有一个共同的性质，抽出这些共性就可得出以下二元函数的定义。

定义 1 设有变量 x、y 和 z. 如果当变量 x、y 在一定范围内任意取定一对值时，量 z 按照一定的法则，总有确定的数值和它们对应，则 z 叫做 x、y 的二元函数，记作

$$z=f(x,\ y) \quad \text{或} \quad z=z(x,\ y),$$

其中变量 x、y 叫做自变量，而 z 也叫做因变量. 自变量 x、y 的变化范围叫做函数的定义域.

类似地可以定义三元函数 $u=f(x,\ y,\ z)$ 以及三元以上的函数.

例如，长方体体积 V 是它的长 a、宽 b 和高 c 的函数

$$V=abc;$$

电流通过电阻时所作的功 P 是电阻 R、电流 I 和时间 t 的函数

$$P=I^2Rt;$$

等等.

二元以及二元以上的函数统称为多元函数.

如同我们用 x 轴上的点来表示数值 x 一样，我们可用 xOy 平面上的点 $P(x,\ y)$ 来表示一对有序数组 $x,\ y$. 于是函数 $z=f(x,\ y)$ 也可简记为 $z=f(P)$，而称 z 为点 P 的函数. 类似地，可用空间内的一点 $P(x,\ y,\ z)$ 来表示有序数组 $x,\ y,\ z$. 函数 $u=f(x,\ y,\ z)$ 也就可简记为 $u=f(P)$，等等。

关于函数的定义域，与一元函数相类似，我们作如下约定：在一般地讨论用算式表达的二元函数 $z=f(x, y)$ 时，就以使这个算式有确定值的自变量 x、y 的变化范围所确定的点集（具有某种性质的点的全体）为这个函数的定义域。例如，函数 $z=\ln(x+y)$ 的定义域为适合 $x+y>0$ 的点的全体，它是一个平面点集，其中的点 (x, y) 具有性质：$x+y>0$，我们把它简记为 $\{(x, y)\mid x+y>0\}$（图 8-1）。又如，函数 $z=\arcsin(x^2+y^2)$ 的定义域为适合 $x^2+y^2\leqslant 1$ 的点的全体，即平面点集 $\{(x, y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$（图 8-2）。

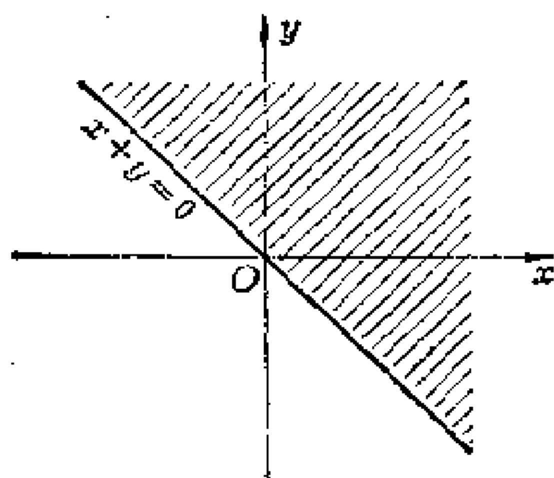


图 8-1

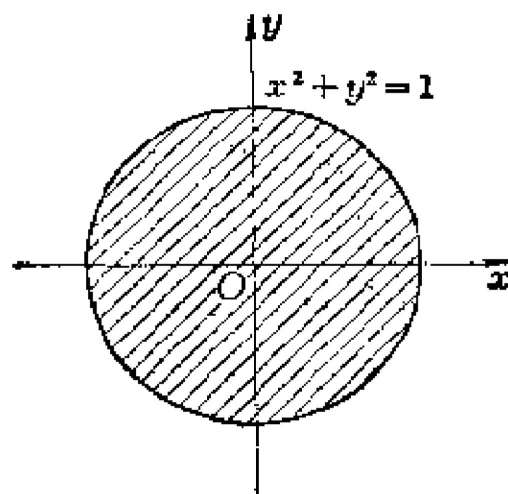


图 8-2

常见的二元函数的定义域是平面上的一个区域。为了确切地说明区域的概念，我们引入以下一些定义。

以 $P_0(x_0, y_0)$ 为中心、$\delta>0$ 为半径的圆的内部的点的全体，即平面点集 $\{(x, y)\mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\}$，称为点 P_0 的 δ 邻域，记为 $N(P_0, \delta)$。

设 E 为平面上的一个点集，如果点 P 属于 E，且存在某个邻域，使这邻域中的点都属于 E，则称 P 为集合 E 的内点（图 8-3）。

如果集合 E 的点都是 E 的内点，则称 E 为开集。例如，集合 $E_1=\{(x, y)\mid 1<x^2+y^2<4\}$ 中每个点都是 E_1 的内点，故 E_1 为开集。

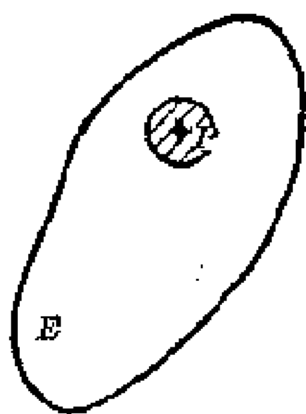


图 8-3

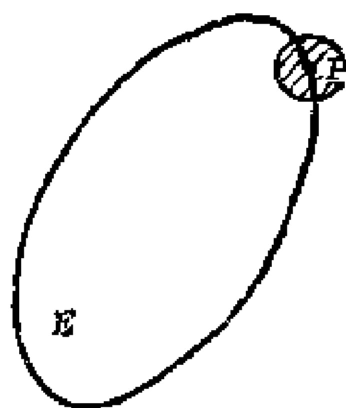


图 8-4

如果点 P 的任意一个邻域中都有属于 E 的点，也有不属于 E 的点(P 可以属于 E，也可以不属于 E)，则称 P 为 E 的边界点(图 8-4)．E 的边界点的全体称为 E 的边界．例如，在上例中 E_1 的边界是圆周 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2=4$．

如果集合 D 是开集，且对于 D 中任意二点，都可以用完全落在 D 内的折线连接起来(称 D 的这种性质为连通性)，则称 D 为区域或开区域．换句话说，**区域是连通的开集**．例如，$\{(x, y)|x+y>0\}$，$\{(x, y)|1<x^2+y^2<4\}$ 都是区域．

区域连同它的边界一起，称为闭区域．例如，$\{(x, y)|x+y\geqslant 0\}$，$\{(x, y)|1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$ 都是闭区域．

以后在不需要区分开区域和闭区域时，我们统称它们为区域，并用字母 D 表示．

如果点集 E 可以被包含在一个以原点为中心的圆内，则称 E 为有界点集，否则称为无界点集．例如，$\{(x, y)|1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$ 是有界闭区域，$\{(x, y)|x+y>0\}$ 是无界开区域．

上述关于平面点集的内点、邻域、开集、区域、闭区域等概念可以完全类似地推广到空间点集的情形．

我们曾利用平面直角坐标系来表示一元函数 $y=f(x)$ 的图形，一般说来，它是平面上的一条曲线．对于二元函数 $z=f(x, y)$，

我们可以利用空间直角坐标系来表示它的图形. 设函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 xOy 坐标面上某一区域 D, 对于 D 中的每一点 $P(x, y)$, 在空间可以作出一点 $M(x, y, f(x, y))$ 与它对应. 当点 $P(x, y)$ 在 D 中变动时, 点 $M(x, y, f(x, y))$ 就在空间相应地变动, 一般说来, 它的轨迹是一个曲面(图 8-5). 这个曲面就称为二元函数 $z=f(x, y)$ 的图形. 因此, 二元函数可用一个曲面作为它的几何表示.

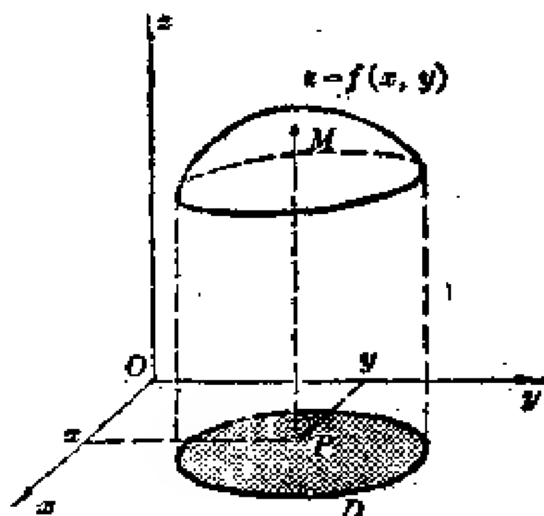


图 8-5

例如, 由空间解析几何知道, 线性函数

$$z=ax+by+c$$

的图形是一个平面; 由方程

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

所确定的函数 $z=f(x, y)$ 的图形是球心在原点、半径为 a 的球面. 它的定义域是圆形闭区域 $D=\{(x, y)\,|\,x^2+y^2\leqslant a^2\}$. 在 D 的内部任一点 (x, y) 处, 这函数有两个对应值, 一个为 $\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, 另一个为 $-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$. 因此, 这是多值函数. 取正值的一个表示上半球面, 取负值的一个表示下半球面. 以后除了对二元函数 $z=f(x, y)$ 另作声明外, 总假定它是单值的; 如果遇到多值函数, 我们可以把它拆成几个单值函数后再分别加以讨论.

二、二元函数的极限

现在来讨论二元函数 $z=f(x, y)$ 当自变量 $x\to x_0$, $y\to y_0$, 即点 $P(x, y)\to P_0(x_0, y_0)$ 时的极限定义.

设函数 $z=f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某一邻域内有定义(点

P_0 可以除外)，$P(x, y)$ 是该邻域内异于 P_0 的任意一点．如果当点 P 以任何方式趋近于点 P_0 时，函数的对应值 $f(x, y)$ 趋近于一个确定的常数 A，我们就说，A 是函数 $z=f(x, y)$ 当 $x\to x_0$，$y\to y_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x, y)=A$$

或
$$f(x, y)\to A \quad (x\to x_0,\ y\to y_0).$$

在这里，我们注意到点 $P(x, y)$ 趋近于点 $P_0(x_0, y_0)$，就是它们之间的距离趋于零，即

$$\rho=|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\to 0.$$

因此上述极限记号也可记作

$$f(x, y)\to A \quad (\rho\to 0).$$

类似于一元函数极限的"ε-δ"定义，上述极限也可用"ε-δ"的方式定义如下．

定义 2 **设函数 $z=f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某一邻域内有定义(点 P_0 可以除外)，如果对于每一个任意给定的正数 ε，总存在一个正数 δ，使得对于适合不等式**

$$0<|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

的一切点 $P(x, y)$，都有

$$|f(x, y)-A|<\varepsilon \tag{1}$$

成立，则称 A 为函数 $z=f(x, y)$ 当 $x\to x_0$，$y\to y_0$ 时的极限①．

利用点的邻域概念，上述极限定义也可描述为：对于点 A 的任何邻域$(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$，总存在点 P_0 的 δ 邻域 $N(P_0, \delta)$，使这个邻域内不与 P_0 重合的任意一点 P 的函数值 $f(P)=f(x, y)$，

① 如果函数 $z=f(x, y)$ 在 P_0 的任一邻域中除 P_0 外，尚有不属于函数的定义域 D 的点，但又总有异于 P_0 的属于 D 的点，则只要对 D 内适合不等式 $0<|PP_0|<\delta$ 的点 P，有不等式(1)成立，便称函数 $f(P)$ 当 $P\to P_0$ 时的极限为 A．在后面讨论函数的连续性及函数的偏导数等问题时，对上述这类点的情形，也作类似的规定，不再说明．

都落在 A 的 ε 邻域内．从几何上来说，就是在 P_0 的 δ 邻域内(P_0 可以除外)，函数 $z=f(x, y)$ 的图形将位于两个平行平面 $z=A-\varepsilon$ 和 $z=A+\varepsilon$ 之间．

利用点函数的概念，上述极限定义可用与一元函数的极限完全相同的形式来描述：对于任意给定的正数 ε，总存在一个正数 δ，使当 $0<|PP_0|<\delta$ 时，都有 $|f(P)-A|<\varepsilon$ 成立．这一形式的极限定义，对二元以上的函数也完全适用．

为了区别于一元函数的极限，我们把上述二元函数的极限叫做二重极限．

例 4 设 $f(x, y)=(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\quad(x^2+y^2\neq 0)$，

求证
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)=0.$$

证　因为
$$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2-y^2}-0\right|=|x^2+y^2|\cdot\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|\leqslant x^2+y^2,$$
可见，对任给 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$，则当 $0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$ 时，总有
$$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$$
成立，所以
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)=0.$$

我们必须注意，所谓二重极限存在，是指 $P(x, y)$ 以任何方式趋近于 $P_0(x_0, y_0)$ 时，函数都无限接近于 A．因此，如果 $P(x, y)$ 以某一特殊方式，例如沿着一条定直线或定曲线趋近于 $P_0(x_0, y_0)$ 时，即使函数无限接近于某一确定值，我们还不能由此断定函数的极限存在．但是反过来，如果当 $P(x, y)$ 以不同方式趋近于 $P_0(x_0, y_0)$ 时，函数趋近于不同的值，那末就可以断定这函数的极限不存在．下面用例子来说明这种情形．

考察函数

$$f(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

显然，当点 $P(x,\ y)$沿 x 轴趋近于点$(0,\ 0)$时，

$$\lim_{x\to 0} f(x,\ 0)=\lim_{x\to 0} 0=0;$$

又当点 $P(x,\ y)$沿 y 轴趋近于点$(0,\ 0)$时，

$$\lim_{y\to 0} f(0,\ y)=\lim_{y\to 0} 0=0.$$

虽然点 $P(x,\ y)$ 以上述两种特殊方式(沿 x 轴或沿 y 轴)趋近于原点时函数的极限存在并且相等，但是极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,\ y)$ 并不存在。这是因为当点 $P(x,\ y)$沿着直线 $y=kx$ 趋近于点$(0,\ 0)$时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2},$$

显然它是随着 k 的不同而改变的.

三、二元函数的连续性

明白了极限的概念，就不难讨论二元函数的连续性问题. 设函数 $z=f(x,\ y)$在区域 D 内有定义，$P_0(x_0,\ y_0)$是 D 的一个内点，$P(x,\ y)$是在 D 内而且是 P_0 的一个邻域内的任意点，我们给出二元函数在点 P_0 为连续的定义如下：

定义 3　如果当 $x\to x_0,\ y\to y_0$ 时，函数的极限存在，且等于它在点 $P_0(x_0,\ y_0)$处的函数值，即

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,\ y)=f(x_0,\ y_0),$$

那末就称函数 $z=f(x,\ y)$ 在点 P_0 处连续.

换句话说，如果当点 $P(x,\ y)$ 与点 $P_0(x_0,\ y_0)$ 的距离趋于零时，差值 $f(x,\ y)-f(x_0,\ y_0)$ 也趋近于零，那末二元函数在点 P_0 是

连续的.

采用"ε-δ"的方式以及利用点的邻域概念来描述函数 $z=f(x, y)$ 在点 P_0 处连续的定义，读者可自行给出.

如果二元函数在区域 D 内各点都连续，那末就称函数在 D 内连续. 二元连续函数的图形是一个无孔隙、无裂缝的曲面. 例如连续函数

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2} \qquad (x^2+y^2\leqslant 1)$$

的图形是球心在原点、半径等于 1 的上半球面.

函数的不连续点称为间断点. 上面已经讨论过的函数

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

当 $x\to 0$, $y\to 0$ 时的极限不存在，所以点 $(0, 0)$ 是函数的一个间断点. 二元函数的间断点可以形成一条曲线，例如函数

$$z=\sin\frac{1}{x^2+y^2-1}$$

在圆周 $x^2+y^2=1$ 上没有定义，所以该圆周上各点都是间断点.

类似地可给出二元以上的函数在某点是连续的定义，在此不再赘述.

与闭区间上一元连续函数的性质相类似，在有界闭区域上多元连续函数也有如下性质.

性质 1(最大值和最小值定理) **在有界闭区域 D 上的多元连续函数，在该区域上至少取得它的最大值和最小值各一次.** 这就是说，在 D 上至少有一点 P_1 及一点 P_2，使得 $f(P_1)$ 为最大值而 $f(P_2)$ 为最小值：

$$f(P_2)\leqslant f(P)\leqslant f(P_1) \quad (\text{点 } P \text{ 在 } D \text{ 上}).$$

性质 2(介值定理) **在有界闭区域上的多元连续函数，如果取得两个不同的函数值，则它在该区域上取得介于这两个值之间**

的任何值至少一次．特殊地，如果μ是在函数的最小值m和最大值M之间的一个数，则在D上至少有一点Q，使得$f(Q)=\mu$．

*性质3（一致连续性定理）　**在有界闭区域上的多元连续函数必定在该区域上一致连续**．这就是说，若$f(P)$在有界闭区域D上连续，那末对于任意给定的正数ε，总存在一个正数δ，使得对于区域D上的任意二点P_1、P_2，只要当$|P_1P_2|<\delta$时，都有

$$|f(P_1)-f(P_2)|<\varepsilon$$

成立．

我们指出：一元函数中关于极限的运算法则，对于多元函数仍然适用；根据极限运算法则，可以证明多元连续函数的和、差、积均为连续函数；在分母不为零处，连续函数的商是连续函数；多元连续函数的复合函数也是连续函数．

与一元的初等函数相类似，多元初等函数也是可由一个式子所表示的函数，而这个式子是由含多个自变量（如x，y等）的基本初等函数经过有限次的四则运算和复合步骤所构成的．例如，$\frac{x+x^2-y^2}{1+x^2}$，$\sin(x+y)$，$e^{x+y}\cdot\ln(1+x^2+y^2)$等都是多元初等函数．

根据上面指出的连续函数的和、差、积、商的连续性以及连续函数的复合函数的连续性，我们进一步可得如下结论：

一切多元初等函数在其定义区域内是连续的．

由多元初等函数的连续性，如要找它在一点P_0处的极限值，而该点又在此函数的定义区域内，则极限值就是函数在该点的函数值，即

$$\lim_{P\to P_0}f(P)=f(P_0).$$

例如　　$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}}(x^2-2xy+3y^2)=2^2-2\cdot2\cdot1+3\cdot1^2=3$，

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to \frac{1}{2}}} \arcsin\sqrt{x^2+y^2}=\arcsin\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{\pi}{6}.$$

习　题　8-1

1．已知函数 $f(x, y)=x^2+y^2-xy\operatorname{tg}\dfrac{x}{y}$，试求 $f(tx, ty)$。

2．试证函数 $F(x, y)=\ln x\cdot\ln y$ 满足关系式

$$F(xy, uv)=F(x, u)+F(x, v)+F(y, u)+F(y, v).$$

3．已知函数 $f(u, v, w)=u^w+w^{u+v}$，试求 $f(x+y, x-y, xy)$。

4．求下列各函数的定义域：

(1) $z=\ln(y^2-2x+1)$；　(2) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$；

(3) $z=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$；　(4) $u=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{z}}$；

(5) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$；　(6) $z=\ln(y-x)+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$；

(7) $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}$　$(R>r>0)$；

(8) $u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

5．求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$；　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1}{x^2+y^2}$；

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\dfrac{1}{x^2+y^2}$；　(4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$；

(5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$；　(6) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin xy}{x}$；

(7) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$.

6．证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$。

7．证明下列极限不存在：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x+y}{x-y}$；　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.

8. 函数 $z=\frac{y^2+2x}{y^2-2x}$ 在何处是间断的？

第二节 偏 导 数

一、偏导数的定义及其计算法

在研究一元函数时，我们从研究函数的变化率引入了导数概念．对于多元函数同样需要讨论它的变化率．但多元函数的自变量不止一个，因变量与自变量的关系要比一元函数复杂得多．在这一节里，我们首先考虑多元函数关于其中一个自变量的变化率．以二元函数 $z=f(x, y)$ 为例，如果只有自变量 x 变化，而自变量 y 固定(即看作常量)，这时它就是 x 的一元函数，这函数对 x 的导数，就称为二元函数 z 对于 x 的偏导数，即有如下定义：

定义 设函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域内有定义，当 y 固定在 y_0 而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时，相应地函数有增量

$$f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0),$$

如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)}{\Delta x} \tag{1}$$

存在，则称此极限值为函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 x 的偏导数，记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \left.z_x\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\quad 或\quad f_x(x_0, y_0).①$$

例如，极限(1)可以表为

$$f_x(x_0, y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)}{\Delta x}. \tag{2}$$

类似地，函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 y 的偏导数定义为下列极限

① 偏导数记号 z_x, f_x 也记成 z'_x, f'_x. 下一目中高阶偏导数的记号也有类似的情形.

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)}{\Delta y}, \tag{3}$$

记作 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$, $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$, $\left.z_y\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ 或 $f_y(x_0, y_0)$.

如果函数 $z=f(x, y)$ 在区域 D 内每一点 (x, y) 处对 x 的偏导数都存在，那末这个偏导数就是 x、y 的函数，它就称为函数 $z=f(x, y)$ 对自变量 x 的偏导函数，记作

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}, z_x \quad 或 \quad f_x(x, y).$$

类似地，可以定义函数 $z=f(x, y)$ 对自变量 y 的偏导函数，记作

$$\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}, z_y \quad 或 \quad f_y(x, y).$$

由偏导函数的概念可知，$f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 x 的偏导数 $f_x(x_0, y_0)$ 显然就是偏导函数 $f_x(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的函数值；$f_y(x_0, y_0)$ 就是偏导函数 $f_y(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的函数值。就象一元函数的导函数一样，以后在不至于混淆的地方也把偏导函数简称为偏导数。

至于实际求 $z=f(x, y)$ 的偏导数，并不需要用新的方法，因为这里只有一个自变量在变动，另一个自变量是看作固定的，所以仍旧是一元函数的微分法问题。求 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 时，只要把 y 暂时看作常量而对 x 求导数；求 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 时，则只要把 x 暂时看作常量而对 y 求导数。

偏导数的概念还可以推广到二元以上的函数。例如三元函数 $u=f(x, y, z)$ 在点 (x, y, z) 处对 x 的偏导数定义为

$$f_x(x, y, z)=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z)-f(x, y, z)}{\Delta x},$$

它们的求法也与二元函数的情形完全类似。

例 1 求 $z=x^2+3xy+y^2$ 在点(1, 2)处的偏导数。

解 把 y 看作常量，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x+3y;$$

把 x 看作常量，得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=3x+2y.$$

将(1, 2)代入上面的结果，就得

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=2\cdot1+3\cdot2=8,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=3\cdot1+2\cdot2=7.$$

例 2 求 $z=x^2\sin 2y$ 的偏导数。

解
$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\sin 2y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2x^2\cos 2y.$$

例 3 设 $z=x^y(x>0,\ x\neq1,\ y$ 为任意实数)。

求证
$$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y}=2z.$$

证 因为
$$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x,$$

所以 $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{\ln x}\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x}{y}yx^{y-1}+\dfrac{1}{\ln x}x^y\ln x=x^y+x^y=2z.$

例 4 求 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的偏导数。

解 把 y 和 z 都看作常量，得

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r};$$

类似地，有
$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}.$$

例 5 已知理想气体的状态方程 $pV=RT$（R 为常量），求证：

$$\frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}=-1.$$

证 因为
$$p=\frac{RT}{V},\quad \frac{\partial p}{\partial V}=-\frac{RT}{V^2};$$
$$V=\frac{RT}{p},\quad \frac{\partial V}{\partial T}=\frac{R}{p};$$
$$T=\frac{pV}{R},\quad \frac{\partial T}{\partial p}=\frac{V}{R};$$

所以

$$\frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}=-\frac{RT}{V^2}\cdot\frac{R}{p}\cdot\frac{V}{R}=-\frac{RT}{pV}=-1.$$

我们知道，对一元函数来说，$\frac{dy}{dx}$ 可看作函数的微分 dy 与自变量的微分 dx 之商．而上式表明，偏导数的记号是一个整体记号，不能看作分子与分母之商．

二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的偏导数有下述几何意义．

设 $M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 为曲面 $z=f(x,y)$ 上的一点，过 M_0 作平面 $y=y_0$，截此曲面得一曲线，平面 $y=y_0$ 上这条曲线的方程为 $z=f(x,y_0)$；则导数 $\left.\frac{d}{dx}f(x,y_0)\right|_{x=x_0}$ 即偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 就是这曲线在点 M_0 处的切线 M_0T_x 对 x 轴的斜率（见图 8-6）．同样，偏导数 $f_y(x_0,y_0)$ 的几何意义是曲面被平面 $x=x_0$ 所截得的曲线在点 M_0 处的切线 M_0T_y 对 y 轴的斜率．

我们已经知道，如果一元函数在某点有导数，则它在该点必定连续．但对于多元函数来说，即使各偏导数在某点都存在，也不能保证函数在该点连续．这是因为各偏导数存在只能保证点 P 沿着平行于坐标轴的方向趋近 P_0 时，函数值 $f(P)$ 趋近于 $f(P_0)$；但不能保证点 P 按任何方式趋近 P_0 时，函数值 $f(P)$ 都趋近于 $f(P_0)$．例如，函数

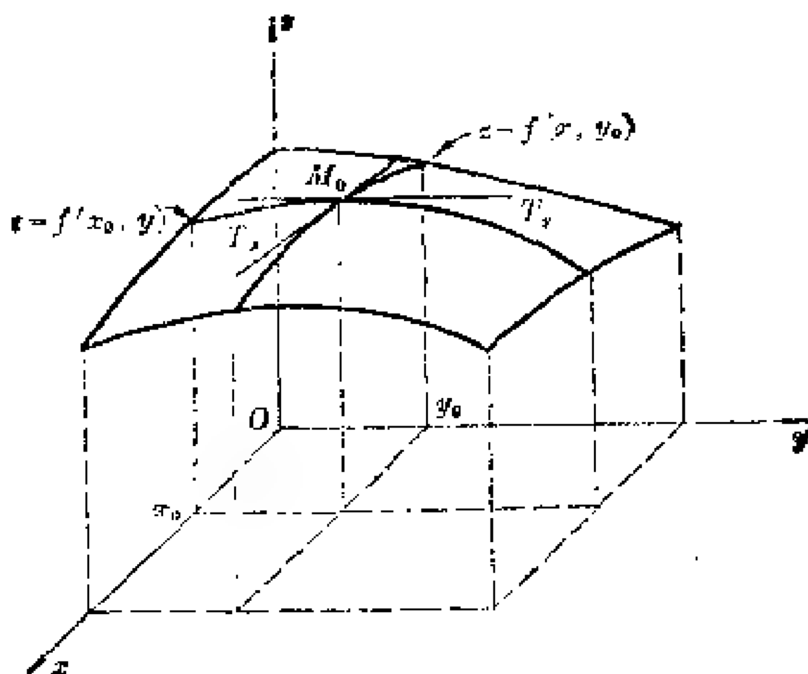


图 8-6

$$z=f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点(0, 0)对 x 的偏导数为

$$f_x(0, 0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x, 0)-f(0, 0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}0=0;$$

同样有

$$f_y(0, 0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0, 0+\Delta y)-f(0, 0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}0=0.$$

但是我们在第一节中已经知道这函数在点(0, 0)并不连续。

二、高阶偏导数

设函数 $z=f(x, y)$ 在区域 D 内具有偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_x(x, y),\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=f_y(x, y).$$

一般来说，在 D 内 $f_x(x, y)$、$f_y(x, y)$ 均是 x, y 的函数．如果这两个函数的偏导数也存在，则称它们是函数 $z=f(x, y)$ 的二阶偏导数．依照对变量求导的次序不同而有下列四个二阶偏导数：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x, y).$$

其中第二、三两个偏导数称为混合偏导数．同样可得三阶、四阶、…以及 n 阶偏导数．二阶及二阶以上的偏导数统称为高阶偏导数．

例 6 设 $z=x^3y^2-3xy^3-xy+1$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$、$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$、$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$、$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 及 $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$．

解

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y^2-3y^3-y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=2x^3y-9xy^2-x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6xy^2, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=6x^2y-9y^2-1;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6x^2y-9y^2-1, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2x^3-18xy;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=6y^2.$$

我们看到例 6 中两个二阶混合偏导数相等，即 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$．这不是偶然的．事实上，我们有下述定理．

定理 **如果函数 $z=f(x, y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 在区域 D 内连续，那末在该区域内这两个二阶混合偏导数必相等．**

换句话说，二阶混合偏导数在连续的条件下与求导的次序无关．这定理的证明从略．

对于二元以上的函数，我们也可以类似地定义高阶偏导数．而且高阶混合偏导数在偏导数连续的条件下也与求导的次序无关．

例 7 验证函数 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

证 因为 $$z=\ln\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2),$$

所以 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(x^2+y^2)-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{(x^2+y^2)-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

因此 $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=0.$$

例 8 证明函数 $u=\frac{1}{r}$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

证 $$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{x}{r}=-\frac{x}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x}{r^4}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5}.$$

由于函数对于自变量的对称性，所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5},\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5}.$$

因此 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$=-\frac{3}{r^3}+\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}=-\frac{3}{r^3}+\frac{3r^2}{r^5}=0.$$

例 7 和例 8 中的两个方程都叫做拉普拉斯方程，它是数学物理中一种很重要的方程。

习 题 8-2

1．求下列函数的偏导数：

(1) $z=x^3y-y^2x$；

(2) $s=\dfrac{u^2+v^2}{uv}$；

(3) $z=\sqrt{\ln(xy)}$；

(4) $z=\sin(xy)+\cos^2(xy)$；

(5) $z=\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{y}$；

(6) $z=(1+xy)^y$；

(7) $u=x^{\frac{y}{z}}$；

(8) $u=\operatorname{arc\,tg}(x-y)^z$。

2．设 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$，求证 $l\dfrac{\partial T}{\partial l}+g\dfrac{\partial T}{\partial g}=0$。

3．设 $z=e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$，求证 $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z$。

4．设 $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$，求 $f_x(x,1)$。

5．曲线 $\begin{cases}z=\dfrac{x^2+y^2}{4},\\ y=4\end{cases}$ 在点 $(2,4,5)$ 处的切线与正向 x 轴所成的倾角是多少？

6．求下列函数的 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$：

(1) $z=x^4+y^4-4x^2y^2$；

(2) $z=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}$；

(3) $z=y^x$。

7．设 $f(x,y,z)=xy^2+yz^2+zx^2$，

求 $f_{xx}(0,0,1)$，$f_{xz}(1,0,2)$，$f_{yz}(0,-1,0)$ 及 $f_{zzx}(2,0,1)$。

8．设 $z=x\ln(xy)$，求 $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$ 及 $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$。

9．验证：

(1) $y=e^{-kn^2t}\sin nx$ 满足 $\dfrac{\partial y}{\partial t}=k\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$；

(2) $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 满足 $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\dfrac{2}{r}$；

(3) $z=\ln(e^x+e^y)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right)^2=0$；

(4) $u=z\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{y}$ 满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$。

第三节　全微分及其应用

一、全微分的定义

我们已经知道，二元函数对某个自变量的偏导数表示当另一个自变量固定时，因变量相对于该自变量的变化率．根据一元函数微分学中增量与微分的关系，可得

$$f(x+\Delta x,\ y)-f(x,\ y)\approx f_x(x,\ y)\Delta x,$$

$$f(x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)\approx f_y(x,\ y)\Delta y.$$

上面两式的左端分别叫做二元函数对 x 和对 y 的偏增量，而右端分别叫做二元函数对 x 和对 y 的偏微分．

在实际问题中，有时需要研究多元函数中各个自变量都取得增量时因变量所获得的增量，即所谓全增量的问题．下面以二元函数为例进行讨论．

设函数 $z=f(x,\ y)$ 在点 $P(x,\ y)$ 的某邻域内有定义，并设 $P'(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$ 为这邻域内的任意一点，则称这两点的函数值之差 $f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)$ 为函数在点 P 对应于自变量增量 Δx、Δy 的全增量，记作 Δz，即

$$\Delta z=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y). \tag{1}$$

一般说来，计算全增量 Δz 比较复杂．与一元函数的情形一样，我们希望用自变量的增量 Δx、Δy 的线性函数来近似地代替函数的全增量 Δz，从而引入如下定义．

定义　如果函数 $z=f(x,\ y)$ 在点 $(x,\ y)$ 的全增量

$$\Delta z=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)$$

可表示为

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho), \tag{2}$$

其中 A、B 不依赖于 Δx、Δy 而仅与 x、y 有关，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，

则称函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微分，而 $A\Delta x+B\Delta y$ 称为函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x, y) 的全微分，记作 dz，即

$$dz=A\Delta x+B\Delta y.$$

下面我们证明：如果函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微分，那末函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x, y) 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ 必存在，并且 $A=\frac{\partial z}{\partial x}$, $B=\frac{\partial z}{\partial y}$，从而函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x, y) 的全微分为

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y. \tag{3}$$

事实上，因为(2)式对任意 Δx、Δy 都成立，则当 $\Delta y=0$ 时也应成立，这时 $\rho=|\Delta x|$，所以(2)式成为

$$f(x+\Delta x, y)-f(x, y)=A\cdot\Delta x+o(|\Delta x|).$$

等式两边各除以 Δx，再令 $\Delta x\to 0$ 而取极限，我们就证得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y)-f(x, y)}{\Delta x}=A,$$

因而偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 存在，且等于 A. 同样可证 $B=\frac{\partial z}{\partial y}$.

如果函数在一个区域 D 上各点处都可微分，那末称这函数在 D 上可微分.

我们知道，一元函数在某点的导数存在是微分存在的充分必要条件. 但对于多元函数来说，情形就不同了. 当函数的各偏导数都存在时，虽然能形式地写出 $\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$，但它与 Δz 之差并不一定是较 ρ 高阶的无穷小，因此它不一定是函数的全微分. 换句话说，各偏导数的存在只是全微分存在的必要条件而不是充分条件. 例如，函数

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点 $(0, 0)$ 处有 $f_x(0, 0)=0$ 及 $f_y(0, 0)=0$，所以

$$\Delta z-[f_x(0,0)\cdot\Delta x+f_y(0,0)\cdot\Delta y]=\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}},$$

如果考虑点 $P'(\Delta x, \Delta y)$ 沿着直线 $y=x$ 趋近于 $(0, 0)$，则

$$\frac{\dfrac{\Delta x\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}}{\rho}=\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\frac{\Delta x\cdot\Delta x}{(\Delta x)^2+(\Delta x)^2}=\frac{1}{2},$$

它不能随 $\rho\to0$ 而趋近于0，这表示 $\rho\to0$ 时，

$$\Delta z-[f_x(0,\ 0)\Delta x+f_y(0,\ 0)\Delta y]$$

并不是一个比 ρ 较高阶的无穷小，因此函数在点 $(0, 0)$ 处的全微分并不存在，即函数在点 $(0, 0)$ 处是不可微分的。

但是，如果再假定函数的各偏导数连续，则可保证全微分存在，即有下面的定理。

定理　如果函数 $z=f(x, y)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 在点 $P(x, y)$ 连续，则函数在该点的全微分存在。

证　因为我们只限于讨论在某一区域内有定义的函数(对于偏导数也如此)，所以假定偏导数在点 $P(x, y)$ 连续，就含有偏导数在该点的某一邻域内必然存在的意思(以后凡说到偏导数在某一点连续均应如此理解)。设点 $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ 为这邻域内任意一点，考察函数的全增量

$$\begin{aligned}\Delta z&=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)\\&=[f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y+\Delta y)]\\&\quad+[f(x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)].\end{aligned}$$

在第一个方括号内的表达式，由于 $y+\Delta y$ 不变，因而可以看作是 x 的一元函数 $f(x, y+\Delta y)$ 的增量。于是，应用拉格朗日中值定理，得到

$$\begin{aligned}&f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y+\Delta y)\\&=f_x(x+\theta_1\Delta x,\ y+\Delta y)\Delta x\ (0<\theta_1<1),\end{aligned}$$

又依假设，$f_x(x, y)$在点(x, y)连续，所以上式可写为

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y+\Delta y)$$
$$=f_x(x, y)\Delta x+\varepsilon_1\Delta x \quad (4)$$

其中 ε_1 为 Δx、Δy 的函数，且当 $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ 时，$\varepsilon_1\to 0$.

同理可证第二个方括号内的表达式可写为

$$f(x, y+\Delta y)-f(x, y)=f_y(x, y)\Delta y+\varepsilon_2\Delta y, \quad (5)$$

其中 ε_2 为 Δy 的函数，且当 $\Delta y\to 0$ 时，$\varepsilon_2\to 0$.

由(4)、(5)两式可见，在偏导数连续的假定下，全增量 Δz 可以表示为

$$\Delta z=f_x(x, y)\Delta x+f_y(x, y)\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y. \quad (6)$$

容易看出

$$\left|\frac{\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y}{\rho}\right|\leqslant|\varepsilon_1|+|\varepsilon_2|,$$

它是随着 $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ 即 $\rho\to 0$ 而趋近于零的.

这就证明了 $z=f(x, y)$在点 $P(x, y)$处是可微分的.

以上关于二元函数全微分的定义及全微分存在的充分条件，可以完全类似地推广到三元和三元以上的多元函数.

习惯上，我们将自变量的增量 Δx、Δy 分别记作 dx、dy，并分别称为自变量 x、y 的微分. 这样，函数 $z=f(x, y)$ 的全微分就可写为

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy. \quad (7)$$

通常我们把二元函数的全微分等于它的两个偏微分之和这件事称为二元函数的微分符合叠加原理.

叠加原理也适用于二元以上的函数的情形. 例如，如果函数 $u=f(x, y, z)$的全微分存在，那末三元函数 $u=f(x, y, z)$的全微分就等于它的三个偏微分之和，即

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

例 1 计算函数 $z=x^2y+y^2$ 的全微分.

解 因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=2xy,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x^2+2y,$

所以 $$dz=2xy\,dx+(x^2+2y)\,dy.$$

例 2 计算函数 $z=e^{xy}$ 在点 (2, 1) 处的全微分.

解 因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy},$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=2\\y=1}}=e^2,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=2\\y=1}}=2e^2,$$

所以 $$dz=e^2dx+2e^2dy.$$

例 3 计算函数 $u=x+\sin\frac{y}{2}+e^{yz}$ 的全微分.

解 因为 $\frac{\partial u}{\partial x}=1,\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2}\cos\frac{y}{2}+ze^{yz},\ \frac{\partial u}{\partial z}=ye^{yz},$

所以 $$du=dx+\left(\frac{1}{2}\cos\frac{y}{2}+ze^{yz}\right)dy+ye^{yz}dz.$$

*二、全微分在近似计算中的应用

由二元函数的全微分的定义及关于全微分存在的充分条件可知，当二元函数 $z=f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 的两个偏导数 $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ 连续，并且 $|\Delta x|$, $|\Delta y|$ 都较小时，就有近似等式

$$\Delta z\approx dz=f_x(x, y)\Delta x+f_y(x, y)\Delta y. \tag{8}$$

上式也可以写成

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y)\approx f(x, y)+f_x(x, y)\Delta x+f_y(x, y)\Delta y. \tag{9}$$

与一元函数的情形相类似，我们可以利用 (8) 式或 (9) 式对二元函数作近似计算和误差估计．举例于下．

例 4 有一圆柱体，受压后发生形变，它的半径由 20 厘米增

大到20.05厘米，高度由100厘米减少到99厘米．求此圆柱体体积变化的近似值．

解 设圆柱体的半径、高和体积依次为 r, h 和 V，则有

$$V=\pi r^2 h.$$

记 r, h 和 V 的增量依次为 Δr, Δh 和 ΔV．应用公式(8)，有

$$\Delta V \approx dV = V_r \Delta r + V_h \Delta h = 2\pi r h \Delta r + \pi r^2 \Delta h.$$

把 $r=20$, $h=100$, $\Delta r=0.05$, $\Delta h=-1$ 代入，得

$$\Delta V \approx 2\pi\times 20\times 100\times 0.05+\pi\times 20^2\times(-1)$$
$$=-200\pi(\text{立方厘米}).$$

即此圆柱体在受压后体积约减少了 200π 立方厘米．

例5 计算 $(1.04)^{2.02}$ 的近似值．

解 设函数 $f(x,y)=x^y$．显然，要计算的值就是函数在 $x=1.04$, $y=2.02$ 时的函数值 $f(1.04, 2.02)$．

取 $x=1$, $y=2$, $\Delta x=0.04$, $\Delta y=0.02$．由于

$$f(1, 2)=1,$$
$$f_x(x, y)=yx^{y-1}, \quad f_y(x, y)=x^y \ln x,$$
$$f_x(1, 2)=2, \quad f_y(1, 2)=0,$$

所以，应用公式(9)便有

$$(1.04)^{2.02}\approx 1+2\times 0.04+0\times 0.02=1.08.$$

例6 利用单摆摆动测定重力加速度 g 的公式是

$$g=\frac{4\pi^2 l}{T^2}.$$

现测得单摆摆长 l 与振动周期 T 分别为 $l=100\pm 0.1$ 厘米、$T=2\pm 0.004$ 秒．问由于测定 l 与 T 的误差而引起 g 的绝对误差和相对误差各为多少①？

① 按第二章第八节的说明，这里的绝对误差和相对误差各指相应的误差限（见上册第160页）．

解 如果把测量 l 与 T 时所产生的误差当作 $|\Delta l|$ 与 $|\Delta T|$，则利用上述计算公式所产生的误差就是二元函数 $g=\dfrac{4\pi^2 l}{T^2}$ 的全增量的绝对值 $|\Delta g|$。由于 $|\Delta l|$，$|\Delta T|$ 都很小，因此我们可以用 dg 来近似地代替 Δg。这样就得到 g 的误差为

$$
\begin{aligned}
|\Delta g| \approx |dg| &= \left|\frac{\partial g}{\partial l}\Delta l+\frac{\partial g}{\partial T}\Delta T\right| \\
&\leqslant \left|\frac{\partial g}{\partial l}\right|\cdot|\Delta l|+\left|\frac{\partial g}{\partial T}\right|\cdot|\Delta T| \\
&=4\pi^2\left(\frac{1}{T^2}|\Delta l|+\frac{2l}{T^3}|\Delta T|\right).
\end{aligned}
$$

把 $l=100$，$T=2$，$|\Delta l|\leqslant 0.1$，$|\Delta T|\leqslant 0.004$ 代入上式，得 g 的绝对误差约为

$$
\begin{aligned}
\delta_g &= 4\pi^2\left(\frac{0.1}{2^2}+\frac{2\times 100}{2^3}\times 0.004\right) \\
&=0.5\pi^2=4.93\ (\text{厘米/秒}^2).
\end{aligned}
$$

从而 g 的相对误差约为

$$
\frac{\delta_g}{g}=\frac{0.5\pi^2}{\dfrac{4\pi^2\times 100}{2^2}}=0.5\%.
$$

从上面的例子我们可以看到，对于一般的二元函数 $z=f(x,y)$，如果自变量 x、y 的绝对误差分别为 δ_x、δ_y，即

$$
|\Delta x|\leqslant\delta_x,\quad |\Delta y|\leqslant\delta_y,
$$

则 z 的误差为

$$
\begin{aligned}
|\Delta z|\approx|dz| &= \left|\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y\right| \\
&\leqslant\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|\cdot|\Delta x|+\left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|\cdot|\Delta y| \\
&\leqslant\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|\delta_x+\left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|\delta_y;
\end{aligned}
$$

从而得到 z 的绝对误差约为

$$\delta_z = \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|\delta_x + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|\delta_y; \tag{10}$$

z 的相对误差约为

$$\frac{\delta_z}{|z|} = \left|\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{z}\right|\delta_x + \left|\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{z}\right|\delta_y. \tag{11}$$

习　题　8-3

1．求下列函数的全微分：

(1) $z = xy + \frac{x}{y}$;

(2) $z = e^{\frac{y}{x}}$;

(3) $z = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

(4) $u = x^{yz}$.

2．求函数 $z = \ln(1+x^2+y^2)$ 当 $x=1$, $y=2$ 时的全微分。

3．求函数 $z = \frac{y}{x}$ 当 $x=2$, $y=1$, $\Delta x=0.1$, $\Delta y=-0.2$ 时的全增量和全微分。

4．求函数 $z = e^{xy}$ 当 $x=1$, $y=1$, $\Delta x=0.15$, $\Delta y=0.1$ 时的全微分。

5*．计算 $\sqrt{(1.02)^3+(1.97)^3}$ 的近似值．

6*．计算 $\ln(\sqrt[3]{1.03}+\sqrt[4]{0.98}-1)$ 的近似值．

7*．计算 $(1.97)^{1.05}$ 的近似值．($\ln 2 = 0.693$.)

8*．计算 $\sin 29°\cdot \operatorname{tg} 46°$ 的近似值．

9*．已知边长为 $x=6$ 米与 $y=8$ 米的矩形，如果 x 边增加 5 厘米而 y 边减少 10 厘米，问这个矩形的对角线的近似变化怎样？

10*．设有一无盖圆柱形容器，容器的壁与底的厚度均为 0.1 厘米，内高为 20 厘米，内半径为 4 厘米．求容器外壳体积的近似值．

11*．当圆锥体形变时，它的底半径 R 由 30 厘米增到 30.1 厘米，高 H 由 60 厘米减到 59.5 厘米，试求体积变化的近似值．

12*．设有直角三角形，测得其两腰的长分别为 7 ± 0.1 厘米和 24 ± 0.1 厘米．试求利用上述二值来计算斜边长度时的绝对误差．

13*. 测得一块三角形土地的两边边长分别为63 ± 0.1米和78 ± 0.1米，这两边的夹角为$60°\pm1°$。试求三角形面积的近似值，并求其绝对误差和相对误差.

14*. 利用全微分证明：两数之和的绝对误差等于它们各自的绝对误差之和.

15*. 利用全微分证明：乘积的相对误差等于各因子的相对误差之和；商的相对误差等于被除数及除数的相对误差之和.

第四节　多元复合函数的求导法则

假设函数$z=f(u, v)$通过中间变量$u=\varphi(x, y)$及$v=\psi(x, y)$而成为x、y的复合函数

$$z=f[\varphi(x, y), \psi(x, y)].$$

现在我们要寻求一个象一元函数那样的复合函数的求导公式，因而可以不将$u=\varphi(x, y)$、$v=\psi(x, y)$代入$f(u, v)$，而直接从函数$f(u, v)$的偏导数及函数$\varphi(x, y)$、$\psi(x, y)$的偏导数来求$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$. 关于这个问题，有以下的定理.

定理　**如果函数$u=\varphi(x, y)$、$v=\psi(x, y)$在点(x, y)有偏导数，函数$z=f(u, v)$在对应点(u, v)有连续偏导数，那末复合函数$z=f[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$在点$(x, y)$有对$x$及$y$的偏导数，并且它们可由下列公式来计算：**

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{2}$$

证　设x获得增量Δx，y保持不变. 这时函数$u=\varphi(x, y)$，$v=\psi(x, y)$的对应增量为Δu，Δv. 又由于u获得增量Δu，v获得增量Δv，函数$z=f(u, v)$相应地获得增量Δz. 根据假定，函数$z=f(u, v)$在点(u, v)有连续偏导数，于是由第三节公式(6)有

$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial z}{\partial v}\Delta v+\varepsilon_1\cdot\Delta u+\varepsilon_2\cdot\Delta v,$$

这里，当 $\Delta u\to 0$, $\Delta v\to 0$ 时，$\varepsilon_1\to 0$, $\varepsilon_2\to 0$.

将上式两边各除以 Δx, 得到

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}+\varepsilon_1\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+\varepsilon_2\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

因为当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta u\to 0$, $\Delta v\to 0$, $\frac{\Delta u}{\Delta x}\to\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\Delta v}{\Delta x}\to\frac{\partial v}{\partial x}$,

所以
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},$$

即有
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}.$$

同样可证

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

我们指出，对于中间变量或自变量不只是两个的情形，公式(1)和(2)都可以推广。例如：

设 $z=f(u,v,w)$ 具有连续偏导数，而 $u=\varphi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$, $w=\omega(x,y)$ 都具有偏导数，则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y),\omega(x,y)]$ 有对自变量 x、y 的偏导数，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}.$$

又如，只有一个中间变量的情形：

$$z=f(u,x,y),$$

而
$$u=\varphi(x,y),$$

它们都满足所需要的条件，则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),x,y]$ 有对自变量 x 及 y 的偏导数，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}.$$

注意，这里$\frac{\partial z}{\partial x}$与$\frac{\partial f}{\partial x}$是不同的，$\frac{\partial z}{\partial x}$是把$f[\varphi(x, y), x, y]$中的$y$看作不变而对$x$的偏导数，$\frac{\partial f}{\partial x}$是把$f(u, x, y)$中的$u$、$y$看作不变而对$x$的偏导数. $\frac{\partial z}{\partial y}$与$\frac{\partial f}{\partial y}$也有类似的区别.

更特殊地，在只有一个自变量的情形下，有所谓全导数的概念及其求法的公式. 例如$z=f(u, v, w)$，而$u=\varphi(t)$，$v=\psi(t)$，$w=\omega(t)$. 则复合函数$z=f[\varphi(t), \psi(t), \omega(t)]$只是一个自变量$t$的函数. 这个复合函数对$t$的导数$\frac{dz}{dt}$称为全导数. 若所设各函数都满足所需要的条件，则全导数存在且有公式

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dt}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{dw}{dt}.$$

例1 设$z=e^u\sin v$，而$u=xy$，$v=x+y$. 求$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 所设函数满足定理中的条件，故由复合函数的求导法则，得

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\\&=e^u\sin v\cdot y+e^u\cos v\cdot 1\\&=e^{xy}[y\sin(x+y)+\cos(x+y)],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\\&=e^u\sin v\cdot x+e^u\cos v\cdot 1\\&=e^{xy}[x\sin(x+y)+\cos(x+y)].\end{aligned}$$

例2 设$u=f(x, y, z)=e^{x^2+y^2+z^2}$，而$z=x^2\sin y$.

求$\frac{\partial u}{\partial x}$和$\frac{\partial u}{\partial y}$.

解 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x}=2ze^{x^2+y^2+z^2}\cdot 2x\sin y+2xe^{x^2+y^2+z^2}$$

$$=2x(1+2x^2\sin^2 y)e^{x^2+y^2+x^4\sin^2 y}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}=2ze^{x^2+y^2+z^2}\cdot x^2\cos y+2ye^{x^2+y^2+z^2}$$

$$=2(y+x^4\sin y\cos y)e^{x^2+y^2+x^4\sin^2 y}.$$

例 3 设 $z=uv+\sin t$，而 $u=e^t$，$v=\cos t$。求全导数 $\frac{dz}{dt}$。

解 $$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}+\frac{\partial z}{\partial t}=ve^t-u\sin t+\cos t$$

$$=e^t\cos t-e^t\sin t+\cos t=e^t(\cos t-\sin t)+\cos t.$$

例 4 设 $u=f(x+y+z,\ xyz)$，f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}$。

解 为表达简便起见，引入以下记号

$$f_1'=\frac{\partial f(\xi,\ \eta)}{\partial \xi},\ f_{12}''=\frac{\partial^2 f(\xi,\ \eta)}{\partial \xi\,\partial \eta},$$

类似地有 f_2'，f_{11}''，f_{22}''。于是

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'+yzf_2',$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=f_{11}''+xyf_{12}''+yf_2'+yz(f_{21}''+xyf_{22}'')$$

$$=f_{11}''+(x+z)yf_{12}''+xy^2zf_{22}''+yf_2'.$$

例 5 设 $u=f(x,y)$ 的所有二阶偏导数连续，把下列表达式转换为极坐标：

(i) $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$；　　(ii) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$。

解 由直角坐标与极坐标之间的关系式：

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta;$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}, \qquad \theta=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x},$$ ①

可以把函数 $u=f(x, y)$ 转换为极坐标

$$u=f(x, y)=f(r\cos\theta, r\sin\theta)=F(r, \theta).$$

对于函数 $u=F\left(\sqrt{x^2+y^2}, \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right)$ 应用复合函数求导公式，得

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}\\&=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{x}{r}-\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{y}{r^2}\\&=\frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{r},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y}&=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y}\\&=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{y}{r}+\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{x}{r^2}\\&=\frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta+\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\cos\theta}{r}.\end{aligned}$$

两式平方后相加，得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)^2.$$

再求二阶偏导数，得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2u}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x}\\&=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{r}\right)\cdot\cos\theta\end{aligned}$$

---

① 当点 $P(x, y)$ 在第一、四象限时，规定 θ 的取值范围为：

$$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}, \text{则 } \theta=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x};$$

当点 $P(x, y)$ 在第二、三象限时，规定 θ 的取值范围为：

$$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3}{2}\pi, \text{则 } \theta=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}+\pi,$$

此时以下推导仍成立。

$$-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{r}\right)\cdot\frac{\sin\theta}{r}$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cos^2\theta-2\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}+\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\sin^2\theta}{r^2}$$

$$+\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\sin^2\theta}{r}.$$

同理可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\sin^2\theta+2\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}+\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\cos^2\theta}{r^2}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\cos^2\theta}{r}.$$

两式相加，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}$$

$$=\frac{1}{r^2}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right].$$

习 题 8-4

1．设 $z=u^2v-uv^2$，而 $u=x\cos y$，$v=x\sin y$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$．

2．设 $z=u^2\ln v$，而 $u=\frac{x}{y}$，$v=3x-2y$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$．

3．设 $z=e^{x-2y}$，而 $x=\sin t$，$y=t^3$，求 $\frac{dz}{dt}$．

4．设 $z=\arcsin(x-y)$，而 $x=3t$，$y=4t^3$，求 $\frac{dz}{dt}$．

5．设 $z=\operatorname{arctg}(xy)$，而 $y=e^x$，求 $\frac{dz}{dx}$．

6．设 $u=\frac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$，而 $y=a\sin x$，$z=\cos x$，求 $\frac{du}{dx}$．

7．验证函数 $z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$，其中 $x=u+v$，$y=u-v$，满足关系式

$$\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{u-v}{u^2+v^2}.$$

8．求下列函数的一阶偏导数(其中 f 具有一阶连续偏导数)：

(1) $u=f(x^2-y^2,\ e^{xy})$；　　(2) $u=f(x^2+y^2-z^2)$；

(3) $u=f\left(\frac{x}{y},\ \frac{y}{z}\right)$；　　(4) $u=f(x,\ xy,\ xyz)$．

9. 设 $z=xy+xF(u)$，而 $u=\frac{y}{x}$，$F(u)$为可导函数，证明

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z+xy.$$

10. 设 $z=\frac{y}{f(x^2-y^2)}$，其中 $f(u)$为可导函数，验证

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}.$$

11. 求下列函数的 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$（其中 f 具有二阶连续偏导数）：

(1) $z=f(x^2+y^2)$；　　　　(2) $z=f\left(x,\frac{x}{y}\right)$.

12. 设 $u=f(x, y)$的所有二阶偏导数连续，而

$$x=\frac{s-\sqrt{3}t}{2},\quad y=\frac{\sqrt{3}s+t}{2},$$ 证明

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2$$

及

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

第五节　隐函数的求导公式

一、一个方程的情形

在第二章第六节中我们已经提出了隐函数的概念，并且指出了不经过显化直接由方程

$$F(x, y)=0 \tag{1}$$

求它所确定的隐函数的导数的方法．现在根据多元复合函数的求导法来导出隐函数的导数公式．

隐函数存在定理 1　设函数 $F(x, y)$在点 $P(x_0, y_0)$的某一邻域内具有连续的偏导数，且 $F(x_0, y_0)=0$，$F_y(x_0, y_0)\neq 0$，则方程 $F(x, y)=0$ 在 x_0 的某一邻域内恒能唯一确定一个单值可导且具有连续导数的函数 $y=f(x)$，它满足条件 $y_0=f(x_0)$，并有

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}. \tag{2}$$

公式(2)就是隐函数的求导公式.

这个定理我们不证. 现仅就公式 (2) 在定理结论的其余部分已经证得的前提下作如下推导.

将方程(1)所确定的函数 $y=f(x)$ 代入(1), 得恒等式

$$F(x, f(x))\equiv 0,$$

其左端可以看作是 x 的一个复合函数, 求这个函数的全导数, 由于恒等式两端求导后仍然恒等, 即得

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0,$$

由于 F_y 连续, 且 $F_y(x_0, y_0)\neq 0$, 所以存在 (x_0, y_0) 的一个邻域, 在这个邻域内 $F_y\neq 0$, 于是得

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}.$$

如果 $F(x, y)$ 的二阶偏导数也都连续, 我们可以把等式(2)的两端看作 x 的复合函数而再一次求导, 即得

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)\frac{dy}{dx}\\&=-\frac{F_{xx}F_y-F_{yx}F_x}{F_y^2}-\frac{F_{xy}F_y-F_{yy}F_x}{F_y^2}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)\\&=-\frac{F_{xx}F_y^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x^2}{F_y^3}.\end{aligned}$$

例 1 求由方程 $x^2+y^2-1=0$ 所确定的隐函数 y 的一阶与二阶导数.

解 这里 $F(x, y)=x^2+y^2-1$, $F_x=2x$, $F_y=2y$. 由公式(2)得

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}.$$

再次求导得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{y-xy'}{y^2}=-\frac{y-x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2}=-\frac{y^2+x^2}{y^3}=-\frac{1}{y^3}.$$

隐函数存在定理还可以推广到多元函数. 既然一个二元方程(1)可以确定一个一元隐函数,那末一个三元方程

$$F(x, y, z)=0 \tag{3}$$

就有可能确定一个二元隐函数.

与定理 1 一样, 我们同样可以从三元函数 $F(x, y, z)$ 的性质来断定由方程 $F(x, y, z)=0$ 所确定的二元函数 $z=f(x, y)$ 的存在,以及这个函数的性质. 这就是下面的定理.

隐函数存在定理 2 **设函数** $F(x, y, z)$ **在点** $P(x_0, y_0, z_0)$ **的某一邻域内具有连续的偏导数, 且** $F(x_0, y_0, z_0)=0$, $F_z(x_0, y_0, z_0)\neq 0$, **则方程** $F(x, y, z)=0$ **在** (x_0, y_0) **的某一邻域内恒能唯一确定一个单值连续且具有连续偏导数的函数** $z=f(x, y)$, **它满足条件** $z_0=f(x_0, y_0)$, **并有**

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}. \tag{4}$$

这个定理我们不证. 与定理 1 类似, 仅就公式 (4) 作如下推导.

因为 $$F(x, y, f(x, y))\equiv 0,$$

对上述恒等式左边的函数,应用复合函数求导法则的条件满足,故将上式两端分别对 x 和 y 求导,得

$$F_x+F_z\frac{\partial z}{\partial x}=0, \quad F_y+F_z\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

由于 F_z 连续, 且 $F_z(x_0, y_0, z_0)\neq 0$, 所以存在点 (x_0, y_0, z_0) 的一个邻域,在这个邻域内 $F_z\neq 0$, 于是,得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

例 2 设 $x^2+y^2+z^2-4z=0$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 这里 $F(x, y, z)=x^2+y^2+z^2-4z$，$F_x=2x$，$F_z=2z-4$. 应用公式(4)，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{2-z}.$$

再一次对 x 求偏导数，得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(2-z)+x\frac{\partial z}{\partial x}}{(2-z)^2}$$

$$=\frac{(2-z)+x\left(\frac{x}{2-z}\right)}{(2-z)^2}=\frac{(2-z)^2+x^2}{(2-z)^3}.$$

*二、方程组的情形

下面我们将隐函数存在定理作另一方面的推广. 我们不仅增加方程中变量的个数，而且增加方程的个数. 例如，考虑方程组

$$\begin{cases} F(x, y, u, v)=0, \\ G(x, y, u, v)=0. \end{cases} \tag{5}$$

这时，在四个变量中，一般只能有两个变量独立变化，因此方程组(5)就有可能确定两个二元函数. 在这种情形下，我们可以从函数 F、G 的性质来断定由方程组 (5) 所确定的两个二元函数的存在，以及它们的性质. 我们有下面的定理.

隐函数存在定理 3 设 $F(x, y, u, v)$、$G(x, y, u, v)$ 在点 $P(x_0, y_0, u_0, v_0)$ 的某一邻域内具有对各个变量的连续偏导数，又 $F(x_0, y_0, u_0, v_0)=0$，$G(x_0, y_0, u_0, v_0)=0$，且偏导数所组成的函数行列式(或称雅可比(Jacobi)式)：

$$J=\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}$$

在 $P(x_0, y_0, u_0, v_0)$ 点不等于零，则方程组 $F(x, y, u, v)=0$, $G(x, y, u, v)=0$ 在 (x_0, y_0) 的某一邻域内恒能唯一确定一组单值连续且具有连续偏导数的函数 $u=u(x, y)$, $v=v(x, y)$，它们满足条件 $u_0=u(x_0, y_0)$, $v_0=v(x_0, y_0)$，并有

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}&=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_x & F_v\\ G_x & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}},\\
\frac{\partial v}{\partial x}&=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_x\\ G_u & G_x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}},\\
\frac{\partial u}{\partial y}&=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_y & F_v\\ G_y & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}},\\
\frac{\partial v}{\partial y}&=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, y)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_y\\ G_u & G_y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

这个定理我们不证．与前两个定理类似，下面仅就公式(6)作如下推导．

因为 $$F[x, y, u(x, y), v(x, y)]\equiv 0,$$
$$G[x, y, u(x, y), v(x, y)]\equiv 0,$$

对上述恒等式左边的函数应用复合函数求导法则的条件满足，故对恒等式两边分别对 x 求导，得

$$
\begin{cases}
F_x+F_u\dfrac{\partial u}{\partial x}+F_v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\\
G_x+G_u\dfrac{\partial u}{\partial x}+G_v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0.
\end{cases}
$$

这是关于 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ 的线性方程组，由假设可知在点 $P(x_0, y_0, u_0, v_0)$ 的一个邻域内，系数行列式

$$J=\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}\neq 0,$$

从而可解出 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, 得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)}.$$

同理，可得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, y)}.$$

例 3 设函数 $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$ 在点 (u, v) 的某一邻域内连续且有连续偏导数，又

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\neq 0.$$

(1) 证明方程组

$$\begin{cases} x=x(u, v), \\ y=y(u, v) \end{cases} \tag{7}$$

在点 (u, v) 的对应点 (x, y) 的某一邻域内唯一确定一组单值连续且具有连续偏导数的反函数 $u=u(x, y)$, $v=v(x, y)$.

(2) 求反函数 $u=u(x, y)$, $v=v(x, y)$ 对 x, y 的偏导数.

解 (1) 将方程组(7)改写成下面的形式

$$\begin{cases} F(x, y, u, v)\equiv x-x(u, v)=0, \\ G(x, y, u, v)\equiv y-y(u, v)=0. \end{cases}$$

则按假设 $$J=\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}=\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\neq 0.$$

由隐函数存在定理 3, 即得所要证的结论.

(2) 将方程组(7)所确定的反函数 $u=u(x, y)$, $v=v(x, y)$ 代入(7)，即得

$$\begin{cases} x \equiv x[u(x, y), v(x, y)], \\ y \equiv y[u(x, y), v(x, y)]. \end{cases}$$

将上述恒等式两边分别对 x 求偏导数，得

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{\partial x}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial x}{\partial v} \dfrac{\partial v}{\partial x}, \\ 0 = \dfrac{\partial y}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial v} \dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

由于 $J \neq 0$，故可解得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial u}.$$

同理，可得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial u}.$$

习 题 8-5

1. 设 $\sin y + e^x - xy^2 = 0$，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

2. 设 $\ln\sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

3. 设 $x + 2y + z - 2\sqrt{xyz} = 0$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

4. 设 $\dfrac{x}{z} = \ln \dfrac{z}{y}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

5. 设 $2\sin(x+2y-3z) = x+2y-3z$，证明 $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 1$.

6. 设 $x = x(y, z)$，$y = y(x, z)$，$z = z(x, y)$ 都是由方程 $F(x, y, z) = 0$ 所确定的具有连续偏导数的函数，证明

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

7. 设 $\Phi(u, v)$ 为可微分函数，证明由方程 $\Phi(cx-az, cy-bz) = 0$ 所确定的函数 $z = f(x, y)$ 满足 $a\dfrac{\partial z}{\partial x} + b\dfrac{\partial z}{\partial y} = c$.

8. 设 $e^z - xyz = 0$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

9. 设 $z^3 - 3xyz = a^3$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

10*. 求由下列方程组所确定的函数的导数或偏导数:

(1) 设 $\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ x^2+2y^2+3z^2=20, \end{cases}$ 求 $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{dz}{dx}$;

(2) 设 $\begin{cases} xu-yv=0, \\ yu+xv=1, \end{cases}$ 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$;

(3) 设 $\begin{cases} u=f(ux, v+y), \\ v=g(u-x, v^2y), \end{cases}$ 其中 f, g 具有一阶连续偏导数, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$;

(4) 设 $\begin{cases} x=e^u+u\sin v, \\ y=e^u-u\cos v, \end{cases}$ 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

11. 设 $y=f(x, t)$, 而 t 是由方程 $F(x, y, t)=0$ 所确定的 x, y 的函数, 其中 f, F 都具有一阶连续偏导数. 试证明

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial t}-\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial y}+\dfrac{\partial F}{\partial t}}.$$

12. 设 $x=e^u\cos v$, $y=e^u\sin v$, $z=uv$. 试求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

第六节 偏导数的几何应用

一、空间曲线的切线与法平面

设空间曲线 Γ 的参数方程为

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\omega(t), \tag{1}$$

这里假定 (1) 式的三个函数都可导.

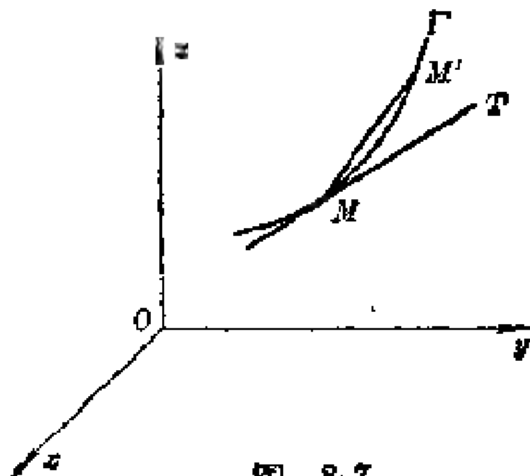


图 8-7

考虑曲线 Γ 上对应于 $t=t_0$ 的一点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 及对应于 $t=t_0+\Delta t$ 的邻近一点 $M'(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$. 根据解析几何, 曲线的割线 MM' 的方程是

$$\frac{x-x_0}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{\Delta y}=\frac{z-z_0}{\Delta z}.$$

当 M' 沿着 Γ 趋近于 M 时，割线 MM' 的极限位置 MT 就是曲线 Γ 在点 M 的切线(图 8-7). 用 Δt 除上式的各分母，得

$$\frac{x-x_0}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{y-y_0}{\frac{\Delta y}{\Delta t}}=\frac{z-z_0}{\frac{\Delta z}{\Delta t}},$$

令 $M'\to M$(这时 $\Delta t\to 0$)，通过对上式取极限，即得曲线在点 M 的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)},$$

或简写为

$$\frac{x-x_0}{x_0'}=\frac{y-y_0}{y_0'}=\frac{z-z_0}{z_0'}. \tag{2}$$

这里当然要假定 $\varphi'(t_0)$、$\psi'(t_0)$、$\omega'(t_0)$ 不能都为零. 如个别为零，则应按空间解析几何中直线的对称式方程的说明来理解.

如用 dt 遍乘(2)式的分母，则方程又可写为

$$\frac{x-x_0}{dx}=\frac{y-y_0}{dy}=\frac{z-z_0}{dz}.$$

由此可见，函数 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\omega(t)$ 的微分 dx, dy, dz 是切线的方向数，从而切线的方向余弦① 为

$$\cos\alpha=\frac{dx}{\pm\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{dy}{\pm\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{dz}{\pm\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}}.$$

通过点 M 而与切线垂直的平面叫做曲线在点 M 的法平面. 由空间解析几何，可得法平面方程为

---

① 切线的方向余弦是指切线的方向向量的方向余弦.

$$x'_0(x-x_0)+y'_0(y-y_0)+z'_0(z-z_0)=0. \tag{3}$$

例 1 求曲线 $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$ 在点(1, 1, 1)的切线及法平面方程.

解 因为 $x'_t=1,\ y'_t=2t,\ z'_t=3t^2$, 而点 (1, 1, 1) 所对应的参数 $t=1$, 所以

$$x'_0=1,\ y'_0=2,\ z'_0=3.$$

于是,得切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3},$$

法平面方程为

$$(x-1)+2(y-1)+3(z-1)=0,$$

即

$$x+2y+3z=6.$$

如果空间曲线 Γ 的方程以

$$\begin{cases} y=\varphi(x), \\ z=\psi(x) \end{cases}$$

的形式给出,取 x 为参数,它就可以表为参数方程的形式

$$\begin{cases} x=x, \\ y=\varphi(x), \\ z=\psi(x). \end{cases}$$

若设 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 都在 $x=x_0$ 处可导,根据上面的讨论,就可知道曲线 Γ 在点 $M(x_0,\ y_0,\ z_0)$处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{\varphi'(x_0)}=\frac{z-z_0}{\psi'(x_0)}, \tag{4}$$

在点 $M(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 处的法平面方程为

$$(x-x_0)+\varphi'(x_0)(y-y_0)+\psi'(x_0)(z-z_0)=0. \tag{5}$$

设空间曲线 Γ 的方程以

$$\begin{cases} F(x,\ y,\ z)=0, \\ G(x,\ y,\ z)=0 \end{cases} \tag{6}$$

的形式给出．又设 F、G 有对各个变量的连续偏导数，且

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}\neq 0.$$

由§5隐函数存在定理3，方程组(6)在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 的某一邻域内确定了一组函数 $y=\varphi(x)$，$z=\psi(x)$． 要求曲线 Γ 在点 M 处的切线方程和法平面方程，只要求出 $\varphi'(x_0)$，$\psi'(x_0)$，然后代入(4)，(5)两式就行了．为此，我们在恒等式

$$F[x,\varphi(x),\psi(x)]\equiv 0,$$
$$G[x,\varphi(x),\psi(x)]\equiv 0$$

两边分别对 x 求全导数，得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{dz}{dx}=0,\\ \dfrac{\partial G}{\partial x}+\dfrac{\partial G}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{\partial G}{\partial z}\dfrac{dz}{dx}=0.\end{cases}$$

由假设可知，在点 M 的某个邻域内

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\neq 0,$$

故可解得
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\begin{vmatrix}F_z & F_x\\ G_z & G_x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}},\quad \frac{dz}{dx}=\frac{\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}}.$$

所以曲线 Γ 在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}_0}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}F_z & F_x\\ G_z & G_x\end{vmatrix}_0}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}_0},\tag{7}$$

(方程中 $|\ \ |_0$ 系 $|\ \ |_{(x_0,y_0,z_0)}$ 的简写)，在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的法平面方程为

$$\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}_0(x-x_0)+\begin{vmatrix}F_z & F_x\\ G_z & G_x\end{vmatrix}_0(y-y_0)+\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}_0(z-z_0)=0.\tag{8}$$

如果 $\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_0=0$ 而 $\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_0$，$\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_0$ 中至少有一个不等于零，我们可得同样的结果．

例2 求曲线 $x^2+y^2+z^2=6$，$x+y+z=0$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线及法平面方程．

解 设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-6$，$G(x,y,z)=x+y+z$，则

$$F_x=2x,\ F_y=2y,\ F_z=2z,$$

$$G_x=1,\quad G_y=1,\quad G_z=1.$$

因而
$$\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_{(1,-2,1)}=\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-6,$$

$$\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_{(1,-2,1)}=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_{(1,-2,1)}=\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=6.$$

故所求的切线方程为

$$\frac{x-1}{-6}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{6},$$

即
$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{1},$$

法平面方程为

$$-6(x-1)+0\cdot(y+2)+6(z-1)=0,$$

即
$$x-z=0.$$

二、曲面的切平面与法线

我们先讨论由隐式给出的曲面方程

$$F(x,\ y,\ z)=0 \tag{9}$$

的情形，然后把由显式给出的曲面方程 $z=f(x,\ y)$ 作为特殊情形而导出相应的结果.

设曲面 Σ 由方程(9)给出，$M(x_0,\ y_0,\ z_0)$是曲面 Σ 上的一点，并设函数 $F(x,\ y,\ z)$ 的偏导数在该点连续且不同时为零. 在曲面 Σ 上，通过点 M 任意引一条曲线 Γ（图 8-8），假定曲线 Γ 的参数方程为

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\omega(t), \tag{10}$$

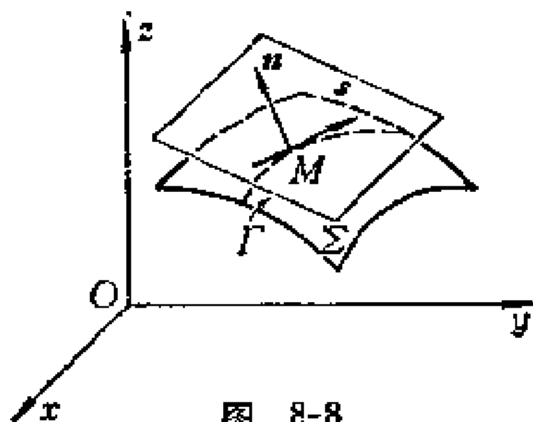


图 8-8

$t=t_0$ 对应于点 $M(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 且 $\varphi'(t_0)$，$\psi'(t_0)$，$\omega'(t_0)$ 不全为零，

则由(9)式可得这曲线的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{x_0'}=\frac{y-y_0}{y_0'}=\frac{z-z_0}{z_0'}.$$

我们现在要证明，在曲面 Σ 上通过点 M 的任何曲线的切线都在同一平面上. 事实上，因为曲线 Γ 完全在曲面 Σ 上，所以有恒等式

$$F[\varphi(t),\ \psi(t),\ \omega(t)]\equiv 0,$$

又因 $F(x,\ y,\ z)$ 在点 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 处有连续偏导数，且 $x_0',\ y_0',\ z_0'$ 存在，所以这恒等式左边的复合函数在 $t=t_0$ 时有全导数 $\frac{dF}{dt}$. 于是

$$\left.\frac{dF}{dt}\right|_{t=t_0}=0,$$

即有

$$F_x(x_0,\ y_0,\ z_0)x_0'+F_y(x_0,\ y_0,\ z_0)y_0'+F_z(x_0,y_0,\ z_0)z_0'=0. \quad (11)$$

(11)式表示向量 $\boldsymbol{n}=\{F_x(x_0,\ y_0,\ z_0),\ F_y(x_0,\ y_0,\ z_0),\ F_z(x_0,\ y_0,\ z_0)\}$ 与曲线(10)的切线的方向向量 $\boldsymbol{s}=\{x_0',\ y_0',\ z_0'\}$ 垂直. 因为曲线(10)是曲面上通过点 M 的任意一条曲线，它们在点 M 的切线都与同一向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直，所以在曲面上通过点 M 的一切曲线的切线都在同一平面上(图 8-8). 这个平面叫做曲面在点 M 的切平面. 这切平面方程是

$$F_x(x_0,\ y_0,\ z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,\ y_0,\ z_0)(y-y_0)$$
$$+F_z(x_0,\ y_0,\ z_0)(z-z_0)=0. \quad (12)$$

通过点 $M(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 而垂直于切平面(12)的直线叫做曲面在该点的法线. 法线方程是

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,\ y_0,\ z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,\ y_0,\ z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,\ y_0,\ z_0)}. \quad (13)$$

现在来考虑曲面方程

$$z=f(x,y). \quad (14)$$

令 $$F(x, y, z)=f(x, y)-z,$$

可见 $$F_x(x, y, z)=f_x(x, y), \quad F_y(x, y, z)=f_y(x, y),$$

$$F_z(x, y, z)=-1.$$

于是，当函数 $f(x, y)$ 的偏导数 $f_x(x, y)$、$f_y(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 连续时，则曲面(14)在点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 的切平面方程为

$$z-z_0=f_x(x_0, y_0)(x-x_0)+f_y(x_0, y_0)(y-y_0),$$

而法线方程为

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0, y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0, y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

如果用 α、β、γ 表示法线的方向角，并假定法线的方向是向上的，即使得它与 z 轴的正向所成的角 γ 是一锐角，则法线的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \qquad \cos\beta=\frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}.$$

这里，把 $f_x(x_0, y_0)$，$f_y(x_0, y_0)$ 分别简记为 f_x，f_y.

例 3 求球面 $x^2+y^2+z^2=14$ 在点 $(1, 2, 3)$ 处的切平面及法线方程.

解 $F(x, y, z)=x^2+y^2+z^2-14$,

$F_x(x, y, z)=2x, \quad F_y(x, y, z)=2y, \quad F_z(x, y, z)=2z.$

$F_x(1, 2, 3)=2, \quad F_y(1, 2, 3)=4, \quad F_z(1, 2, 3)=6.$

所以在点 $(1, 2, 3)$ 处此球面的切平面方程为

$$2(x-1)+4(y-2)+6(z-3)=0,$$

即 $$x+2y+3z-14=0.$$

法线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3},$$

即 $$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}.$$

由此可见，法线经过原点（即球心）.

例 4 求旋转抛物面 $z=x^2+y^2-1$ 在点 $(2, 1, 4)$ 处的切平面及法线方程.

解 $f(x, y)=x^2+y^2-1,$

$$f_x(x, y)=2x, \quad f_y(x, y)=2y.$$

$$f_x(2, 1)=4, \quad f_y(2, 1)=2.$$

所以在点 $(2, 1, 4)$ 处的切平面方程为

$$4(x-2)+2(y-1)-(z-4)=0.$$

即 $$4x+2y-z-6=0.$$

法线方程为

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{-1}.$$

习　题　8-6

1. 求曲线 $x=t-\sin t, y=1-\cos t, z=4\sin\frac{t}{2}$ 在点 $\left(\frac{\pi}{2}-1, 1, 2\sqrt{2}\right)$ 处的切线及法平面方程.

2. 求曲线 $x=\frac{t}{1+t}$, $y=\frac{1+t}{t}$, $z=t^2$ 在对应于 $t=1$ 的点处的切线及法平面方程.

3. 求曲线 $y^2=2mx$, $z^2=m-x$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切线及法平面方程.

4*. 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0, \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切线及法平面方程.

5. 求出曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上的点，使在该点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.

6. 求曲面 $e^z-z+xy=3$ 在点 $(2, 1, 0)$ 处的切平面及法线方程.

7. 求曲面 $ax^2+by^2+cz^2=1$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切平面及法线方程.

8. 求椭球面 $x^2+2y^2+z^2=1$ 上平行于平面 $x-y+2z=0$ 的切平面方程。

9. 在曲面 $z=xy$ 上求一点，使这点处的法线垂直于平面 $x+3y+z+9=0$，并写出这法线的方程.

10. 试证曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ $(a>0)$ 上任何点处的切平面在各坐标轴上的截距之和等于 a.

11. 求旋转椭球面 $3x^2+y^2+z^2=16$ 上点 $(-1, -2, 3)$ 处的切平面与 xOy 面的夹角的余弦。

第七节 方向导数与梯度

一、方向导数

现在我们来讨论函数 $z=f(x, y)$ 在一点 P 沿任何方向的变化率问题.

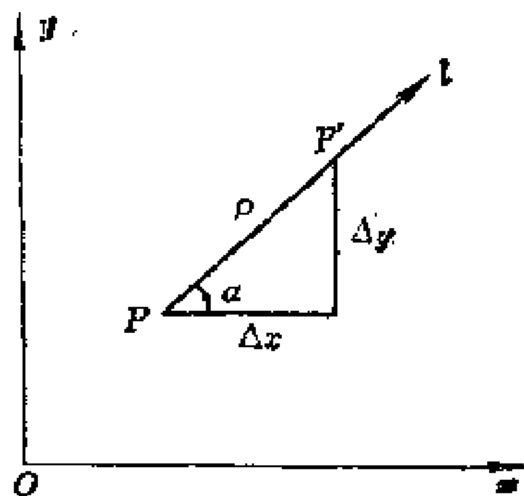


图 8-9

设函数 $z=f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 的某一邻域内有定义. 自点 P 引有向直线 l, l 与 x 轴的正向的夹角为 α. 并设 $P'(x+\Delta x, y+\Delta y)$ 为 l 上的另一点(图 8-9). 我们考虑函数的增量 $f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)$ 与 P、P' 两点间的距离 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 的比值. 当 P' 沿着 l 趋近 P 时，如果这个比的极限存在，则称这极限值为函数在点 P 沿着方向 l 的方向导数，记作

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)}{\rho}. \tag{1}$$

从定义可知，当函数 $f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 的偏导数 f_x、f_y 存在时，函数 $f(x, y)$ 在点 P 沿着 x 轴正向 $e_1=\{1, 0\}$, y 轴正向 $e_2=\{0, 1\}$ 的方向导数存在且其值依次为 f_x, f_y, 函数 $f(x, y)$ 在

点 P 沿 x 轴负向 $e_1' = \{-1, 0\}$，y 轴负向 $e_2' = \{0, -1\}$ 的方向导数也存在且其值依次为 $-f_x$，$-f_y$.

关于方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l}$ 的存在及计算，我们有下面的定理.

定理　如果函数 $z=f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 是可微分的，那末函数在该点沿任一方向 l 的方向导数都存在，且有

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha, \tag{2}$$

其中 α 为方向 l 与 x 轴正向的夹角.

证　根据函数 $z=f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 是可微分的假定，函数的增量可以表达为

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+o(\rho).$$

两边各除以 ρ，得到

$$\begin{aligned}&\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)}{\rho}\\&=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{\rho}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\Delta y}{\rho}+\frac{o(\rho)}{\rho}\\&=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha+\frac{o(\rho)}{\rho}.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)}{\rho}\\&=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha.\end{aligned}$$

这就证明了方向导数存在且其值为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha.$$

例 1　设由原点到点 (x, y) 的向径 $\boldsymbol{r}$ 与 x 轴正向的夹角为 θ，有向直线 l 与 x 轴正向的夹角为 α，求 $\frac{\partial r}{\partial l}$，其中

$$r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

解　因为
$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{r}=\cos\theta,$$
$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{r}=\sin\theta.$$

所以
$$\frac{\partial r}{\partial l}=\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha=\cos(\theta-\alpha).$$

由例1可知，当 $\alpha=\theta$ 时，$\frac{\partial r}{\partial l}=1$，即 r 沿着向径本身方向的方向导数为1；而当 $\alpha=\theta\pm\frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{\partial r}{\partial l}=0$，即 r 沿着与向径垂直方向的方向导数为零.

对于三元函数 $u=f(x, y, z)$ 来说，它在空间一点 $P(x, y, z)$ 沿着方向 l（设方向 l 的方向角为 α、β、γ）的方向导数，同样可以定义为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)-f(x, y, z)}{\rho}, \tag{3}$$

其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$，$\Delta x=\rho\cos\alpha$，$\Delta y=\rho\cos\beta$，$\Delta z=\rho\cos\gamma$.

同样可以证明，如果函数在所考虑的点处具有全微分，那末函数在该点沿着方向 l 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma. \tag{4}$$

*二、梯　　度

与方向导数有关联的一个概念是函数的梯度．在二元函数的情形，设函数 $z=f(x, y)$ 在 xOy 平面（或平面的某一部分）具有一阶连续偏导数，则对于平面（或平面的已知部分）的每一点 $P(x, y)$，都可定出一个向量

$$\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j},$$

这向量就称为函数 $z=f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 的梯度，记作 $\mathrm{grad}\, f(x, y)$，即

$$\mathrm{grad}\, f(x, y)=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}.$$

如果设 $\boldsymbol{e}=\cos\alpha\,\boldsymbol{i}+\sin\alpha\,\boldsymbol{j}$ 是方向 l 上的单位向量，则由方向导数的计算公式可知

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial l}&=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha=\left\{\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y}\right\}\cdot\{\cos\alpha,\ \sin\alpha\}\\&=\mathrm{grad}\, f(x, y)\cdot\boldsymbol{e}\\&=|\mathrm{grad}\, f(x, y)|\cos(\mathrm{grad}\, f(x, y),\ \boldsymbol{e}).\end{aligned}$$

这里，$(\mathrm{grad}\, f(x, y),\ \boldsymbol{e})$ 表示向量 $\mathrm{grad}\, f(x, y)$ 与 $\boldsymbol{e}$ 的夹角。由此可以看出，当方向 l 与梯度的方向一致时，有

$$\cos(\mathrm{grad}\, f(x, y),\ \boldsymbol{e})=1,$$

从而 $\frac{\partial f}{\partial l}$ 有最大值，所以沿梯度方向的方向导数达到最大值，也就是说，梯度的方向是函数 $f(x, y)$ 在这点增长最快的方向。因此，我们可得到如下结论：

函数在某点的梯度是这样一个向量，它的方向与取得最大方向导数的方向一致，而它的模为方向导数的最大值。

由梯度的定义可知，梯度的模为

$$|\mathrm{grad}\, f(x, y)|=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2},$$

当 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 不为零时，梯度与 x 轴的正向所成角的正切为

$$\mathrm{tg}\,\theta=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial x}}.$$

我们知道，一般说来二元函数 $z=f(x, y)$ 在几何上表示一个

曲面，这曲面被平面 $z=c$(c 是常数)所截得的曲线 L 的方程为

$$\begin{cases} z=f(x,\ y), \\ z=c. \end{cases}$$

这条曲线 L 在 xOy 面上的投影是一条平面曲线 L^* (图 8-10)，它在 xOy 平面直角坐标系中的方程为

$$f(x,\ y)=c.$$

对于曲线 L^* 上的一切点，已给函数的函数值都是 c，所以我们称平面曲线 L^* 为函数 $z=f(x,\ y)$ 的等高线.

由于等高线 $f(x,\ y)=c$ 上任一点 $P(x,\ y)$ 处的法线的斜率为

$$-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=-\frac{1}{\left(-\frac{f_x}{f_y}\right)}=\frac{f_y}{f_x},$$

所以梯度

$$\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}$$

为等高线上 P 点处的法线向量．因此我们可得梯度与等高线的下述关系：函数 $z=f(x,\ y)$ 在点 $P(x,\ y)$ 的梯度方向与过点 P 的等高线 $f(x,\ y)=c$ 在这点的法线的一个方向相同，且从数值较低的等高线指向数值较高的等高线(图 8-10)，而梯度的模等于函数在这个法线方向的方向导数，这个法线方向就是方向导数取得最大值的方向.

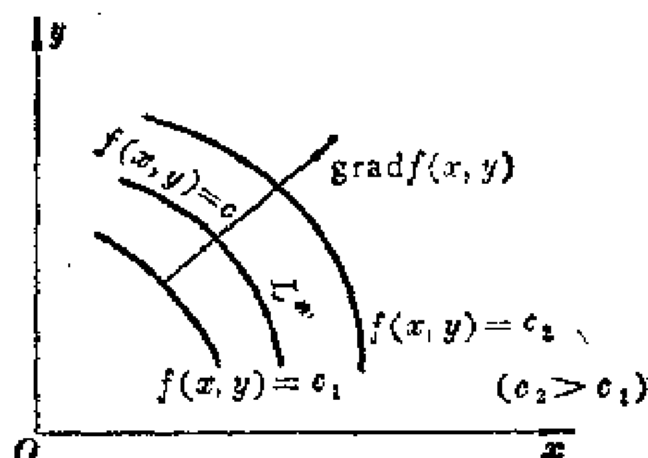


图 8-10

上面所说的梯度概念可以类似地推广到三元函数的情形．设函数 $u=f(x,\ y,\ z)$ 在空间(或空间的某一部分)具有一阶连续偏导数，则对于空间(或空间的已知部分)的每一点 $P(x,\ y,\ z)$ 都可定出一个向量

$$\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k},$$

这向量就称为函数 $u=f(x, y, z)$ 在点 $P(x, y, z)$ 的梯度，记作 $\operatorname{grad} f(x, y, z)$，即

$$\operatorname{grad} f(x, y, z)=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

经过与二元函数的情形完全类似的讨论可知，三元函数的梯度也是这样一个向量，它的方向与取得最大方向导数的方向一致，而它的模为方向导数的最大值。

如果我们引进曲面

$$f(x, y, z)=c$$

为函数 $u=f(x, y, z)$ 的等量面的概念，则同样可得函数 $u=f(x, y, z)$在点 $P(x, y, z)$的梯度方向与过点 P 的等量面 $f(x, y, z)=c$ 在这点的法线的一个方向相同，且从数值较低的等量面指向数值较高的等量面，而梯度的模等于函数在这个法线方向的方向导数。

例 2 求 $\operatorname{grad}\frac{1}{x^2+y^2}$.

解 这里 $$f(x, y)=\frac{1}{x^2+y^2}.$$

因为 $$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2},\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{2y}{(x^2+y^2)^2},$$

所以 $$\operatorname{grad}\frac{1}{x^2+y^2}=-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\boldsymbol{i}-\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\boldsymbol{j}.$$

例 3 设 $f(x, y, z)=x^2+y^2+z^2$，求 $\operatorname{grad} f(1, -1, 2)$.

解 因为 $f_x=2x,\qquad f_y=2y,\qquad f_z=2z,$

在点 $(1, -1, 2)$ 处

$$f_x=2,\qquad f_y=-2,\qquad f_z=4,$$

所以 $$\operatorname{grad} f(1, -1, 2)=2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}.$$

下面我们简单地介绍数量场与向量场的概念。

如果对于空间或部分空间的任一点 M，都有一个确定的数量 $f(M)$，则称在这空间或部分空间上确定了一个数量场(例如温度场、密度场等)．一个数量场可用一个数量函数 $f(M)$ 来确定．如果与点 M 相对应的是一个向量 $\boldsymbol{F}(M)$，则称在这空间或部分空间上确定了一个向量场(例如力场、速度场等)．一个向量场可用一个向量函数 $\boldsymbol{F}(M)$ 来确定，而

$$\boldsymbol{F}(M)=P(M)\boldsymbol{i}+Q(M)\boldsymbol{j}+R(M)\boldsymbol{k},$$

其中 $P(M)$，$Q(M)$，$R(M)$ 是点 M 的数量函数．

利用场的概念，我们可以说向量函数 $\mathbf{grad}\, f(M)$ 确定了一个向量场——梯度场，它是由数量场 $f(M)$ 产生的．通常称函数 $f(M)$ 为这个向量场的势，而这个向量场又称为势场．必须注意，任意一个向量场不一定是势场，因为它不一定是某个数量函数的梯度场．例如向量场 $\boldsymbol{F}=y^2\boldsymbol{i}+xz\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$ 就不是势场．

例 4 设质量等于 m 的质点位于空间一点 O，质量等于 1 的质点位于空间一点 M，试求数量场 $\frac{m}{r}$ 的梯度，其中 r 为 O 与 M 之间的距离．

解 取 O 为坐标原点，设 M 点的坐标为 x，y，z，则 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，从而得函数 $\frac{m}{r}$ 的梯度为

$$\mathbf{grad}\,\frac{m}{r}=-\frac{m}{r^2}\left(\frac{x}{r}\boldsymbol{i}+\frac{y}{r}\boldsymbol{j}+\frac{z}{r}\boldsymbol{k}\right).$$

如果用 $\boldsymbol{r}_0$ 表示沿 $\overrightarrow{OM}$ 方向的单位向量，则 $\boldsymbol{r}_0=\frac{x}{r}\boldsymbol{i}+\frac{y}{r}\boldsymbol{j}+\frac{z}{r}\boldsymbol{k}$，因而梯度可以写成

$$\mathbf{grad}\,\frac{m}{r}=-\frac{m}{r^2}\boldsymbol{r}_0.$$

这个梯度表示两质点间的引力，其方向由 M 指向原点，其大小与两质点的质量乘积成正比，而与它们的距离平方成反比．因此，根

据牛顿万有引力定律知道这个势场为引力场，函数$\frac{m}{r}$称为引力势。

习 题 8-7

1．求函数$z=x^2+y^2$在点(1, 2)处沿从点(1, 2)到点$(2, 2+\sqrt{3})$的方向的方向导数。

2．求函数$u=xyz$在点(5, 1, 2)处沿从点(5, 1, 2)到点(9, 4, 14)的方向的方向导数。

3．求函数$z=1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$在点$\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$处沿曲线$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$在这点的内法线方向的方向导数。

4*．设$f(x, y, z)=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$，

求$\mathrm{grad}\, f(0, 0, 0)$及$\mathrm{grad}\, f(1, 1, 1)$。

5*．设u，v都是x，y，z的函数，u，v的各偏导数都存在且连续，证明

(1) $\mathrm{grad}(u+v)=\mathrm{grad}\, u+\mathrm{grad}\, v$;

(2) $\mathrm{grad}(uv)=v\,\mathrm{grad}\, u+u\,\mathrm{grad}\, v$;

(3) $\mathrm{grad}(u^2)=2u\,\mathrm{grad}\, u$。

第八节 多元函数的极值及其求法

一、多元函数的极值及最大值、最小值

在实际问题中，往往会遇到多元函数的最大值、最小值问题。与一元函数相类似，多元函数的最大值、最小值与极大值、极小值有密切联系，因此我们以二元函数为例，先来讨论多元函数的极值问题。

定义 设函数$z=f(x, y)$在点(x_0, y_0)的某个邻域内有定义，对于该邻域内异于(x_0, y_0)的点(x, y)：如果都适合不等式$f(x, y)<f(x_0, y_0)$，则称函数在点(x_0, y_0)有极大值$f(x_0, y_0)$；如果都适合不等式$f(x, y)>f(x_0, y_0)$，则称函数在点(x_0, y_0)有极小值$f(x_0, y_0)$。极大值、极小值统称为极值。使函数取得极值的点称

为极值点.

例 1 函数 $z=3x^2+4y^2$ 在点 (0, 0) 处有极小值. 因为点 (0, 0) 的任一邻域内异于 (0, 0) 的点的函数值都为正, 而在点 (0, 0)处的函数值为零. 从几何上看这是显然的, 因为点 (0, 0, 0) 是开口朝上的椭圆抛物面 $z=3x^2+4y^2$ 的顶点.

例 2 函数 $z=-\sqrt{x^2+y^2}$ 在点(0, 0)处有极大值. 因为点 (0, 0, 0)是位于 xOy 面下方的锥面 $z=-\sqrt{x^2+y^2}$ 的顶点.

例 3 函数 $z=xy$ 在点(0, 0)处既不取得极大值也不取得极小值. 因为在点(0, 0)处的函数值为零, 而在点(0, 0)的任一邻域内, 总有使函数值为正的点, 也有使函数值为负的点.

求二元函数的极值问题, 一般地可以利用偏导数来解决. 下面两个定理就是关于这问题的结论.

定理 1(必要条件) 设函数 $z=f(x, y)$ 在点(x_0, y_0)可微分, 且在点(x_0, y_0)处有极值, 则在该点的偏导数必然为零:

$$f_x(x_0, y_0)=0, \qquad f_y(x_0, y_0)=0.$$

证 不妨设 $z=f(x, y)$在点(x_0, y_0)处有极大值. 依极大值的定义, 在点(x_0, y_0)的某邻域内异于(x_0, y_0)的点(x, y)都适合不等式

$$f(x, y)<f(x_0, y_0).$$

特殊地, 在该邻域内取 $y=y_0$ 而 $x\neq x_0$ 的点, 也应适合不等式

$$f(x, y_0)<f(x_0, y_0).$$

这表明一元函数 $f(x, y_0)$在 $x=x_0$ 处取得极大值, 因而必有

$$f_x(x_0, y_0)=0.$$

类似地可证

$$f_y(x_0, y_0)=0.$$

从几何上看, 这时曲面 $z=f(x, y)$在点(x_0, y_0, z_0)处的切平面

$$z-z_0=f_x(x_0, y_0)(x-x_0)+f_y(x_0, y_0)(y-y_0)$$

成为平行于 xOy 坐标面的平面 $z-z_0=0$.

类似地可推得，如果三元函数 $u=f(x, y, z)$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 可微分，则它在点 (x_0, y_0, z_0) 具有极值的必要条件为

$$f_x(x_0, y_0, z_0)=0, \qquad f_y(x_0, y_0, z_0)=0, \qquad f_z(x_0, y_0, z_0)=0.$$

仿照一元函数，凡是能使 $f_x(x, y)=0$, $f_y(x, y)=0$ 同时成立的点 (x_0, y_0) 称为函数 $z=f(x, y)$ 的驻点. 从定理 1 可知，可微分的函数的极值点必定是驻点，但函数的驻点不一定是极值点. 例如，点 $(0, 0)$ 是函数 $z=xy$ 的驻点，但函数在该点并无极值.

怎样判定一个驻点是否是极值点呢? 下面的定理回答了这个问题.

定理 2（充分条件） **设函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内连续且有一阶及二阶连续偏导数，又 $f_x(x_0, y_0)=0$, $f_y(x_0, y_0)=0$，令**

$$f_{xx}(x_0, y_0)=A, \ f_{xy}(x_0, y_0)=B, \ f_{yy}(x_0, y_0)=C,$$

则 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处是否取得极值的条件如下：

(1) $B^2-AC<0$ 时具有极值，且当 $A<0$ 时有极大值，当 $A>0$ 时有极小值；

(2) $B^2-AC>0$ 时没有极值；

(3) $B^2-AC=0$ 时可能有极值，也可能没有极值，还需另作讨论.

这个定理现在不证①. 利用定理 1、2，我们把具有二阶连续偏导数的函数 $z=f(x, y)$ 的极值的求法叙述如下：

第一步 解方程组

$$f_x(x, y)=0, \ f_y(x, y)=0,$$

① 证明见第九节二.

求得一切实数解，即可求得一切驻点.

第二步　对于每一个驻点 (x_0, y_0)，求出二阶偏导数的值 A、B 和 C.

第三步　定出 B^2-AC 的符号，按定理2的结论判定 $f(x_0, y_0)$ 是否是极值、是极大值还是极小值.

例 4　求函数 $f(x, y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值.

解　先解方程组

$$\begin{cases} f_x(x, y)=3x^2+6x-9=0, \\ f_y(x, y)=-3y^2+6y=0, \end{cases}$$

求得驻点为 $(1, 0)$、$(1, 2)$、$(-3, 0)$、$(-3, 2)$.

再求出二阶偏导数.

$$A=f_{xx}(x, y)=6x+6, \qquad B=f_{xy}(x, y)=0,$$

$$C=f_{yy}(x, y)=-6y+6.$$

在点 $(1, 0)$ 处，$B^2-AC=-12\cdot 6<0$，又 $A>0$，所以函数在 $(1, 0)$ 处有极小值 $f(1, 0)=-5$；

在点 $(1, 2)$ 处，$B^2-AC=-12\cdot(-6)>0$，所以 $f(1, 2)$ 不是极值；

在点 $(-3, 0)$ 处，$B^2-AC=-(-12)\cdot 6>0$，所以 $f(-3, 0)$ 不是极值；

在点 $(-3, 2)$ 处，$B^2-AC=-(-12)\cdot(-6)<0$，又 $A<0$，所以函数在 $(-3, 2)$ 处有极大值 $f(-3, 2)=31$.

与一元函数相类似，我们可以利用函数的极值来求函数的最大值和最小值．在第一节中我们已经指出，如果 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则 $f(x, y)$ 在 D 上必定能取得它的最大值和最小值．这种使函数取得最大值或最小值的点既可能在 D 的内部，也可能在 D 的边界上．如果函数在 D 的内部取得最大值（最小值），又函数在 L 内可微且只有有限个驻点，则这个最大值（最小值）也

是函数的极大值(极小值). 因此,求函数的最大值和最小值的一般方法是:将函数$f(x, y)$在D内的所有极值及在D的边界上的最大值和最小值相互比较,其中最大的就是最大值,最小的就是最小值. 但这种做法,由于要求出$f(x, y)$在D的边界上的最大值和最小值,以及为了确定D内的极值,还需要计算二阶偏导数,所以往往相当复杂. 在通常遇到的实际问题中,如果根据问题的性质,知道函数$f(x, y)$在区域D内一定能取得最大值(最小值),而函数在D内只有一个驻点,那末可以肯定该驻点处的函数值就是函数$f(x, y)$在D上的最大值(最小值).

例5 某厂要用铁板做成一个体积为2立方米的有盖长方体水箱. 问当长、宽、高各取怎样的尺寸时,才能使用料最省.

解 设水箱的长为x米,宽为y米,则其高应为$\frac{2}{xy}$米. 此水箱所用材料的面积为

$$A=2\left(xy+y\cdot\frac{2}{xy}+x\cdot\frac{2}{xy}\right),$$

即

$$A=2\left(xy+\frac{2}{x}+\frac{2}{y}\right)\quad(x>0,\ y>0).$$

可见材料面积A是x和y的二元函数.

令

$$A_x=2\left(y-\frac{2}{x^2}\right)=0,$$

$$A_y=2\left(x-\frac{2}{y^2}\right)=0.$$

解这方程组,得

$$x=\sqrt[3]{2},\ y=\sqrt[3]{2}.$$

根据题意可知,水箱所用材料面积的最小值一定存在,并在开区域D: $x>0$, $y>0$内取得. 又函数在D内只有唯一的驻点$(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$,因此可断定当$x=\sqrt[3]{2}$, $y=\sqrt[3]{2}$时,A取得最小值. 就是说,当水箱的长为$\sqrt[3]{2}$米、宽为$\sqrt[3]{2}$米、高为$\frac{2}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}}$

$=\sqrt[3]{2}$ 米时，水箱所用的材料最省。

从这个例子还可看出，在体积一定的长方体中，以立方体的表面积为最小。

例 6 有一宽为 24 厘米的长方形铁板，把它两边折起来做成一断面为等腰梯形的水槽。问怎样折法才能使断面的面积最大？

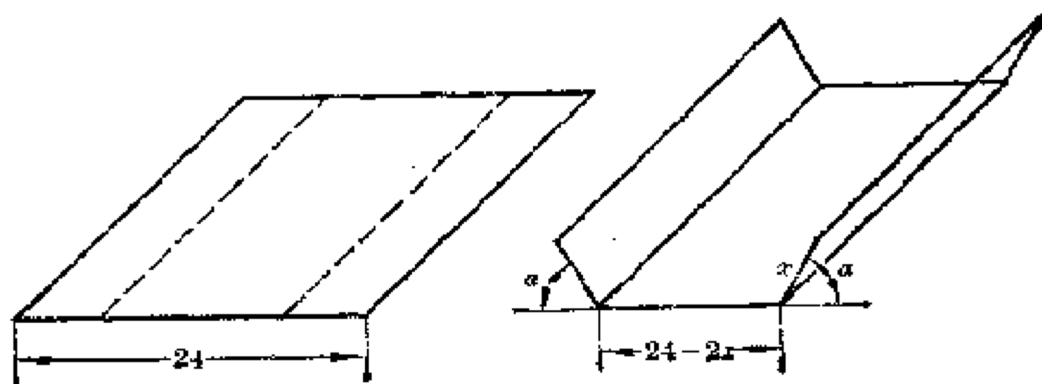


图 8-11

解 设折起来的边长为 x 厘米，倾角为 α（图 8-11）。那末梯形断面的下底长为 $24-2x$，上底长为 $24-2x+2x\cos\alpha$，高为 $x\sin\alpha$，所以断面面积为

$$A=\frac{1}{2}(24-2x+2x\cos\alpha+24-2x)\cdot x\sin\alpha.$$

即
$$A=24x\sin\alpha-2x^2\sin\alpha+x^2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\left(0<x<12,\ 0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

可见断面的面积 A 是 x 和 α 的二元函数。

令

$$\begin{cases} A_x=24\sin\alpha-4x\sin\alpha+2x\sin\alpha\cos\alpha=0, \\ A_\alpha=24x\cos\alpha-2x^2\cos\alpha+x^2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=0. \end{cases}$$

由于 $\alpha\neq0$、$x\neq0$，上述方程组可化为

$$\begin{cases} 12-2x+x\cos\alpha=0, \\ 24\cos\alpha-2x\cos\alpha+x(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=0. \end{cases}$$

解这方程组，得

$$\alpha=\frac{\pi}{3}=60^\circ,\ x=8(\text{厘米}).$$

根据题意可知断面面积的最大值一定存在，并且在区域D：$0<x<12$，$0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$内取得①．又函数在$D$内只有一个驻点．因此可以断定，当$x=8$厘米，$\alpha=60^\circ$时，就能使断面的面积最大．

二、条件极值　拉格朗日乘数法

上面所讨论的极值问题，对于函数的自变量，除了限制在函数的定义域内以外，并无其他条件，所以有时候称为无条件极值．但在实际问题中，有时会遇到对函数的自变量还有附加条件的极值问题．例如，求表面积为a^2而体积为最大的长方体的体积问题．设长方体的三棱的长为x, y, z，则体积$V=xyz$．又因假定表面积为a^2，所以自变量x, y, z还必须满足附加条件$2(xy+yz+xz)=a^2$．象这种对自变量有附加条件的极值问题称为条件极值．对于有些实际问题，可以把条件极值化为无条件极值，然后利用第一目中的方法加以解决．例如上述问题，可由条件$2(xy+yz+xz)=a^2$，将z表成x, y的函数

$$z=\frac{a^2-2xy}{2(x+y)}.$$

再把它代入$V=xyz$中，于是问题就化为

$$V=\frac{xy}{2}\left(\frac{a^2-2xy}{x+y}\right)$$

的无条件极值，例5也是属于把条件极值化为无条件极值的例子．

但在很多情形下，将条件极值化为无条件极值，问题并不这样简单．我们另有一种直接寻求条件极值的方法，可以不必先把问题化到无条件极值的问题，这就是下面要介绍的拉格朗日乘数法．

① 可以通过计算得知$\alpha=\frac{\pi}{2}$时的函数值比$\alpha=60^\circ$，$x=8$时的函数值为小．

现在我们来寻求函数

$$z=f(x, y) \tag{1}$$

在条件

$$\varphi(x, y)=0 \tag{2}$$

下取得极值的必要条件.

如果函数(1)在(x_0, y_0)取得所求的极值，那末首先有

$$\varphi(x_0, y_0)=0. \tag{3}$$

我们假定在(x_0, y_0)的某一邻域内 $f(x, y)$ 与 $\varphi(x, y)$ 均有连续的一阶偏导数，而 $\varphi_y(x_0, y_0)\neq 0$. 由隐函数存在定理可知，方程(2)确定一个单值可导且具有连续导数的函数$y=\psi(x)$，将其代入(1)式，结果得到一个变量 x 的函数

$$z=f[x, \psi(x)]. \tag{4}$$

于是函数(1)在(x_0, y_0)取得所求的极值，也就是相当于函数(4)在 $x=x_0$ 取得极值. 由一元可导函数取得极值的必要条件知道

$$\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=x_0}=f_x(x_0, y_0)+f_y(x_0, y_0)\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=0, \tag{5}$$

而由(2)用隐函数求导公式，有

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=-\frac{\varphi_x(x_0, y_0)}{\varphi_y(x_0, y_0)},$$

代入(5)式，得

$$f_x(x_0, y_0)-f_y(x_0, y_0)\frac{\varphi_x(x_0, y_0)}{\varphi_y(x_0, y_0)}=0. \tag{6}$$

(3)、(6)两式就是函数(1)在条件(2)下在(x_0, y_0)取得极值的必要条件.

设 $\dfrac{f_y(x_0, y_0)}{\varphi_y(x_0, y_0)}=-\lambda$，上述必要条件就变为

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0)+\lambda\varphi_x(x_0, y_0)=0, \\ f_y(x_0, y_0)+\lambda\varphi_y(x_0, y_0)=0, \\ \varphi(x_0, y_0)=0. \end{cases} \tag{7}$$

容易看出，(7)中的前两式的左端正是函数

$$F(x, y)=f(x, y)+\lambda\varphi(x, y)$$

的两个一阶偏导数在(x_0, y_0)的值，其中λ是一个待定常数。

由以上讨论，我们得到以下结论。

拉格朗日乘数法 要找函数$z=f(x, y)$在条件$\varphi(x, y)=0$下的可能极值点，可以先构成函数

$$F(x, y)=f(x, y)+\lambda\varphi(x, y),$$

其中λ为某一常数．求其对x与y的一阶偏导数，并使之为零，然后与方程(2)联立起来：

$$\begin{cases} f_x(x, y)+\lambda\varphi_x(x, y)=0, \\ f_y(x, y)+\lambda\varphi_y(x, y)=0, \\ \varphi(x, y)=0. \end{cases} \tag{8}$$

由这方程组解出x, y及λ，则其中x, y就是可能极值点的坐标。

这方法还可以推广到自变量多于两个而条件多于一个的情形．例如，要求函数

$$u=f(x, y, z, t)$$

在条件

$$\varphi(x, y, z, t)=0, \qquad \psi(x, y, z, t)=0 \tag{9}$$

下的极值，可以先构成函数

$$F(x, y, z, t)=f(x, y, z, t)+\lambda_1\varphi(x, y, z, t)+\lambda_2\psi(x, y, z, t),$$

其中λ_1, λ_2均为常数，求其一阶偏导数，并使之为零，然后与(9)中的两方程联立起来求解，这样得出的x、y、z、t就是可能极值点的坐标。

至于如何确定所求得的点是否极值点，在实际问题中往往可根据问题本身的性质来判定。

例 7 求表面积为a^2而体积为最大的长方体的体积。

解 设长方体的三棱长为 x, y, z，则问题就是在条件

$$\varphi(x, y, z)=2xy+2yz+2xz-a^2=0 \tag{10}$$

下，求函数

$$V=xyz \quad (x>0,\ y>0,\ z>0)$$

的最大值．构成函数

$$F(x, y, z)=xyz+\lambda(2xy+2yz+2xz-a^2),$$

求其对 x、y、z 的偏导数，并使之为零，得到

$$\begin{aligned} &yz+2\lambda(y+z)=0, \\ &xz+2\lambda(x+z)=0, \\ &xy+2\lambda(y+x)=0. \end{aligned} \tag{11}$$

再与(10)联立求解．

因 x、y、z 都不等于零，所以由(11)可得

$$\frac{x}{y}=\frac{x+z}{y+z}, \qquad \frac{y}{z}=\frac{x+y}{x+z}.$$

由以上两式解得

$$x=y=z.$$

将此代入(10)式，便得

$$x=y=z=\frac{\sqrt{6}}{6}a,$$

这是唯一可能的极值点．因为由问题本身可知最大值一定存在，所以这个可能的极值点就是最大值点．也就是说，表面积为 a^2 的长方体中，以棱长为 $\frac{\sqrt{6}}{6}a$ 的正方体的体积为最大，最大体积 $V=\frac{\sqrt{6}}{36}a^3$．

习 题 8-8

1．求函数 $f(x, y)=4(x-y)-x^2-y^2$ 的极值．

2．求函数 $f(x, y)=(6x-x^2)(4y-y^2)$ 的极值．

3. 求函数 $f(x, y)=e^{2x}(x+y^2+2y)$ 的极值.

4. 求函数 $z=xy$ 在适合附加条件 $x+y=1$ 下的极大值.

5. 从斜边之长为 l 的一切直角三角形中，求有最大周界的直角三角形.

6. 要造一个容积等于定数 k 的长方体无盖水池，应如何选择水池的尺寸，方可使它的表面积最小.

7. 在平面 xOy 上求一点，使它到 $x=0$, $y=0$ 及 $x+2y-16=0$ 三直线的距离平方之和为最小.

8. 将周长为 $2p$ 的矩形绕它的一边旋转而构成一个圆柱体. 问矩形的边长各为多少时，才可使圆柱体的体积为最大?

9. 求内接于半径为 a 的球且有最大体积的长方体.

10. 抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 截成一椭圆，求原点到这椭圆的最长与最短距离.

第九节 二元函数的泰勒公式

一、二元函数的泰勒公式

在上册第三章，我们已经知道：如果函数 $f(x)$ 在含有 x_0 的某个开区间 (a, b) 内具有直到 $(n+1)$ 阶的导数，则当 x 在 (a, b) 内时，有下面的 n 阶泰勒公式

$$
\begin{aligned}
f(x)=&f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\\
&+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\\
&+\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\qquad(0<\theta<1)
\end{aligned}
$$

成立. 利用一元函数的泰勒公式，使我们可用 n 次多项式来近似表达函数 $f(x)$，且误差是当 $x\to x_0$ 时比 $(x-x_0)^n$ 高阶的无穷小. 对多元函数来说，无论是为了理论的或实际计算的目的，也都有必要考虑用多个变量的多项式来近似表达一个给定的多元函数，并能具体地估算出误差的大小来. 今以二元函数为例，设 $z=f(x, y)$

在点(x_0, y_0)的某一邻域内连续且有直到$(n+1)$阶的连续偏导数，(x_0+h, y_0+k)为此邻域内任一点，我们的问题就是要把函数$f(x_0+h, y_0+k)$近似地表达为$h=x-x_0$, $k=y-y_0$的n次多项式，而由此所产生的误差是当$\rho=\sqrt{h^2+k^2}\to 0$时比ρ^n高阶的无穷小。为了解决这个问题，就要把一元函数的泰勒中值定理推广到多元函数的情形。

定理 设$z=f(x, y)$在点(x_0, y_0)的某一邻域内连续且有直到$(n+1)$阶的连续偏导数，(x_0+h, y_0+k)为此邻域内任一点，则有

$$
\begin{aligned}
&f(x_0+h, y_0+k)\\
&\quad=f(x_0, y_0)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0, y_0)\\
&\qquad+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)}f(x_0, y_0)+\cdots\\
&\qquad+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n)}f(x_0, y_0)\\
&\qquad+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n+1)}f(x_0+\theta h, y_0+\theta k),\\
&\qquad\qquad (0<\theta<1)
\end{aligned}
$$

其中记号

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0, y_0) \text{ 表示 } hf_x(x_0, y_0)+kf_y(x_0, y_0),$$

$$
\begin{aligned}
\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)}f(x_0, y_0) \text{ 表示 } & h^2f_{xx}(x_0, y_0)\\
&+2hkf_{xy}(x_0, y_0)+k^2f_{yy}(x_0, y_0),
\end{aligned}
$$

一般地，记号

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(m)}f(x_0, y_0) \text{ 表示 } \sum_{p=0}^{m}C_m^p h^p k^{m-p}\left.\frac{\partial^m f}{\partial x^p \partial y^{m-p}}\right|_{(x_0, y_0)}.$$

证 为了利用一元函数的泰勒公式来进行证明，我们引入函

数

$$\Phi(t)=f(x_0+ht,\ y_0+kt),\quad (0\leqslant t\leqslant 1).$$

显然 $\Phi(0)=f(x_0,\ y_0)$, $\Phi(1)=f(x_0+h,\ y_0+k)$.

由 $\Phi(t)$ 的定义及多元复合函数的求导法则，可得

$$\Phi'(t)=hf_x(x_0+ht,\ y_0+kt)+kf_y(x_0+ht,\ y_0+kt)$$

$$=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0+ht,\ y_0+kt),$$

$$\Phi''(t)=h^2f_{xx}(x_0+ht,\ y_0+kt)+2hkf_{xy}(x_0+ht,\ y_0+kt)$$

$$+k^2f_{yy}(x_0+ht,\ y_0+kt)$$

$$=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)}f(x_0+ht,\ y_0+kt),$$

……………………………………

$$\Phi^{(n+1)}(t)=\sum_{p=0}^{n+1}C_{n+1}^{p}h^pk^{n+1-p}\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^p\partial y^{n+1-p}}\Bigg|_{(x_0+ht,\,y_0+kt)}$$

$$=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n+1)}f(x_0+ht,\ y_0+kt).$$

利用一元函数的麦克劳林公式，得

$$\Phi(1)=\Phi(0)+\Phi'(0)+\frac{1}{2!}\Phi''(0)+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\Phi^{(n)}(0)+\frac{1}{(n+1)!}\Phi^{(n+1)}(\theta),\quad (0<\theta<1)$$

将 $\Phi(0)=f(x_0,\ y_0)$, $\Phi(1)=f(x_0+h,\ y_0+k)$ 及上面求得的 $\Phi(t)$ 直到 n 阶导数在 $t=0$ 的值，$\Phi^{(n+1)}(t)$ 在 $t=\theta$ 的值代入上式，即得

$$f(x_0+h,\ y_0+k)$$

$$=f(x_0,\ y_0)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,\ y_0)$$

$$+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)}f(x_0,\ y_0)+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n)}f(x_0,\ y_0)+R_n,\qquad (1)$$

其中

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n+1)}f(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k).$$

$$(0<\theta<1) \qquad (2)$$

定理证毕.

公式(1)称为二元函数 $f(x, y)$在点(x_0, y_0)的 n 阶泰勒公式，而 R_n 的表达式(2)称为拉格朗日型余项.

由二元函数的泰勒公式可知，以(1)式右边 h 及 k 的 n 次多项式近似表达函数 $f(x_0+h, y_0+k)$时，其误差为$|R_n|$. 由假设，函数的各$(n+1)$阶偏导数都连续，故它们的绝对值在点(x_0, y_0)的某一邻域内都不超过某一正常数 M. 于是，有下面的误差估计式：

$$\begin{aligned}|R_n|&\leqslant\frac{M}{(n+1)!}(|h|+|k|)^{n+1}\\&=\frac{M}{(n+1)!}\rho^{n+1}(|\cos\alpha|+|\sin\alpha|)^{n+1}\\&\leqslant\frac{(\sqrt{2})^{n+1}}{(n+1)!}M\rho^{n+1}\text{①},\end{aligned} \qquad (3)$$

其中 $\rho=\sqrt{h^2+k^2}$.

由(3)式可知，误差$|R_n|$是当 $\rho\to0$ 时比 ρ^n 高阶的无穷小.

当 $n=0$ 时，公式(1)成为

$$\begin{aligned}&f(x_0+h,\ y_0+k)\\&\quad=f(x_0,\ y_0)+hf_x(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k)\\&\qquad+kf_y(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k).\end{aligned} \qquad (4)$$

公式(4)称为二元函数的拉格朗日中值公式. 由(4)式即可推得下述结论：

如果函数 $f(x, y)$的偏导数 $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ 在某一区域内

---

① 令$|\cos\alpha|=x$, 则$|\sin\alpha|=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, $|\cos\alpha|+|\sin\alpha|=x+\sqrt{1-x^2}=\varphi(x)$, $\varphi(x)$在[0, 1]上的最大值为$\sqrt{2}$.

均恒等于零，则函数 $f(x, y)$ 在该区域内为一常数。

在泰勒公式(1)中，如果取 $x_0=0,\ y_0=0$，则(1)式成为 n 阶麦克劳林公式

$$f(x, y)=f(0, 0)+\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(0, 0)$$

$$+\frac{1}{2!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)}f(0, 0)+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n)}f(0, 0)$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n+1)}f(\theta x, \theta y),$$

$$(0<\theta<1). \quad (5)$$

例 1 求函数 $f(x, y)=\ln(1+x+y)$ 的三阶麦克劳林公式。

解 因为

$$f_x(x, y)=f_y(x, y)=\frac{1}{1+x+y},$$

$$f_{xx}(x, y)=f_{xy}(x, y)=f_{yy}(x, y)=-\frac{1}{(1+x+y)^2},$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^p\partial y^{3-p}}=\frac{2!}{(1+x+y)^3},\ (p=0, 1, 2, 3),$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^p\partial y^{4-p}}=-\frac{3!}{(1+x+y)^4},\ (p=0, 1, 2, 3, 4),$$

所以

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(0, 0)=xf_x(0, 0)+yf_y(0, 0)=x+y,$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)}f(0, 0)$$

$$=x^2f_{xx}(0, 0)+2xyf_{xy}(0, 0)+y^2f_{yy}(0, 0)$$

$$=-(x+y)^2,$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(3)}f(0, 0)$$

$$=x^3 f_{xxx}(0, 0)+3x^2y f_{xxy}(0, 0)$$

$$+3xy^2 f_{xyy}(0, 0)+y^3 f_{yyy}(0, 0)=2(x+y)^3.$$

又 $f(0, 0)=0$，故

$$\ln(1+x+y)=x+y-\frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{3}(x+y)^3+R_3,$$

其中

$$R_3=\frac{1}{4!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(4)} f(\theta x, \theta y)$$

$$=-\frac{1}{4}\cdot\frac{(x+y)^4}{(1+\theta x+\theta y)^4}, \quad (0<\theta<1).$$

*二、极值充分条件的证明

设函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内连续且有一阶及二阶连续偏导数，又 $f_x(x_0, y_0)=0$，$f_y(x_0, y_0)=0$. 我们利用二元函数的泰勒公式来讨论 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 是否取得极值.

依二元函数的泰勒公式，若 (x_0+h, y_0+k) 为上述邻域内任一点，则有

$$\begin{aligned}\Delta f&=f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)\\&=f_x(x_0, y_0)h+f_y(x_0, y_0)k\\&\quad+\frac{1}{2}[f_{xx}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)h^2+2f_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)hk\\&\quad+f_{yy}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)k^2].\end{aligned} \tag{6}$$

因为 $f_{xx}(x, y)$，$f_{xy}(x, y)$，$f_{yy}(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 均连续，若记

$$f_{xx}(x_0, y_0)=A,\ f_{xy}(x_0, y_0)=B,\ f_{yy}(x_0, y_0)=C,$$

则有

$$f_{xx}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)=A+\alpha_1,\ f_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)=B+\alpha_2,$$

$$f_{yy}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)=C+\alpha_3,$$

其中 α_1，α_2，α_3 当 $\rho=\sqrt{h^2+k^2}\to 0$ 时都趋于零.

又 $$f_x(x_0, y_0)=0,\ f_y(x_0, y_0)=0.$$
故(6)式可改写成

$$\begin{aligned}\Delta f&=f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)\\&=\frac{1}{2}(Ah^2+2Bhk+Ck^2)\\&\quad+\frac{1}{2}(\alpha_1 h^2+2\alpha_2 hk+\alpha_3 k^2).\end{aligned}$$

当 $P=Ah^2+2Bhk+Ck^2\neq 0$ 时，因为 P 是 ρ^2 的同阶无穷小，而 $\alpha_1 h^2+2\alpha_2 hk+\alpha_3 k^2$ 是比 ρ^2 高阶的无穷小，故当 ρ 很小时，Δf 的符号与 P 的符号相同；当 $P=0$ 时，Δf 的符号便取决于 $\alpha_1 h^2+2\alpha_2 hk+\alpha_3 k^2$ 的符号了。

现在讨论当 $|h|$, $|k|$ 都很小且不同时为零，即 $\rho\neq 0$ 时 Δf 的符号如下。

(1) 当 $B^2-AC<0$ 时，则 $AC>0$，即 A 与 C 同号．又因为 $\rho\neq 0$，所以

$$P=Ah^2+2Bhk+Ck^2=\frac{1}{A}[(Ah+Bk)^2-(B^2-AC)k^2],$$

方括号内恒大于零，这说明 P 与 A 同号，因此得

当 $A<0$ 时，$\Delta f<0$，即 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 取得极大值；

当 $A>0$ 时，$\Delta f>0$，即 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 取得极小值。

(2) 当 $B^2-AC>0$ 时，分下列三种情形讨论：

1° 若 $A\neq 0$，则有

$$P=\frac{1}{A}[(Ah+Bk)^2-(B^2-AC)k^2].$$

于是，当 $h\neq 0$, $k=0$ 时，P 与 A 同号；当 $Ah+Bk=0$, $k\neq 0$ 时，P 与 A 异号．这说明此时 Δf 可正可负。

2° 若 $C\neq 0$，则由

$$P=Ah^2+2Bhk+Ck^2=\frac{1}{C}[(Ck+Bh)^2-(B^2-AC)h^2],$$

与1° 同理可得 Δf 可正可负.

3° 若 $A=C=0$, $B\neq0$, 于是 $P=2Bhk$, 则当 $hk>0$ 时, P 与 B 同号; 当 $hk<0$ 时, P 与 B 异号. 这说明此时 Δf 可正可负.

以上三种情形都说明当 $B^2-AC>0$ 时, Δf 的符号不能恒为正或恒为负,因此 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 不取得极值.

(3) 当 $B^2-AC=0$ 时,若 $A\neq0$, 则

$$P=\frac{1}{A}(Ah+Bk)^2.$$

当 $Ah+Bk=0$ 时, $P=0$, 此时 Δf 的符号不能由 P 的符号决定.

若 $C\neq0$, 同理可得相同的结论. 因此当 $B^2-AC=0$ 时, 不能判定 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 是否取得极值. 这时需要用 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的高于二阶的泰勒公式才能判定.

综合上述讨论结果,便得第八节定理2.

习 题 8-9

1. 求函数 $f(x, y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5$ 在点 $(1, -2)$ 的泰勒公式.

2. 求函数 $f(x, y)=e^x\ln(1+y)$ 的三阶麦克劳林公式.

3. 求函数 $f(x, y)=\sin x\sin y$ 在点 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ 的二阶泰勒公式, 并写出余项 R_2.

4. 利用函数 $f(x, y)=x^y$ 的三阶泰勒公式,计算 $1.1^{1.02}$ 的近似值.

5. 求函数 $f(x, y)=e^{x+y}$ 的 n 阶麦克劳林公式,并写出余项.

*第十节 最小二乘法

许多工程问题, 常常需要根据两个变量的几组实验数值——实验数据, 来找出这两个变量的函数关系的近似表达式. 通常把这样得到的函数的近似表达式叫做<u>经验公式</u>. 经验公式建立以后,就可把生产或实验中所积累的某些经验,提高到理论上加以分

析. 下面我们通过举例介绍常用的一种建立经验公式的方法.

例1 为了测定刀具的磨损速度,我们做这样的实验:经过一定时间(如每隔一小时),测量一次刀具的厚度,得到一组实验数据如下:

顺序编号 i	0	1	2	3	4	5	6	7
时间 t_i (小时)	0	1	2	3	4	5	6	7
刀具厚度 y_i(毫米)	27.0	26.8	26.5	26.3	26.1	25.7	25.3	24.8

试根据上面的实验数据建立 y 和 t 之间的经验公式 $y=f(t)$. 也就是,要找出一个能使上述数据大体适合的函数关系 $y=f(t)$.

解 首先,要确定 $f(t)$ 的类型. 为此,我们可按下法处理. 在直角坐标纸上取 t 为横坐标,y 为纵坐标,描出上述各对数据的对应点,如图 8-12 所示. 从图上可以看出,这些点的连线大致接近于一条直线. 于是,我们就可以认为 $y=f(t)$ 是线性函数,并设

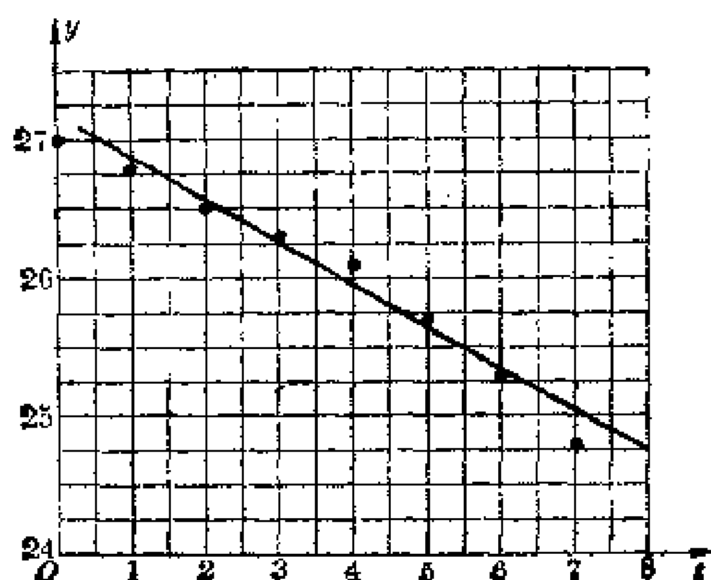


图 8-12

$$f(t)=at+b,$$

其中 a 和 b 是待定常数.

常数 a 和 b 如何确定呢? 最理想的情形是选取这样的 a 和 b, 能使直线 $y=at+b$ 经过图 8-12 中所标出的各点. 但在实际上这是不可能的, 因为这些点本来就不在同一直线上. 因此,我们只能要求选取这样的 a、b, 使得 $f(t)=at+b$ 在 t_0, t_1, t_2, $\cdots$, t_7 处的函数值与实验数据 y_0, y_1, y_2, $\cdots$, y_7 相差都很小,就是要使偏差

$$y_i - f(t_i) \quad (i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 7)$$

都很小．那末如何达到这一要求呢？能否设法使偏差的和

$$\sum_{i=0}^{7} [y_i - f(t_i)]$$

很小来保证每个偏差都很小呢？不能，因为偏差有正有负，在求和时，可能互相抵消．为了避免这种情形，可对偏差取绝对值再求和，只要

$$\sum_{i=0}^{7} |y_i - f(t_i)| = \sum_{i=0}^{7} |y_i - (at_i + b)|$$

很小，就可以保证每个偏差的绝对值都很小．但是这个式子中有绝对值记号，不便于进一步分析讨论．由于任何实数的平方都是正数或零，因此我们可以考虑选取常数 a、b，使

$$M = \sum_{i=0}^{7} [y_i - (at_i + b)]^2$$

最小来保证每个偏差的绝对值都很小．这种根据偏差的平方和为最小的条件来选择常数 a、b 的方法叫做最小二乘法．这种确定常数 a、b 的方法是通常所采用的．

现在我们来研究，经验公式 $y = at + b$ 中，a 和 b 符合什么条件时，可以使上述的 M 为最小．如果我们把 M 看成自变量 a 和 b 的一个二元函数，那末问题就可归结为求函数 $M = M(a,\ b)$ 在哪些点处取得最小值．由第八节中的讨论可知，上述问题可以通过求方程组

$$\begin{cases} M_a(a,\ b) = 0, \\ M_b(a,\ b) = 0 \end{cases}$$

的解来解决．即令

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial a} = -2\displaystyle\sum_{i=0}^{7} [y_i - (at_i + b)]t_i = 0, \\ \dfrac{\partial M}{\partial b} = -2\displaystyle\sum_{i=0}^{7} [y_i - (at_i + b)] = 0; \end{cases}$$

也即
$$\begin{cases}\sum_{i=0}^{7} t_i[y_i-(at_i+b)]=0,\\ \sum_{i=0}^{7}[y_i-(at_i+b)]=0.\end{cases}$$

将括号内各项进行整理合并，并把未知数 a 和 b 分离出来，便得

$$\begin{cases}a\sum_{i=0}^{7} t_i^2+b\sum_{i=0}^{7} t_i=\sum_{i=0}^{7} y_it_i,\\ a\sum_{i=0}^{7} t_i+8b=\sum_{i=0}^{7} y_i.\end{cases}\tag{1}$$

下面我们通过列表来计算 $\sum_{i=0}^{7} t_i$, $\sum_{i=0}^{7} t_i^2$, $\sum_{i=0}^{7} y_i$ 及 $\sum_{i=0}^{7} y_it_i$.

	t_i	t_i^2	y_i	y_it_i
	0	0	27.0	0
	1	1	26.8	26.8
	2	4	26.5	53.0
	3	9	26.3	78.9
	4	16	26.1	104.4
	5	25	25.7	128.5
	6	36	25.3	151.8
	7	49	24.8	173.6
Σ	28	140	208.5	717.0

代入方程组(1)，得到

$$\begin{cases}140a+28b=717,\\ 28a+8b=208.5.\end{cases}$$

解此方程组，得到 $a=-0.3036$, $b=27.125$. 这样便得到所求经验公式为

$$y=f(t)=-0.3036t+27.125.\tag{2}$$

由(2)式算出的函数值 $f(t_i)$ 与实测的 y_i 有一定的偏差．现列表比较如下：

t_i	0	1	2	3	4	5	6	7
实测的 y_i	27.0	26.8	26.5	26.3	26.1	25.7	25.3	24.8
算得的 $f(t_i)$	27.125	26.821	26.518	26.214	25.911	25.607	25.303	25.000
偏　差	−0.125	−0.021	−0.018	−0.086	0.189	0.093	−0.003	−0.200

偏差的平方和 $M=0.108165$，它的平方根 $\sqrt{M}=0.329$．我们把 $\sqrt{M}$ 称为均方误差，它的大小在一定程度上反映了用经验公式来近似表达原来函数关系的近似程度的好坏．

在例1中，按实验数据描出的图形接近于一条直线．在这种情形下，就可认为函数关系是线性函数类型的，从而问题可化为求解一个二元一次方程组，计算比较方便．还有一些实际问题，经验公式的类型不是线性函数，但我们可以设法把它化成线性函数的类型来讨论．举例说明于下：

例2　在研究单分子化学反应速度时，得到下列数据：

i	1	2	3	4	5	6	7	8
τ_i	3	6	9	12	15	18	21	24
y_i	57.6	41.9	31.0	22.7	16.6	12.2	8.9	6.5

其中 τ 表示从实验开始算起的时间，y 表示这时在反应混合物中物质的量．试根据上述数据定出经验公式 $y=f(\tau)$．

解　由化学反应速度的理论知道，$y=f(\tau)$ 应是指数函数：$y=ke^{m\tau}$，其中 k 和 m 是待定常数．对这批数据，我们先来验证这

个结论．为此，在 $y=ke^{m\tau}$ 的两边取常用对数，得

$$\lg y=(m\cdot\lg e)\tau+\lg k.$$

记 $m\cdot\lg e$ 即 $0.4343m=a$, $\lg k=b$, 则上式可写为

$$\lg y=a\tau+b,$$

于是 $\lg y$ 就是 τ 的线性函数了．所以，我们把表中各对数据 (τ_i, y_i) $(i=1, 2, \cdots, 8)$ 所对应的点描在半对数坐标纸上（半对数坐标纸的横轴上各点处所标明的数字与普遍的直角坐标纸相同，而纵轴上各点处所标明的数字是这样的，它的常用对数就是该点到原点的距离），如图 8-13 所示．从图上看出，这些点的连线非常接近于一条直线，这说明 $y=f(\tau)$ 确实可以认为是指数函数．

下面来具体定出 k 与 m 的值．

由于
$$\lg y=a\tau+b,$$

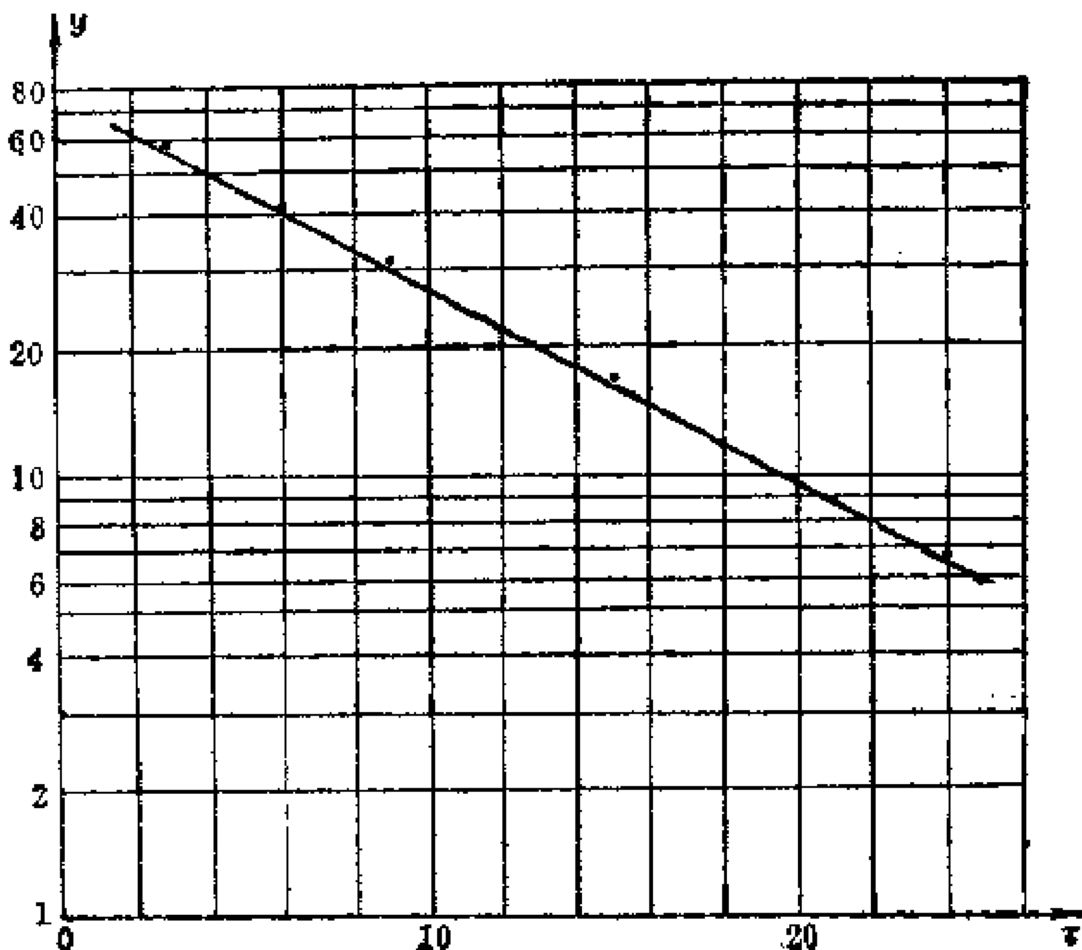


图 8-13

所以可仿照例1中的讨论，通过求方程组

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{8}\tau_i^2+b\sum_{i=1}^{8}\tau_i=\sum_{i=1}^{8}\tau_i\lg y_i, \\ a\sum_{i=1}^{8}\tau_i+8b=\sum_{i=1}^{8}\lg y_i \end{cases} \tag{3}$$

的解，把 a, b 确定出来.

下面通过列表来计算 $\sum_{i=1}^{8}\tau_i$, $\sum_{i=1}^{8}\tau_i^2$, $\sum_{i=1}^{8}\lg y_i$ 及 $\sum_{i=1}^{8}\tau_i\lg y_i$.

	τ_i	τ_i^2	y_i	$\lg y_i$	$\tau_i\lg y_i$
	3	9	57.6	1.7604	5.2812
	6	36	41.9	1.6222	9.7332
	9	81	31.0	1.4914	13.4226
	12	144	22.7	1.3560	16.2720
	15	225	16.6	1.2201	18.3015
	18	324	12.2	1.0864	19.5552
	21	441	8.9	0.9494	19.9374
	24	576	6.5	0.8129	19.5096
Σ	108	1836		10.2988	122.0127

将它们代入方程组(3)$\left(\text{其中取}\sum_{i=1}^{8}\lg y_i=10.3,\ \sum_{i=1}^{8}\tau_i\lg y_i=122\right)$，得

$$\begin{cases} 1836a+108b=122, \\ 108a+8b=10.3, \end{cases}$$

解这方程组，得

$$\begin{cases} a=0.4343m=-0.045, \\ b=\lg k=1.8964, \end{cases}$$

所以 $$m=-0.1036,\ k=78.78.$$

因此所求的经验公式为

$$y=78.78e^{-0.1036\tau}.$$

*习　题　8-10

1. 某种合金的含铅量为 $p\%$，其熔解温度为 θ°C，由实验测得 p 与 θ 的数据如下表：

$p\%$	36.9	46.7	63.7	77.8	84.0	87.5
θ°C	181	197	235	270	283	292

试用最小二乘法建立 θ 与 p 之间的经验公式 $\theta=ap+b$.

2. 已知一组实验数据为 (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\cdots$, (x_n, y_n). 现若假定经验公式是

$$y=ax^2+bx+c,$$

试按最小二乘法建立 a, b, c 应满足的三元一次方程组.

第九章 重 积 分

本章和下一章是多元函数积分学的内容．在一元函数积分学中我们知道，定积分是某种确定形式的和的极限．这种和的极限的概念推广到定义在区域、曲线及曲面上多元函数的情形，便得到重积分、曲线积分及曲面积分的概念．本章将介绍重积分（包括二重积分和三重积分）的概念、计算法以及它们的一些应用．

第一节 二重积分的概念与性质

一、二重积分的概念

1．曲顶柱体的体积

设有一立体，它的底是 xOy 面上的区域 D①，它的侧面是以 D 的边界曲线为准线而母线平行于 z 轴的柱面，它的顶是曲面 $z=f(x, y)$，这里 $f(x, y)\geqslant 0$ 且在 D 上连续（图 9-1）．这种立体叫做曲顶柱体．现在要计算上述曲顶柱体的体积 V．

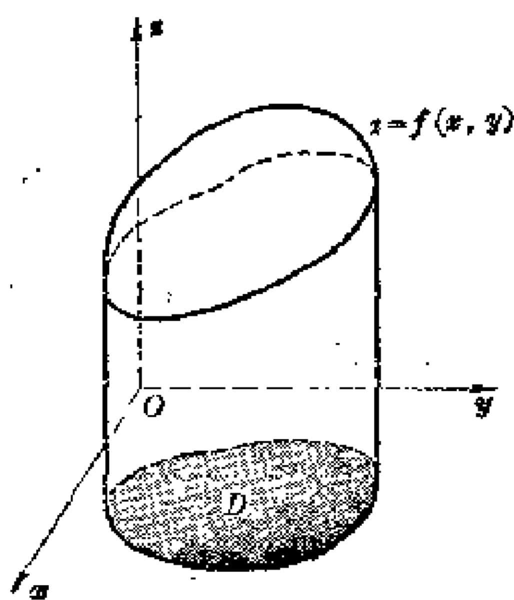


图 9-1

我们知道，平顶柱体的高是不变的，它的体积可以用公式

体积＝高×底面积

来计算．关于曲顶柱体，当点 (x, y) 在区域 D 上变动时，高度 $f(x, y)$ 是

① 为简便起见，本章以后除特别说明者外，都假定平面区域和空间区域是有界闭区域，且平面区域有有限面积，空间区域有有限体积．

个变量，因此它的体积不能直接用上式来计算．但如果回忆起第五章中求曲边梯形面积的问题，就不难想到，那里所采用的解决办法，原则上可以用来解决目前的问题。

首先，用一组曲线网把区域 D 分成 n 个小区域

$$\Delta\sigma_1,\ \Delta\sigma_2,\ \cdots,\ \Delta\sigma_n.$$

分别以这些小区域的边界曲线为准线，作母线平行于 z 轴的柱面，这些柱面把原来的曲顶柱体分为 n 个窄曲顶柱体．当这些小区域的直径①很小时，由于 $f(x, y)$ 连续，对于同一个小区域来说，$f(x, y)$ 变化很小，这时窄曲顶柱体可近似看作平顶柱体．我们在小区域 $\Delta\sigma_i$（这小区域的面积也记作 $\Delta\sigma_i$）中任取一点 (ξ_i, η_i)，以 $f(\xi_i, \eta_i)$ 为高而底为 $\Delta\sigma_i$ 的平顶柱体（图 9-2）的体积为

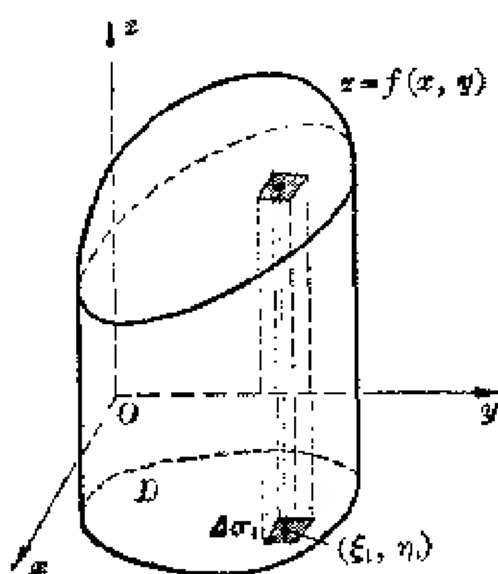


图 9-2

$$f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i \quad (i=1, 2, \cdots, n).$$

这 n 个平顶柱体体积之和是整个曲顶柱体体积 V 的近似值：

$$V\approx\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

为了得出 V 的精确值，令 n 个小区域的直径中的最大值（记作 λ）趋于零．通过这个极限过程便得

$$V=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

2．平面薄片的质量

设有一平面薄片占有 xOy 面上的区域 D，它在点 (x, y) 处的面密度为 $\rho(x, y)$，这里 $\rho(x, y)>0$ 且在 D 上连续．现在要计算

① 一个闭区域的直径是指区域上任意两点间距离的最大者．

该薄片的质量 M.

我们知道，如果薄片是均匀的，即面密度是常数，那末薄片的质量可以用公式

$$质量=面密度\times面积$$

来计算．现在面密度 $\rho(x, y)$ 是变量，薄片的质量就不能直接用上式来计算．但是上面用来处理曲顶柱体体积问题的方法完全适用于本问题．

由于 $\rho(x, y)$ 连续，把薄片分成许多小块后，只要小块所占的小区域 $\Delta\sigma_i$ 的直径很小，这些小块就可以近似地看作均匀薄片．在 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i, η_i)，则

$$\rho(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

可看作第 i 小块的质量的近似值(图 9-3)．通过求和、取极限，便得出

$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

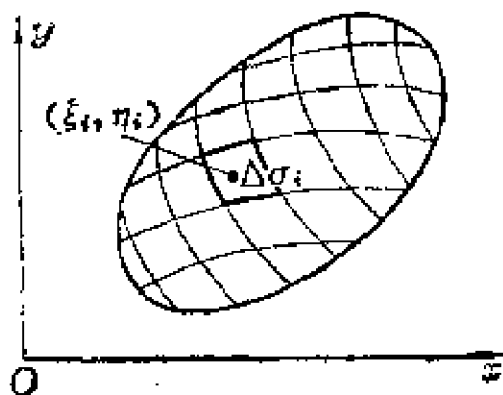


图 9-3

上面两个问题的实际意义虽然不同，但所求量都归结为同一形式的和的极限．在物理、力学、几何和工程技术中，有许多物理量或几何量都归结为这一形式的和的极限．因此我们要一般地研究这种和的极限，并把它叫做二重积分．

定义 设 $f(x, y)$ 是闭区域 D 上的有界函数．将区域 D 任意分成 n 个小区域

$$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n.$$

其中 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小区域，也表示它的面积．在每个小区域 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i, η_i)，作乘积 $f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，并作和 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$. 如果当各小区域的直径中的最大值 λ 趋于零时，这

和的极限存在，则称此极限值为函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上的二重积分，记作 $\iint\limits_D f(x, y)d\sigma$，即

$$\iint\limits_D f(x, y)d\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i. \tag{1}$$

其中 $f(x, y)$ 叫做被积函数，$f(x, y)d\sigma$ 叫做被积表达式，$d\sigma$ 叫做面积元素，x 与 y 叫做积分变量，D 叫做积分区域，$\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$ 叫做积分和.

在二重积分记号 $\iint\limits_D f(x, y)d\sigma$ 中的面积元素 $d\sigma$ 象征着积分和中的 $\Delta\sigma_i$. 因为二重积分的定义中区域 D 的划分是任意的，如果在直角坐标系中用平行于坐标轴的直线段来划分区域 D，那末除了靠边界曲线的一些小区域外，绝大部分的小区域都是矩形的. 设矩形小区域 $\Delta\sigma_i$ 的边长为 Δx_j 和 Δy_k，则 $\Delta\sigma_i=\Delta x_j\cdot\Delta y_k$. 因此在直角坐标系中，有时也把面积元素 $d\sigma$ 记作 $dx\,dy$，而把二重积分记作

$$\iint\limits_D f(x, y)dx\,dy,$$

其中 $dx\,dy$ 叫做直角坐标系中的面积元素.

这里我们要指出，当 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上连续时，(1)式右端的和的极限必定存在，也就是说，函数 $f(x, y)$ 在 D 上的二重积分必定存在. 我们总假定函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上连续，所以 $f(x, y)$ 在 D 上的二重积分都是存在的，以后就不需要每次加以说明了.

由二重积分的定义，可见曲顶柱体的体积是曲顶上点的竖坐标 $f(x, y)$ 在底 D 上的二重积分

$$V=\iint\limits_D f(x, y)d\sigma,$$

平面薄片的质量是它的面密度 $\rho(x, y)$ 在薄片所占区域 D 上的二重积分

$$M=\iint_D \rho(x, y)d\sigma.$$

如果 $f(x, y)\geqslant 0$, 被积函数 $f(x, y)$ 可解释为曲顶柱体的顶在点 (x, y) 处的竖坐标，所以二重积分的几何意义就是柱体的体积．如果 $f(x, y)$ 是负的，柱体就在 xOy 面的下方，二重积分的绝对值仍等于柱体的体积，但二重积分的值是负的．如果 $f(x, y)$ 在 D 的若干部分区域上是正的，而在其它的部分区域上是负的，我们可以把 xOy 面上方的柱体体积取成正，xOy 面下方的柱体体积取成负，那末，$f(x, y)$ 在 D 上的二重积分就等于这些部分区域上的柱体体积的代数和．

二、二重积分的性质

比较定积分与二重积分的定义可以想到，二重积分与定积分有类似的性质，现叙述于下．

性质 1　被积函数的常数因子可以提到二重积分号的外面，即

$$\iint_D kf(x, y)d\sigma=k\iint_D f(x, y)d\sigma \quad (k \text{ 为常数}).$$

性质 2　函数的和（或差）的二重积分等于各个函数的二重积分的和（或差）． 例如

$$\iint_D \{f(x, y)\pm g(x, y)\}d\sigma=\iint_D f(x, y)d\sigma\pm\iint_D g(x, y)d\sigma.$$

性质 3　如果闭区域 D 由有限条曲线分为有限个部分区域，则在 D 上的二重积分等于在各部分区域上的二重积分的和． 例如 D 分为两个区域 D_1 与 D_2，则

$$\iint_D f(x, y)d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y)d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y)d\sigma.$$

这个性质表示二重积分对于积分区域具有可加性.

性质 4 如果在 D 上, $f(x, y)=1$, σ 为 D 的面积, 则

$$\sigma = \iint_D 1\cdot d\sigma = \iint_D d\sigma.$$

这性质的几何意义是很明显的, 因为高为 1 的平顶柱体的体积在数值上就等于柱体的底面积.

性质 5 如果在 D 上, $f(x, y)\leqslant\varphi(x, y)$, 则有不等式

$$\iint_D f(x, y)d\sigma \leqslant \iint_D \varphi(x, y)d\sigma.$$

特殊地, 由于

$$-|f(x, y)| \leqslant f(x, y) \leqslant |f(x, y)|,$$

又有不等式

$$\left|\iint_D f(x, y)d\sigma\right| \leqslant \iint_D |f(x, y)|d\sigma.$$

性质 6 设 M、m 分别是 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上的最大值和最小值, σ 是 D 的面积, 则有对于二重积分估值的不等式

$$m\sigma \leqslant \iint_D f(x, y)d\sigma \leqslant M\sigma.$$

事实上, 因为 $m\leqslant f(x, y)\leqslant M$, 所以由性质 5 有

$$\iint_D m d\sigma \leqslant \iint_D f(x, y)d\sigma \leqslant \iint_D M d\sigma,$$

再应用性质 1 和性质 4, 便得所要证明的不等式.

性质 7(二重积分的中值定理) 设函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上连续, σ 是 D 的面积, 则在 D 上至少存在一点 (ξ, η) 使得下式成立:

$$\iint_D f(x, y)d\sigma = f(\xi, \eta)\cdot\sigma.$$

证 把性质6中不等式各除以 σ，有

$$m\leqslant\frac{1}{\sigma}\iint_D f(x, y)d\sigma\leqslant M.$$

这就是说，确定的数值 $\frac{1}{\sigma}\iint_D f(x, y)d\sigma$ 是介于函数 $f(x, y)$ 的最大值 M 与最小值 m 之间的．根据在闭区域上连续函数的介值定理，在 D 上至少存在一点 (ξ, η) 使得函数在该点的值与这个确定的数值相等，即

$$\frac{1}{\sigma}\iint_D f(x, y)d\sigma = f(\xi, \eta).$$

上式两端各乘以 σ，就得所需要证明的公式．

习 题 9-1

1．设有一平面薄板(不计其厚度)，占有 xOy 面上的区域 D，薄板上分布有面密度为 $\mu=\mu(x, y)$ 的电荷，且 $\mu(x, y)$ 在 D 上连续，试用二重积分表达该板上的全部电荷 Q．

2．设 $I_1=\iint_{D_1}(x^2+y^2)^3d\sigma$，其中 D_1 是矩形区域：$-1\leqslant x\leqslant1$，$-2\leqslant y\leqslant2$；又 $I_2=\iint_{D_2}(x^2+y^2)^3d\sigma$，其中 D_2 是矩形区域：$0\leqslant x\leqslant1$，$0\leqslant y\leqslant2$．试利用二重积分的几何意义说明 I_1 与 I_2 之间的关系．

3．利用二重积分定义证明：

(1) $\iint_D d\sigma=\sigma$（其中 σ 为 D 的面积）；

(2) $\iint_D kf(x, y)d\sigma=k\iint_D f(x, y)d\sigma$（其中 k 为常数）．

4．根据二重积分的性质，比较下列积分的大小：

(1) $\iint_D (x+y)^2d\sigma$ 与 $\iint_D(x+y)^3d\sigma$，其中积分区域 D 是由 x 轴、y 轴与

直线 $x+y=1$ 所围成；

(2) $\iint\limits_D (x+y)^2 d\sigma$ 与 $\iint\limits_D (x+y)^3 d\sigma$，其中 D 是由圆周 $(x-2)^2+(y-1)^2=2$ 所围成；

(3) $\iint\limits_D \ln(x+y) d\sigma$ 与 $\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$，其中 D 是三角形区域，三顶点分别为(1, 0)，(1, 1)，(2, 0)；

(4) $\iint\limits_D \ln(x+y) d\sigma$ 与 $\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$，其中 D 是矩形区域：$3\leqslant x\leqslant 5$, $0\leqslant y\leqslant 1$.

5．利用二重积分的性质估计下列积分的值.

(1) $I=\iint\limits_D xy(x+y) d\sigma$，其中 D 是矩形区域：$0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$；

(2) $I=\iint\limits_D \sin^2 x \sin^2 y d\sigma$，其中 D 是矩形区域：$0\leqslant x\leqslant \pi$, $0\leqslant y\leqslant \pi$；

(3) $I=\iint\limits_D (x+y+1) d\sigma$，其中 D 是矩形区域：$0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 2$；

(4) $I=\iint\limits_D (x^2+4y^2+9) d\sigma$，其中 D 是圆形区域：$x^2+y^2\leqslant 4$.

6．利用二重积分定义证明：如果区域 D 分为两个区域 D_1 与 D_2，则

$$\iint\limits_D f(x, y) d\sigma=\iint\limits_{D_1} f(x, y) d\sigma+\iint\limits_{D_2} f(x, y) d\sigma.$$

第二节　二重积分的计算法

相对于重积分来说，定积分也可叫做单积分．下面介绍二重积分的计算方法，这种方法是把二重积分化为两次单积分(二次积分)来计算．

一、利用直角坐标计算二重积分

下面从几何观点来讨论二重积分 $\iint\limits_D f(x, y) d\sigma$ 的计算问题．在讨论中我们假定 $f(x, y)\geqslant 0$.

设积分区域 D 可以用不等式

$$\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x),\ a \leqslant x \leqslant b$$

来表示(图 9-4)，其中函数 $\varphi_1(x)$、$\varphi_2(x)$ 在区间$[a, b]$上连续.

按照二重积分的几何意义，$\iint\limits_D f(x, y)d\sigma$ 的值等于以 D 为底，以曲面 $z=f(x, y)$ 为顶的曲顶柱体(图 9-5)的体积. 下面我们应用第六章中计算"平行截面面积为已知的立体的体积"的方法，来计算这个曲顶柱体的体积.

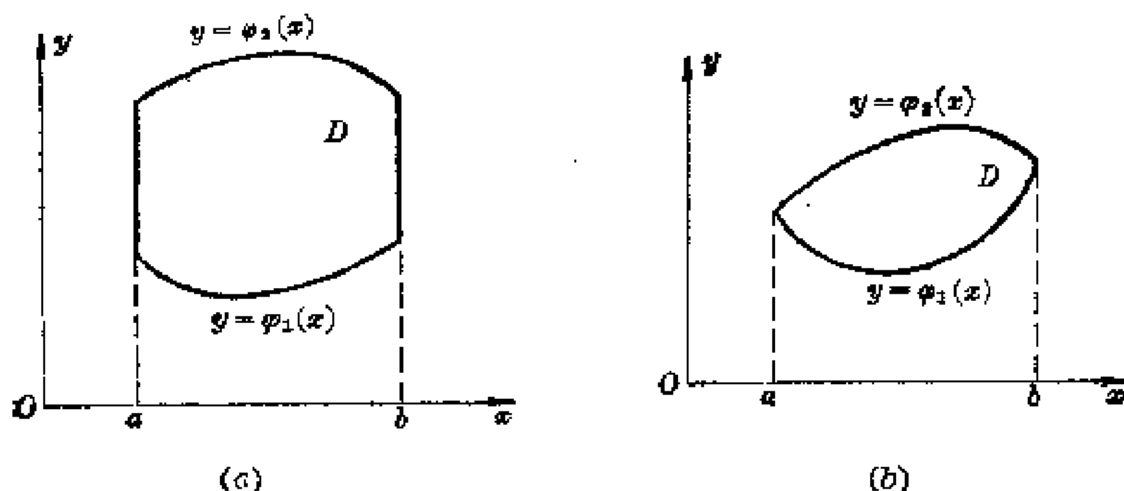


图 9-4

先计算截面面积. 为此，在区间$[a, b]$上任意取定一点 x_0，作平行于 yOz 面的平面 $x=x_0$. 这平面截曲顶柱体所得截面是一个以区间 $[\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0)]$ 为底、曲线 $z=f(x_0, y)$ 为曲边的曲边梯形(图 9-5 中阴影部分)，所以这截面的面积为

$$A(x_0)=\int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0, y)dy.$$

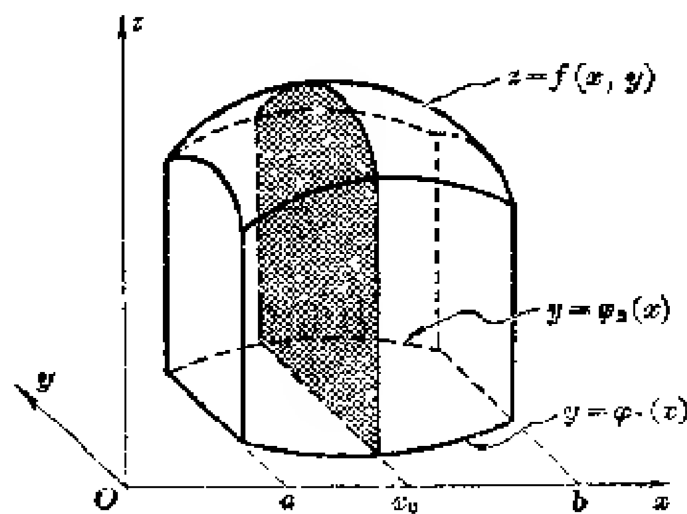


图 9-5

一般地，过区间 $[a, b]$ 上任一点 x 且平行于 yOz 面的平面截曲顶柱体所得截面的面

积为

$$A(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy,$$

于是，应用计算平行截面面积为已知的立体体积的方法，得曲顶柱体体积为

$$V=\int_a^b A(x)dx=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy\right]dx.$$

这个体积也就是所求二重积分的值，从而有等式

$$\iint_D f(x, y)d\sigma=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy\right]dx. \qquad (1)$$

上式右端是一个先对 y、后对 x 的二次积分．就是说，先把 x 看作常数，把 $f(x, y)$ 只看作 y 的函数，并对 y 计算从 $\varphi_1(x)$ 到 $\varphi_2(x)$ 的定积分；然后把算得的结果（是 x 的函数）再对 x 计算在区间 $[a, b]$ 上的定积分．这个先对 y、后对 x 的二次积分也常记作

$$\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy.$$

因此，等式(1)也可写成

$$\iint_D f(x, y)d\sigma=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy, \qquad (1')$$

这就是把二重积分化为先对 y、后对 x 的二次积分的公式．

在上述讨论中，我们假定 $f(x, y)\geqslant 0$，但实际上公式(1)及公式(1')的成立并不受此条件限制．

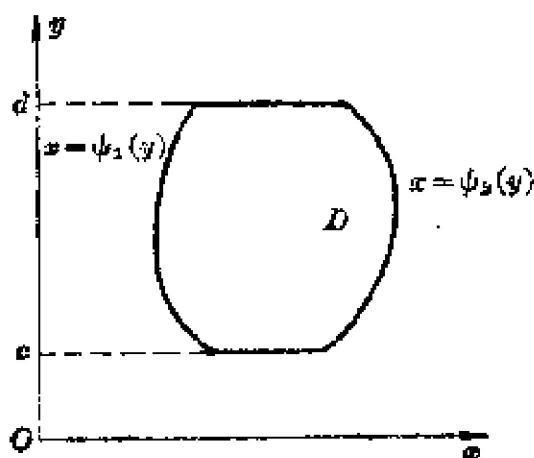
类似地，如果积分区域 D 可以用不等式

$$\psi_1(y)\leqslant x\leqslant\psi_2(y),\quad c\leqslant y\leqslant d$$

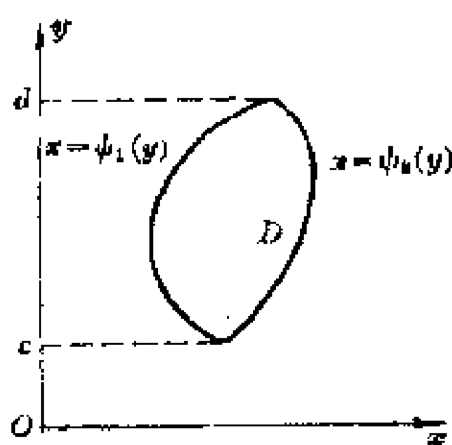
来表示（图 9-6），其中函数 $\psi_1(y)$、$\psi_2(y)$ 在区间 $[c, d]$ 上连续，那末就有

$$\iint_D f(x, y)d\sigma=\int_c^d\left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)dx\right]dy. \qquad (2)$$

上式右端是一个先对 x、后对 y 的二次积分，这个积分也常记作



(a)



(b)

图 9-6

$$\int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx.$$

因此，等式(2)也可写成

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx, \tag{2'}$$

这就是把二重积分化为先对 x、后对 y 的二次积分的公式.

如果积分区域 D 既可用不等式 $\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ 表示，也可用不等式 $\psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)$, $c \leqslant y \leqslant d$ 表示，则由公式(1')及(2')就得

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx, \tag{3}$$

上式表明，这两个不同次序的二次积分相等，因为它们都等于同一个二重积分

$$\iint_D f(x, y) d\sigma.$$

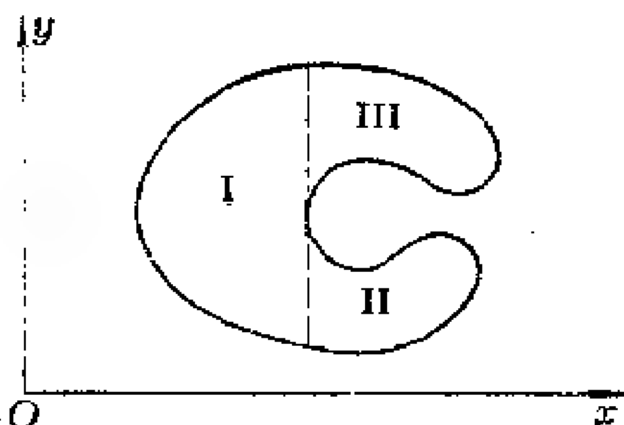


图 9-7

应用公式(1)（公式(2)）时，积分区域 D 必须满足这样的条件：穿过区域 D 内部且平行于

y 轴（x 轴）的直线与 D 的边界相交不多于两点. 如果区域 D 如图 9-7 那样，既有穿过 D 内部且平行于 y 轴的直线与 D 的边界相交多于两点，也有穿过 D 内部且平行于 x 轴的直线与 D 的边界相交多于两点. 对于这种情形，我们可以把 D 分成几部分，使每个部分区域上的二重积分都可应用公式(1)或(2). 例如，在图 9-7 中，把 D 分成三个部分区域. 对各个部分区域上的二重积分，都可应用公式(1). 各部分区域上的二重积分求得后，根据二重积分性质 3，它们的和就是区域 D 上的二重积分.

二重积分化为二次积分时，确定积分限是一个关键. 积分限是根据积分区域 D 来确定的，先画出积分区域 D 的图形. 假如积分区域 D 的图形如图 9-8 所示，在区间$[a, b]$上任意取定一个 x 值，积分区域上以这个 x 值为横坐标的点在一段直线上，这段直线平行于 y 轴，该线段上点的纵坐标从 $\varphi_1(x)$ 变到 $\varphi_2(x)$，这就是公式(1)中先把 x 看作常量而对 y 积分时的下限和上限. 因为上面的 x 值是在 $[a, b]$ 上任意取定的，所以再把 x 看作变量而对 x 积分时，积分区间就是$[a, b]$.

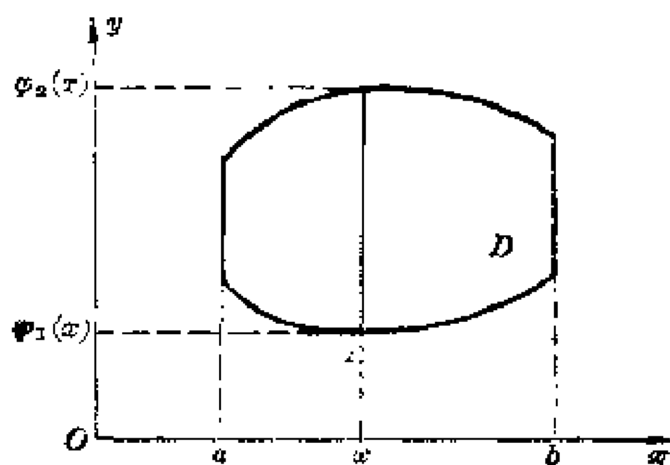


图 9-8

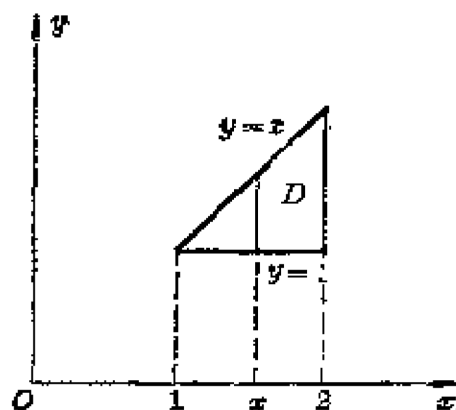


图 9-9

例 1 计算 $\iint\limits_D xy\,d\sigma$，其中 D 是由直线 $y=1$、$x=2$ 及 $y=x$ 所围成的区域.

解法1 首先画出区域 D(图 9-9). 区域 D 上的点的横坐标的变动范围是区间[1, 2]. 在区间[1, 2]上任意取定一个 x 值,则区域 D 上以这个 x 值为横坐标的点在一段直线上, 这段直线平行于 y 轴, 该线段上点的纵坐标从 $y=1$ 变到 $y=x$. 利用公式(1)得

$$\iint_D xy\,d\sigma=\int_1^2\left[\int_1^x xy\,dy\right]dx$$

$$=\int_1^2\left[x\cdot\frac{y^2}{2}\right]_1^x dx$$

$$=\int_1^2\left(\frac{x^3}{2}-\frac{x}{2}\right)dx=\left[\frac{x^4}{8}-\frac{x^2}{4}\right]_1^2=1\frac{1}{8}.$$

解法2 如图 9-10, 区域 D 上的点的纵坐标的变动范围是区间[1, 2]. 在区间[1, 2]上任意取定一个 y 值, 则区域 D 上以这个 y 值为纵坐标的点在一段直线上,这段直线平行于 x 轴,该线段上点的横坐标从 $x=y$ 变到 $x=2$. 于是,利用公式(2)得

$$\iint_D xy\,d\sigma=\int_1^2\left[\int_y^2 xy\,dx\right]dy$$

$$=\int_1^2\left[y\cdot\frac{x^2}{2}\right]_y^2 dy$$

$$=\int_1^2\left(2y-\frac{y^3}{2}\right)dy=\left[y^2-\frac{y^4}{8}\right]_1^2=1\frac{1}{8}.$$

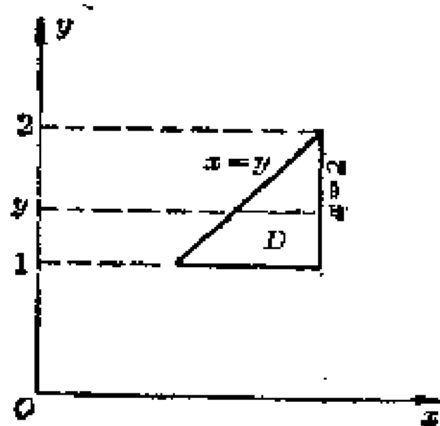


图 9-10

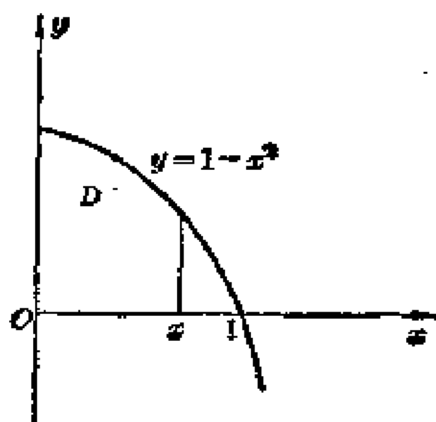


图 9-11

例 2 计算 $\iint\limits_D 3x^2y^2d\sigma$，其中 D 是由 x 轴、y 轴和抛物线 $y=1-x^2$ 所围成的在第一象限内的区域.

解 画出积分区域 D 如图 9-11 所示。

利用公式(1)，得

$$\iint\limits_D 3x^2y^2d\sigma=\int_0^1\left[\int_0^{1-x^2}3x^2y^2dy\right]dx$$

$$=\int_0^1\left[x^2y^3\right]_0^{1-x^2}dx$$

$$=\int_0^1 x^2(1-x^2)^3dx=\frac{16}{315}.$$

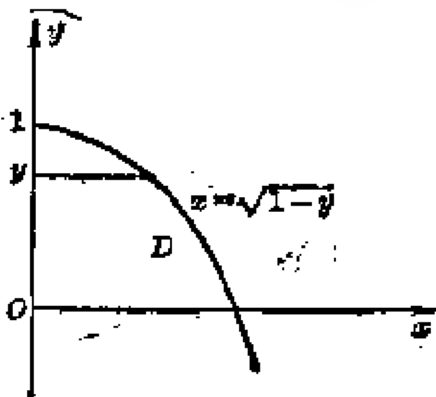


图 9-12

若用公式(2)(图 9-12)，就有

$$\iint\limits_D 3x^2y^2d\sigma=\int_0^1\left[\int_0^{\sqrt{1-y}}3x^2y^2dx\right]dy$$

$$=\int_0^1\left[x^3y^2\right]_0^{\sqrt{1-y}}dy.$$

将上、下限代入后，计算积分比较麻烦．所以这里用公式 (1) 计算较为便利.

例 3 计算 $\iint\limits_D xy\,d\sigma$，其中 D 是由抛物线 $y^2=x$ 及直线 $y=x-2$ 所围成的区域.

解 画出区域 D 如图 9-13 所示。

利用公式(2)，有

$$\iint\limits_D xy\,d\sigma=\int_{-1}^2\left[\int_{y^2}^{y+2}xy\,dx\right]dy$$

$$=\int_{-1}^2\left[\frac{x^2}{2}y\right]_{y^2}^{y+2}dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^2\left[y(y+2)^2-y^5\right]dy$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{y^4}{4}+\frac{4}{3}y^3+2y^2-\frac{y^6}{6}\right]_{-1}^2=5\frac{5}{8}.$$

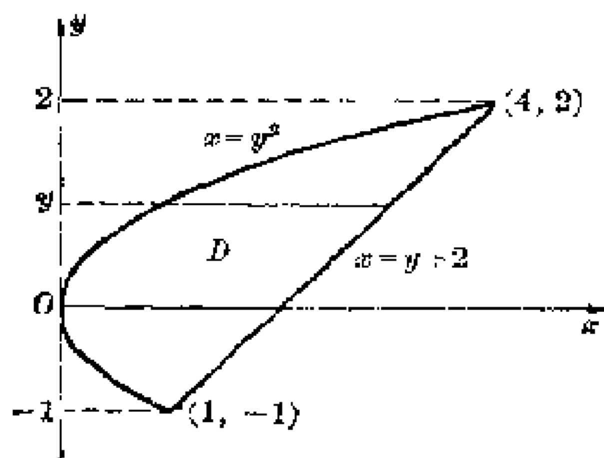


图 9-13

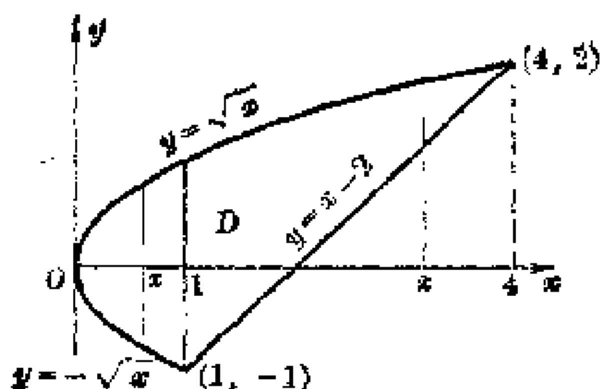


图 9-14

若用公式(1)来计算，则由于在区间 $[0, 1]$ 及 $[1, 4]$ 上表示 $\varphi_1(x)$ 的式子不同，所以要用经过交点 $(1, -1)$ 且平行于 y 轴的直线 $x=1$ 把区域 D 分成 D_1 和 D_2 两部分(图 9-14)，其中

$$D_1:\quad -\sqrt{x}\leqslant y\leqslant\sqrt{x},\ 0\leqslant x\leqslant 1;$$

$$D_2:\quad x-2\leqslant y\leqslant\sqrt{x},\ 1\leqslant x\leqslant 4.$$

因此，根据二重积分的性质 3，就有

$$\iint\limits_D xy\,d\sigma=\iint\limits_{D_1} xy\,d\sigma+\iint\limits_{D_2} xy\,d\sigma$$

$$=\int_0^1\left[\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} xy\,dy\right]dx+\int_1^4\left[\int_{x-2}^{\sqrt{x}} xy\,dy\right]dx.$$

由此可见，这里用公式(1)来计算比较麻烦。

例 4 求两个半径相等的直交圆柱面所围成的立体的体积。

解 设圆柱面的半径为 R，且这两个圆柱面的方程分别为

$$x^2+y^2=R^2\quad 及\quad x^2+z^2=R^2.$$

利用立体对坐标平面的对称性，只要算出它在第一卦限部分(图 9-15(a))的体积 V_1，然后再乘以 8 就行了。

所求立体在第一卦限部分可以看成是一个曲顶柱体，它的底为 xOy 面上四分之一的圆 D (图 9-15(b))：

$$0\leqslant y\leqslant\sqrt{R^2-x^2},\ 0\leqslant x\leqslant R;$$

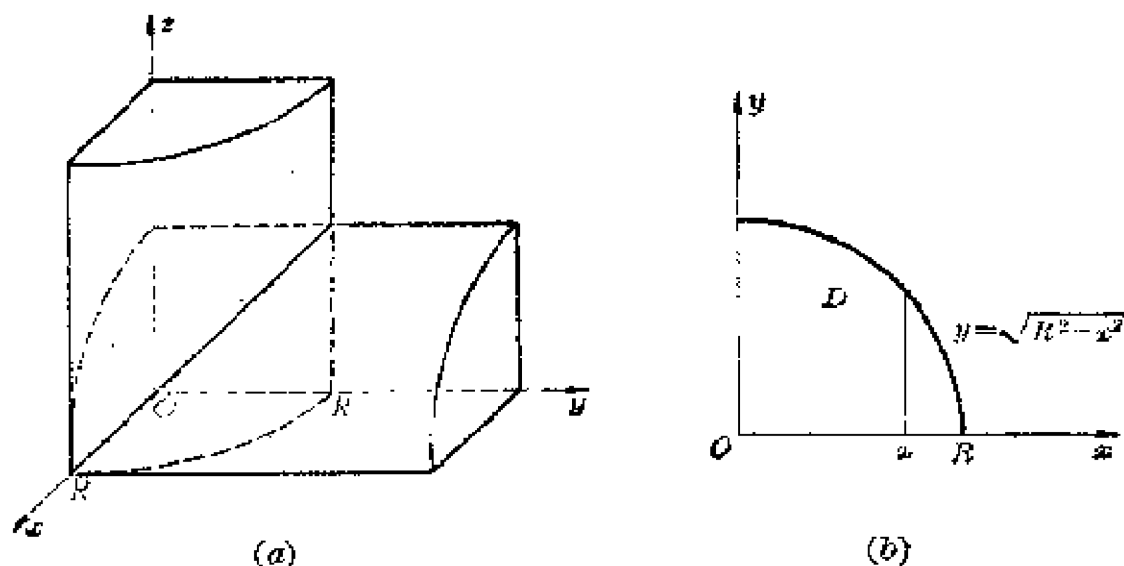


图 9-15

它的顶是柱面 $z=\sqrt{R^2-x^2}$. 于是,

$$V_1=\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2}\,d\sigma.$$

利用公式(1),得

$$V_1=\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2}\,d\sigma=\int_0^R\left[\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{R^2-x^2}\,dy\right]dx$$

$$=\int_0^R\left[\sqrt{R^2-x^2}\,y\right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}}dx=\int_0^R(R^2-x^2)\,dx=\frac{2}{3}R^3.$$

从而所求立体体积为

$$V=8V_1=\frac{16}{3}R^3.$$

习 题 9-2(1)

1. 计算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_D (x^2+y^2)d\sigma$, 其中 D 是矩形区域: $|x|\leqslant 1$, $|y|\leqslant 1$;

(2) $\iint\limits_D (3x+2y)d\sigma$,其中 D 是由两坐标轴及直线 $x+y=2$ 所围成的区域;

(3) $\iint\limits_D (x^3+3x^2y+y^3)d\sigma$, 其中 D 是矩形区域: $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$;

(4) $\iint\limits_D x\cos(x+y)d\sigma$, 其中 D 是三顶点分别为 $(0,0)$, $(\pi,0)$ 和 (π,π) 的

三角形区域；

(5) $\iint\limits_D (1+x)\sin y\, d\sigma$，其中 D 是顶点分别为 (0, 0)，(1, 0)，(1, 2) 和 (0, 1) 的梯形区域.

2．画出积分区域，并计算下列二重积分：

(1) $\iint\limits_D x\sqrt{y}\, d\sigma$，其中 D 是由两条抛物线 $y=\sqrt{x}$，$y=x^2$ 所围成的区域；

(2) $\iint\limits_D xy^2\, d\sigma$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 及 y 轴所围成的右半区域；

(3) $\iint\limits_D e^{x+y}\, d\sigma$，其中 D 是由 $|x|+|y|\leqslant 1$ 所确定的区域；

(4) $\iint\limits_D (x^2+y^2-x)\, d\sigma$，其中 D 是由直线 $y=2$，$y=x$ 及 $y=2x$ 所围成的区域；

(5) $\iint\limits_D (x^2-y^2)\, d\sigma$，其中 D 是区域：$0\leqslant y\leqslant \sin x$，$0\leqslant x\leqslant \pi$.

3．如果二重积分 $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$ 的被积函数 $f(x, y)$ 是两个函数 $f_1(x)$ 及 $f_2(y)$ 的乘积，即 $f(x, y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$，积分区域 D 为 $a\leqslant x\leqslant b$，$c\leqslant y\leqslant d$；证明这个二重积分等于两个单积分的乘积，即

$$\iint\limits_D f_1(x)\cdot f_2(y)\,dx\,dy=\int_a^b f_1(x)\,dx\int_c^d f_2(y)\,dy.$$

4．化二重积分

$$I=\iint\limits_D f(x, y)\,d\sigma$$

为二次积分(分别列出对两个变量先后次序不同的两个二次积分)，其中积分区域 D 是：

(1) 由直线 $y=x$ 及抛物线 $y^2=4x$ 所围成的区域；

(2) 由 x 轴及半圆周 $x^2+y^2=r^2$ $(y\geqslant 0)$ 所围成的区域；

(3) 由直线 $y=x$，$x=2$ 及双曲线 $y=\dfrac{1}{x}\,(x>0)$ 所围成的区域；

(4) 环形区域 $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$.

5．设 $f(x, y)$ 在 D 上连续，其中 D 是由直线 $y=x$，$y=a$ 及 $x=b\,(b>a)$ 所围成的区域，证明

$$\int_a^b dx\int_a^x f(x, y)\,dy=\int_a^b dy\int_y^b f(x, y)\,dx.$$

6. 改换下列二次积分的积分次序：

(1) $\int_0^1 dy\int_0^y f(x, y)dx$；　　(2) $\int_0^2 dy\int_{y^2}^{2y} f(x, y)dx$；

(3) $\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)dx$；　　(4) $\int_1^2 dx\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y)dy$；

(5) $\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x, y)dy$；　　(6) $\int_0^{\pi} dx\int_{-\sin\frac{x}{2}}^{\sin x} f(x, y)dy$；

(7) $\int_0^4 dy\int_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{1}{2}(y-4)} f(x, y)dx$；

(8) $\int_0^1 dy\int_0^{2y} f(x, y)dx+\int_1^3 dy\int_0^{3-y} f(x, y)dx$.

7. 设平面薄片所占的区域 D 是由直线 $x+y=2$, $y=x$ 和 x 轴所围成，它的面密度 $\rho(x, y)=x^2+y^2$, 求该薄片的质量.

8. 计算由四个平面 $x=0$, $y=0$, $x=1$, $y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 及 $2x+3y+z=6$ 截得的立体的体积.

9. 求由平面 $x=0$, $y=0$, $x+y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 及抛物面 $x^2+y^2=6-z$ 截得的立体的体积.

10. 求由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=6-2x^2-y^2$ 所围成的立体的体积.

11. 交换积分次序，证明

$$\int_0^a dy\int_0^y e^{m(a-x)}f(x)dx=\int_0^a (a-x)e^{m(a-x)}f(x)dx.$$

二、利用极坐标计算二重积分

有些二重积分，积分区域 D 的边界曲线用极坐标方程来表示比较方便，且被积函数用极坐标变量 r、θ 表达比较简单. 这时，我们就可以考虑利用极坐标来计算二重积分 $\iint\limits_D f(x, y)d\sigma$.

按二重积分的定义

$$\iint\limits_D f(x, y)d\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

下面我们来研究这个和的极限在极坐标系中的形式.

假定从极点 O 出发且穿过区域 D 内部的射线与 D 的边界曲

线相交不多于两点．我们用以极点为中心的一族同心圆：$r=$常数，以及从极点出发的一族射线：$\theta=$常数，把区域 D 分成 n 个小区域(图 9-16)．除了靠边界曲线的一些小区域外①，小区域的面积 $\Delta\sigma_i$ 可计算如下：

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_i&=\frac{1}{2}(r_i+\Delta r_i)^2\cdot\Delta\theta_i-\frac{1}{2}r_i^2\cdot\Delta\theta_i\\&=\frac{1}{2}(2r_i+\Delta r_i)\Delta r_i\cdot\Delta\theta_i\\&=\frac{r_i+(r_i+\Delta r_i)}{2}\cdot\Delta r_i\cdot\Delta\theta_i\\&=\bar{r}_i\cdot\Delta r_i\cdot\Delta\theta_i,\end{aligned}$$

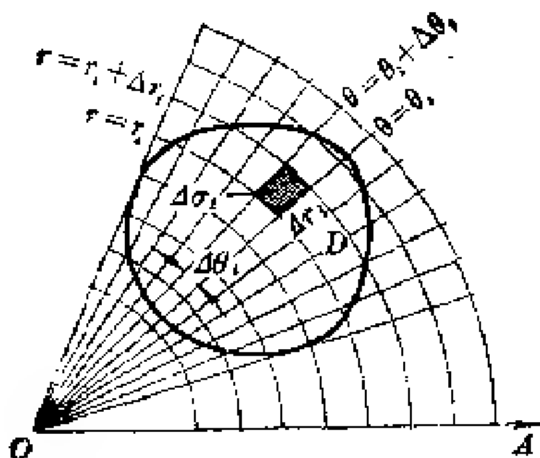


图 9-16

其中 $\bar{r}_i$ 表示相邻两圆弧的半径的平均值．在这小区域内取圆周 $r=\bar{r}_i$ 上的一点 $(\bar{r}_i,\ \bar{\theta}_i)$，该点的直角坐标设为 $\xi_i,\ \eta_i$，则由直角坐标与极坐标之间的关系有 $\xi_i=\bar{r}_i\cos\bar{\theta}_i$，$\eta_i=\bar{r}_i\sin\bar{\theta}_i$．于是

$$\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta\sigma_i=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\bar{r}_i\cos\bar{\theta}_i,\bar{r}_i\sin\bar{\theta}_i)\bar{r}_i\cdot\Delta r_i\cdot\Delta\theta_i,$$

即
$$\iint\limits_D f(x,\ y)d\sigma=\iint\limits_D f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)r\,dr\,d\theta.$$

由于在直角坐标系中 $\iint\limits_D f(x,\ y)d\sigma$ 也常记作 $\iint\limits_D f(x,\ y)dx\,dy$，所以上式又可写成

$$\iint\limits_D f(x,\ y)dx\,dy=\iint\limits_D f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)r\,dr\,d\theta.\tag{4}$$

这就是二重积分的变量从直角坐标变换为极坐标的变换公式，其中 $r\,dr\,d\theta$ 就是极坐标系中的面积元素．

公式(4)表明，要把二重积分中的变量从直角坐标变换为极坐

① 求和的极限时，这些小区域所对应的项的和的极限为零．因此这些小区域可以略去不计．

标，只要把被积函数中的 x、y 分别换成 $r\cos\theta$、$r\sin\theta$，并把直角坐标系中的面积元素 $dx\,dy$ 换成极坐标系中的面积元素 $r\,dr\,d\theta$.

极坐标系中的二重积分，同样可以化为二次积分来计算.

设积分区域 D 可以用不等式

$$\varphi_1(\theta)\leqslant r\leqslant\varphi_2(\theta),\ \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$$

来表示(图 9-17)，其中函数 $\varphi_1(\theta)$、$\varphi_2(\theta)$ 在区间$[\alpha,\ \beta]$上连续.

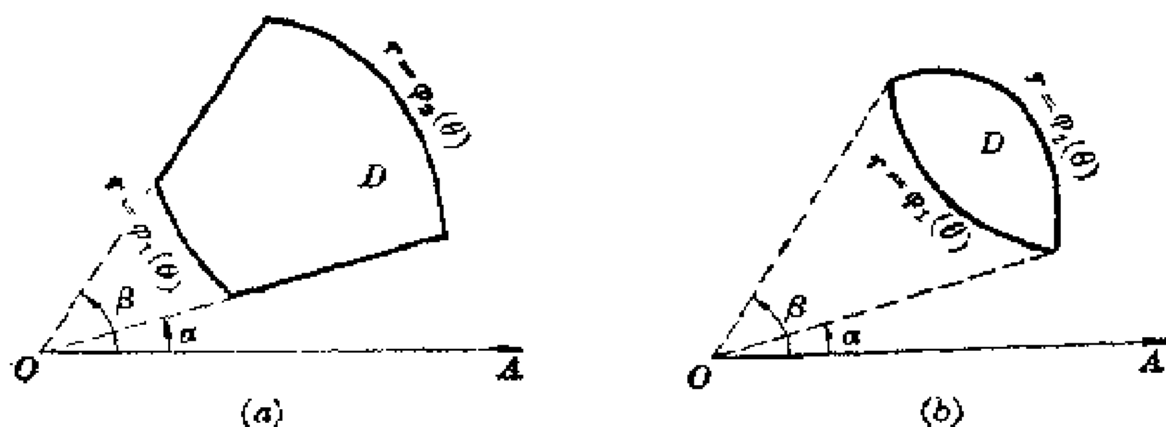


图 9-17

先在区间$[\alpha,\ \beta]$上任意取定一个 θ 值. 对应于这个 θ 值，区域 D 上的点（图 9-18 中这些点在线段 EF 上）的极径 r 从 $\varphi_1(\theta)$ 变到 $\varphi_2(\theta)$. 又 θ 是在$[\alpha,\ \beta]$上任意取定的，所以 θ 的变化范围是区间$[\alpha,\ \beta]$. 这样就可看出，极坐标系中的二重积分化为二次积分的公式为

$$\iint\limits_D f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)r\,dr\,d\theta$$
$$=\int_\alpha^\beta\left[\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)r\,dr\right]d\theta. \tag{5}$$

上式也可写成

$$\iint\limits_D f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)r\,dr\,d\theta$$
$$=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)r\,dr. \tag{5'}$$

如果积分区域 D 是图 9-19 所示的曲边扇形，那末可以把它

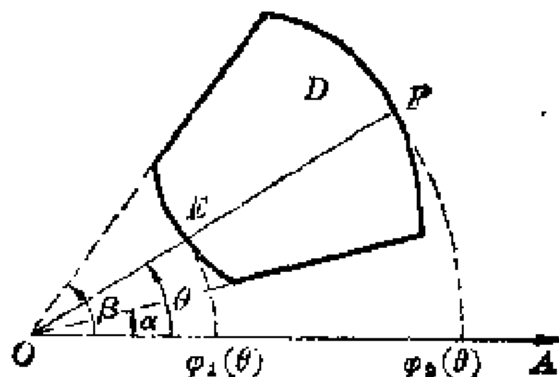


图 9-18

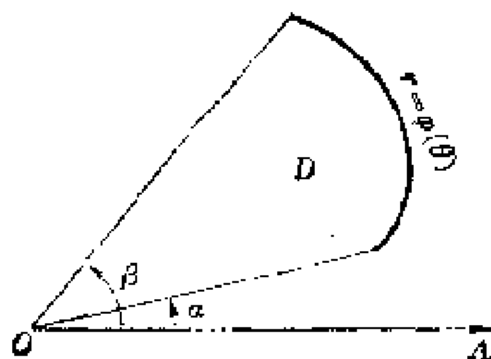


图 9-19

看作图 9-17(a) 中当 $\varphi_1(\theta)\equiv 0$, $\varphi_2(\theta)=\varphi(\theta)$ 时的特例. 这时区域 D 可以用不等式

$$0\leqslant r\leqslant\varphi(\theta),\quad \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$$

来表示，而公式(5′)成为

$$\iint_D f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_\alpha^\beta d\theta\int_0^{\varphi(\theta)}f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)r\,dr.$$

如果积分区域 D 如图 9-20 所示，极点在区域 D 的内部，那末可以把它看作图 9-19 中当 $\alpha=0$、$\beta=2\pi$ 时的特例. 这时区域 D 可以用不等式

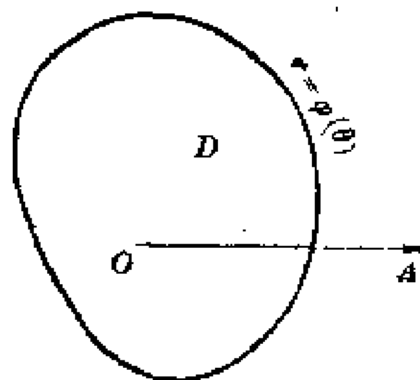


图 9-20

$$0\leqslant r\leqslant\varphi(\theta),\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$$

来表示，而公式(5′)成为

$$\iint_D f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\varphi(\theta)}f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)r\,dr.$$

由二重积分的性质 4，区域 D 的面积 σ 可以表示为

$$\sigma=\iint_D d\sigma.$$

在极坐标系中，面积元素 $d\sigma = r\,dr\,d\theta$，上式成为

$$\sigma = \iint_D r\,dr\,d\theta.$$

如果区域 D 如图 9-17(a) 所示，则由公式(5')有

$$\sigma = \iint_D r\,dr\,d\theta = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} r\,dr$$

$$= \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [\varphi_2^2(\theta) - \varphi_1^2(\theta)]d\theta.$$

特别地，如果区域 D 如图 9-19 所示，则 $\varphi_1(\theta) = 0$，$\varphi_2(\theta) = \varphi(\theta)$，于是

$$\sigma = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \varphi^2(\theta)d\theta.$$

例 5 计算 $\iint_D e^{-x^2-y^2}dx\,dy$，其中 D 是由中心在原点、半径为 a 的圆周所围成的区域。

解 在极坐标系中，区域 D 可表示为

$$0 \leqslant r \leqslant a,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

由公式(4)及(5)有

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}dx\,dy = \iint_D e^{-r^2}r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^a e^{-r^2}r\,dr\right]d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^a d\theta$$

$$= \frac{1}{2}(1 - e^{-a^2})\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \pi(1 - e^{-a^2}).$$

本题如果用直角坐标计算，由于积分 $\int e^{-x^2}dx$ 不能用初等函数表示，所以算不出来。现在我们利用上面的结果来计算广义积分 $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$。

在第一象限内，设 D_1 为圆心在原点 O 半径等于 R 的圆形区域的四分之一，D_2 为圆心在原点半径等于 $\sqrt{2}R$ 的圆形区域的四分之一，S 为两边在坐标轴上的边长等于 R 的正方形区域，显然 S 包含 D_1 而含在 D_2 之内(图 9-21)． 由于 $e^{-x^2-y^2}>0$，从而展布在这些区域上的二重积分之间有不等式

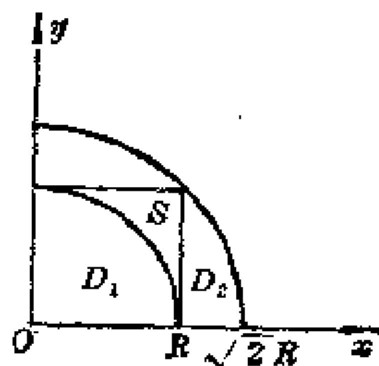


图 9-21

$$\iint\limits_{D_1} e^{-x^2-y^2}dx\,dy<\iint\limits_{S} e^{-x^2-y^2}dx\,dy<\iint\limits_{D_2} e^{-x^2-y^2}dx\,dy.$$

因为
$$\iint\limits_{S} e^{-x^2-y^2}dx\,dy$$
$$=\int_0^R e^{-x^2}dx\cdot\int_0^R e^{-y^2}dy=\left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2,$$

又应用上面已得的结果有

$$\iint\limits_{D_1} e^{-x^2-y^2}dx\,dy=\frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2}),$$

$$\iint\limits_{D_2} e^{-x^2-y^2}dx\,dy=\frac{\pi}{4}(1-e^{-2R^2}),$$

于是上面的不等式可写成

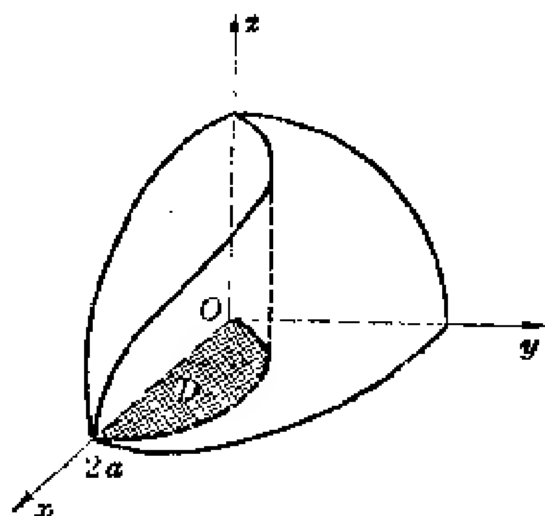
$$\frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2})<\left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2<\frac{\pi}{4}(1-e^{-2R^2}).$$

令 $R\to\infty$，上式两端趋于同一极限 $\frac{\pi}{4}$，从而

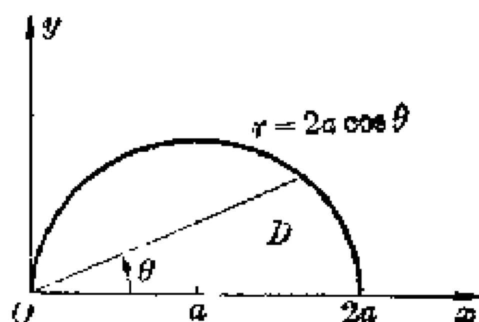
$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

例 6 求球面 $x^2+y^2+z^2=4a^2$ 与圆柱面 $x^2+y^2=2ax$ 所包围的立体的体积(指含在柱体内的部分，图 9-22)．

解 由对称性，



(a)



(b)

图 9-22

$$V=4\iint_{D}\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy,$$

其中 D 为半圆周 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 及 x 轴所围成的区域. 在极坐标系中，区域 D 可用不等式

$$0\leqslant r\leqslant 2a\cos\theta,\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$$

来表示. 于是

$$V=4\iint_{D}\sqrt{4a^2-r^2}\,r\,dr\,d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-r^2}\,r\,dr$$

$$=\frac{32}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)\,d\theta=\frac{32}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

习 题 9-2(2)

1. 画出积分区域，把积分 $\iint_{D}f(x,y)dx\,dy$ 表示为极坐标形式的二次积分，其中积分区域 D 是：

(1) $x^2+y^2\leqslant a^2$, $(a>0)$;

(2) $x^2+y^2\leqslant 2x$;

(3) $a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2$, 其中 $0<a<b$;

(4) $0\leqslant y\leqslant 1-x$, $0\leqslant x\leqslant 1$;

(5) $x^2 \leqslant y \leqslant 1,\ -1 \leqslant x \leqslant 1$.

2. 化下列二次积分为极坐标形式的二次积分：

(1) $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy$;　　(2) $\int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2+y^2}) dy$;

(3) $\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$;　　(4) $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy$.

3. 把下列积分化为极坐标形式，并计算积分值：

(1) $\int_0^{2a} dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} (x^2+y^2) dy$;　　(2) $\int_0^a dx \int_0^x \sqrt{x^2+y^2} dy$;

(3) $\int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} dy$;　　(4) $\int_0^a dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2+y^2) dx$.

4. 利用极坐标计算下列各题：

(1) $\iint\limits_D e^{x^2+y^2} d\sigma$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 所围成的区域；

(2) $\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2) d\sigma$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的在第一象限内的区域；

(3) $\iint\limits_D \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} d\sigma$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$，$x^2+y^2=1$ 及直线 $y=0$，$y=x$ 所围成的在第一象限内的区域.

5. 选用适当的坐标计算下列各题：

(1) $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2} d\sigma$，其中 D 是由直线 $x=2$，$y=x$ 及曲线 $xy=1$ 所围成的区域；

(2) $\iint\limits_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} d\sigma$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的在第一象限内的区域；

(3) $\iint\limits_D (x^2+y^2) d\sigma$，其中 D 是由直线 $y=x$，$y=x+a$，$y=a$，$y=3a\ (a>0)$ 所围成的区域；

(4) $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2} d\sigma$，其中 D 是圆环形区域：$a^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant b^2$；

(5) $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2} d\sigma$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=Rx$ 所围成的区域.

6. 设平面薄片所占的区域 D 是由螺线 $r=2\theta$ 上一段弧 $\left(0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ 与

直线 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 所围成，它的面密度为 $\rho(x, y)=x^2+y^2$。求这薄片的质量(图 9-23)。

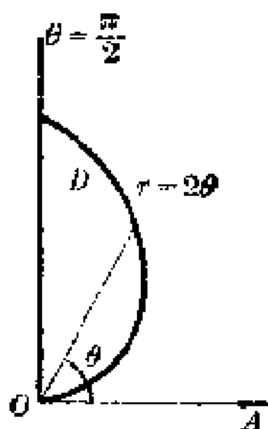


图 9-23

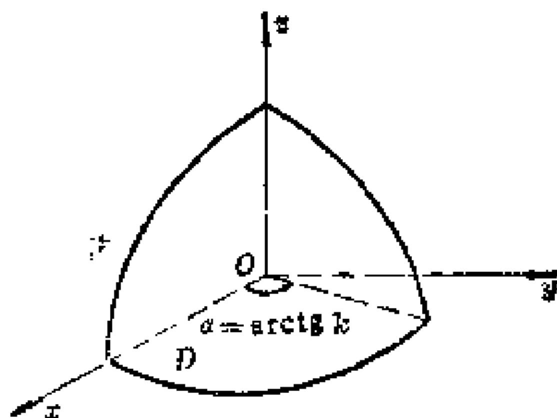


图 9-24

7. 求由平面 $y=0$, $y=kx(k>0)$, $z=0$ 以及球心在原点、半径为 R 的上半球面所围成的在第一卦限内的立体的体积(图 9-24)。

8. 计算以 xOy 面上的圆周 $x^2+y^2=ax$ 围成的区域为底，而以曲面 $z=x^2+y^2$ 为顶的曲顶柱体的体积。

*三、二重积分的换元法

上面利用直角坐标与极坐标的关系

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$$

引进新的变量 r、θ，来代替原来的变量 x、y，并得出二重积分的变量从直角坐标变换为极坐标的变换公式。这是二重积分换元法的一种特殊情形，现在要考虑二重积分换元法的一般情形。

设变量 x、y 与变量 u、v 之间的关系由下式确定：

$$x=x(u, v),\qquad y=y(u, v). \tag{6}$$

假定在 u、v 的某一变化范围内，任一有序数组 (u, v) 可由(6)式唯一地确定有序数组 (x, y)，且反过来 (x, y) 也可唯一地确定 (u, v)，这就是说，假定(6)式使 (x, y) 与 (u, v) 之间有一一对应的关系。如果我们把 x、y 看作平面上点 M 的直角坐标，则与 x、y 对应的 u、v 就称为点 M 的曲线坐标。如此平面上的点 M 就可用不同的坐

标来表示．当$u=r$, $v=\theta$, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$时，曲线坐标就是极坐标．

上面把同一平面上的点用不同的坐标来表示，属于同一点的坐标x、y和u、v是相互对应的，它们的对应关系由(6)式确定．但是也可以从另一观点来解释由(6)式所确定的x、y与u、v间的对应关系：除了直角坐标平面xOy外，另取一张直角坐标平面uOv．相互对应的u、v与x、y分别看作uOv平面上的点$M'(u, v)$的坐标与xOy平面上的点$M(x, y)$的坐标．如此(6)式就给出两张直角坐标平面上点与点之间的某种对应关系，或者说点与点之间的某种变换关系．下面就采用这种观点来讨论二重积分的换元法．

设两个函数

$$x=x(u, v), \qquad y=y(u, v) \tag{6}$$

都在直角坐标平面uOv上的闭区域D'上连续、具有一阶连续偏导数，且雅可比式

$$J(u, v)=\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}\neq 0 \quad ((u, v)\text{在} D' \text{上}).$$

在上述条件下，变换(6)即函数组(6)把直角坐标平面uOv上的D'变换成直角坐标平面xOy上的闭区域D．这种变换是一一对应的，就是说，D'的任意一点$M'(u, v)$可由变换(6)唯一地确定D的一点$M(x, y)$；反之，D的任意一点$M(x, y)$也可由(6)的逆变换(即反函数组)

$$u=u(x, y), \qquad v=v(x, y)$$

唯一地确定D'的一点$M'(u, v)$．其中D'的边界曲线与D的边界曲线对应．

在上述假定下，如果函数$f(x, y)$在D上连续，则有二重积分的换元公式

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy$$
$$=\iint_{D'} f[x(u, v), y(u, v)]\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv. \tag{7}$$

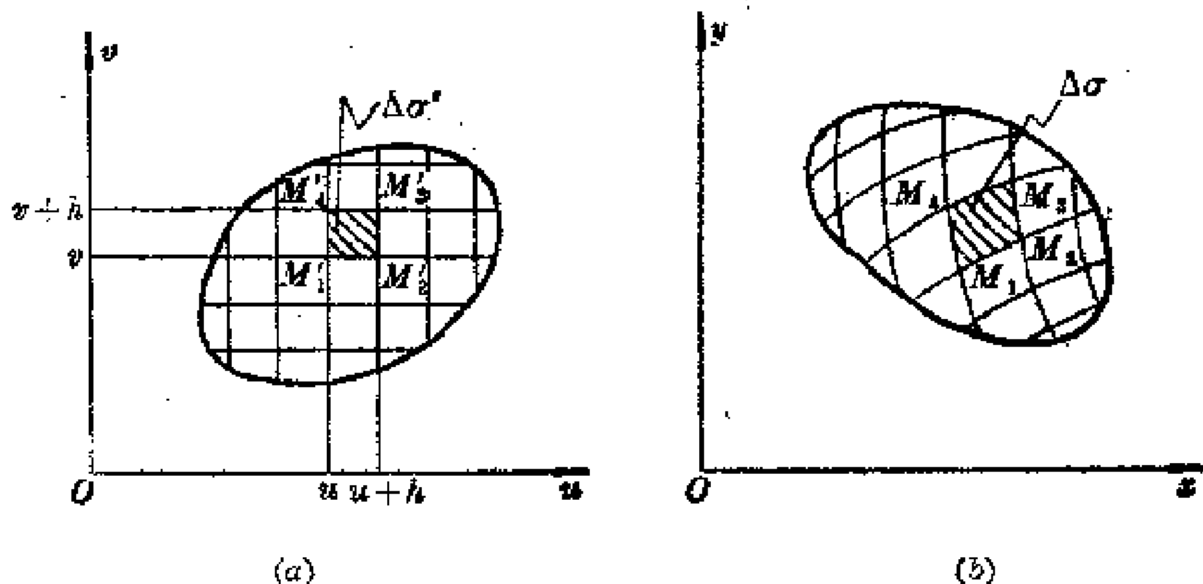


图 9-25

首先注意到，(7)式两端的二重积分都存在，因为它们的被积函数都是连续的。由于二重积分与区域的分法无关，我们不妨用平行于坐标轴的直线把区域 D' 分割成边长为 h 的正方形小区域（靠边界曲线的小区域可能不是正方形的），这种正方形小区域的面积为 $\Delta\sigma'=h^2$（图 9-25(a)），其中顶点为 $M_1'(u, v)$，$M_2'(u+h, v)$，$M_3'(u+h, v+h)$，$M_4'(u, v+h)$ 的正方形小区域 $M_1'M_2'M_3'M_4'$ 经变换(6)变成平面 xOy 上的一个曲边四边形 $M_1M_2M_3M_4$，它的面积记作 $\Delta\sigma$（图 9-25(b)），它的四个顶点的坐标是

M_1: $x_1=x(u, v)$, $\quad y_1=y(u, v)$;

M_2: $x_2=x(u+h, v)=x(u, v)+x_u(u, v)h+o(h)$,

$\qquad y_2=y(u+h, v)=y(u, v)+y_u(u, v)h+o(h)$;

M_3: $x_3=x(u+h, v+h)$

$\qquad\quad =x(u, v)+x_u(u, v)h+x_v(u, v)h+o(h)$,

$\qquad y_3=y(u+h, v+h)$

$\qquad\quad =y(u, v)+y_u(u, v)h+y_v(u, v)h+o(h)$;

$$M_4:\ x_4 = x(u,\ v+h) = x(u,\ v) + x_v(u,\ v)h + o(h),$$
$$y_4 = y(u,\ v+h) = y(u,\ v) + y_v(u,\ v)h + o(h).$$

可以证明，曲边四边形 $M_1M_2M_3M_4$ 的面积与直边四边形 $M_1M_2M_3M_4$ 的面积当 $h \to 0$ 时只差高阶无穷小，又由上面这些坐标表示式可知，若不计高阶无穷小，则有

$$x_2 - x_1 = x_3 - x_4, \quad y_2 - y_1 = y_3 - y_4,$$
$$x_4 - x_1 = x_3 - x_2, \quad y_4 - y_1 = y_3 - y_2,$$

这表示，直边四边形 $M_1M_2M_3M_4$ 的对边的长度两两相等．因此，若不计高阶无穷小，曲边四边形 $M_1M_2M_3M_4$ 可看作平行四边形，于是它的面积 $\Delta\sigma$ 等于 $\triangle M_1M_2M_3$ 的面积的两倍．根据解析几何，$\triangle M_1M_2M_3$ 的面积的两倍等于行列式

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_2 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_2 \end{vmatrix}$$

的绝对值．由于

$$x_2 - x_1 = x_u(u,\ v)h + o(h), \quad x_3 - x_2 = x_v(u,\ v)h + o(h),$$
$$y_2 - y_1 = y_u(u,\ v)h + o(h), \quad y_3 - y_2 = y_v(u,\ v)h + o(h),$$

因此上面的行列式与行列式

$$\begin{vmatrix} x_u(u,\ v)h & x_v(u,\ v)h \\ y_u(u,\ v)h & y_v(u,\ v)h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_u(u,\ v) & x_v(u,\ v) \\ y_u(u,\ v) & y_v(u,\ v) \end{vmatrix} h^2$$

只差一个比 h^2 高阶的无穷小．于是

$$\Delta\sigma = \left|\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}\right| \Delta\sigma' + o(\Delta\sigma') \quad (h \to 0).$$

把 $f(x,\ y) = f[x(u,\ v),\ y(u,\ v)]$ 的两端分别与上式两端相乘，得

$$f(x,\ y)\Delta\sigma = f[x(u,\ v),\ y(u,\ v)] \left|\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}\right| \Delta\sigma'$$
$$+ f[x(u,\ v),\ y(u,\ v)] \cdot o(\Delta\sigma').$$

上式对一切小区域取和并令 $h \to 0$ 求极限，由于上式右端第二项的

和的极限为零，于是得公式(7)。

在变换为极坐标 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ 的特殊情形下，雅可比式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r,$$

换元公式就是①

$$\iint\limits_{D} f(x,\ y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D'} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta, \tag{8}$$

这里 D' 是 D 在直角坐标平面 $rO\theta$ 上的对应区域。在上一目内所证得的相同的公式中用的是 D 而不是 D'，因为在那里我们把 $(r,\ \theta)$ 看作在同一平面上点 $(x,\ y)$ 的极坐标，所以积分区域仍然是 D。

例 7 计算 $\iint\limits_{D} e^{\frac{y-x}{y+x}}\,dx\,dy$，其中 D 是由 x 轴、y 轴和直线 $x+y=2$ 所围成的区域。

解 令 $u=y-x,\ v=y+x$，则 $x=\frac{v-u}{2},\ y=\frac{v+u}{2}$。

作变换 $x=\frac{v-u}{2},\ y=\frac{v+u}{2}$，则 xOy 平面上的区域 D 和它在 uOv 平面上的对应区域 D' 如图 9-26 所示。

雅可比式为

$$\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

利用公式(7)，得

---

① 在 $r=0$ 处，条件 $|J(u,\ v)|\neq 0$ 未能满足，但由于上一目用的方法证得的结果，我们知道换元公式(8)仍然是成立的。

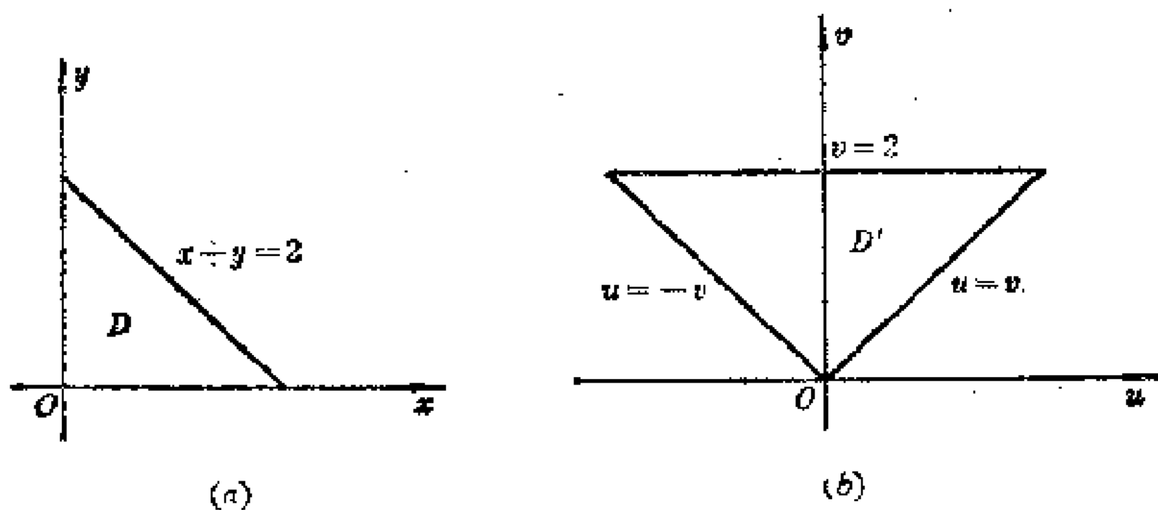


图 9-26

$$\iint_D e^{\frac{y+x}{y-x}}\,dx\,dy=\iint_{D'} e^{\frac{u}{v}}\left|-\frac{1}{2}\right|du\,dv$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2 dv\int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}\,du$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2 (e-e^{-1})v\,dv=e-e^{-1}.$$

例 8 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的面积.

解 应用变换 $x=au$, $y=bv$, 则对应于椭圆区域 D 的是半径为 1 的圆形区域 D': $u^2+v^2\leqslant 1$, 又雅可比式为

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}=ab.$$

从而, 所求面积

$$\iint_D dx\,dy=\iint_{D'} ab\,du\,dv=\pi ab.$$

*习 题 9-2(3)

1. 作适当的变换, 计算下列二重积分:

(1) $\iint_D (x-y)^2\sin^2(x+y)\,dx\,dy$, 其中 D 是平行四边形区域, 它的四个顶点是 $(\pi, 0)$, $(2\pi, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$ 和 $(0, \pi)$;

(2) $\iint\limits_D x^2y^2\,dx\,dy$，其中 D 是由两条双曲线 $xy=1$ 和 $xy=2$，直线 $y=x$ 和 $y=4x$ 所围成的在第Ⅰ象限内的区域；

(3) $\iint\limits_D e^{\frac{y}{x+y}}\,dx\,dy$，其中 D 是由 x 轴、y 轴和直线 $x+y=1$ 所围成的区域；

(4) $\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dx\,dy$，其中 D 为椭圆形区域 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$。

[提示：作变换 $x=ar\cos\theta$，$y=br\sin\theta$。]

2．求由下列曲线所围成的区域 D 的面积：

(1) D 是由曲线 $xy=4$，$xy=8$，$xy^3=5$，$xy^3=15$ 所围成的第Ⅰ象限部分的区域；

(2) D 是由曲线 $y=x^3$，$y=4x^3$，$x=y^3$，$x=4y^3$ 所围成的第Ⅰ象限部分的区域。

3．设区域 D 是由直线 $x+y=1$，$x=0$，$y=0$ 所围成，求证

$$\iint\limits_D\cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)dx\,dy=\frac{1}{2}\sin 1.$$

4．选取适当的变换，证明下列等式：

(1) $\iint\limits_D f(x+y)\,dx\,dy=\int_{-1}^{1}f(u)\,du$，其中区域 D 为 $|x|+|y|\leqslant 1$；

(2) $\iint\limits_D f(ax+by+c)\,dx\,dy=2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2}\,f(u\sqrt{a^2+b^2}+c)\,du$，其中 D 为 $x^2+y^2\leqslant 1$，且 $a^2+b^2\neq 0$。

[提示：作变换 $x=\frac{au-bv}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$y=\frac{bu+av}{\sqrt{a^2+b^2}}$。]

第三节　二重积分的应用

在第六章中我们看到，有许多求总量的问题可以用定积分的元素法来处理．这种元素法也可推广到二重积分的应用中．如果所要计算的某个量 U 对于区域 D 具有可加性(就是说，当区域 D 分成许多小区域时，所求量 U 相应地分成许多部分量，且 U 等于部分量之和)，并且在区域 D 内任取一个直径很小的区域 $d\sigma$ 时，

相应的部分量可近似地表示为$f(x, y)d\sigma$① 的形式，其中(x, y)在$d\sigma$内．这个$f(x, y)d\sigma$称为所求量U的元素而记作dU，以它为被积表达式，在区域D上积分：

$$U=\iint\limits_{D} f(x, y)d\sigma,$$

这就是所求量的积分表达式．

一、曲面的面积

设曲面S由方程

$$z=f(x, y)$$

给出，D为曲面S在xOy面上的投影区域，函数$f(x, y)$在D上具有连续偏导数$f_x(x, y)$和$f_y(x, y)$．我们要计算曲面S的面积A．

在区域D上任取一直径很小的区域$d\sigma$（这小区域的面积也记作$d\sigma$）．在小区域$d\sigma$内取一点$P(x, y)$，对应地曲面S上有一点$M(x, y, f(x, y))$，点M在xOy面上的投影即点P．点M处曲面S的切平面设为T（图 9-27）．以小区域$d\sigma$的边界为准线作

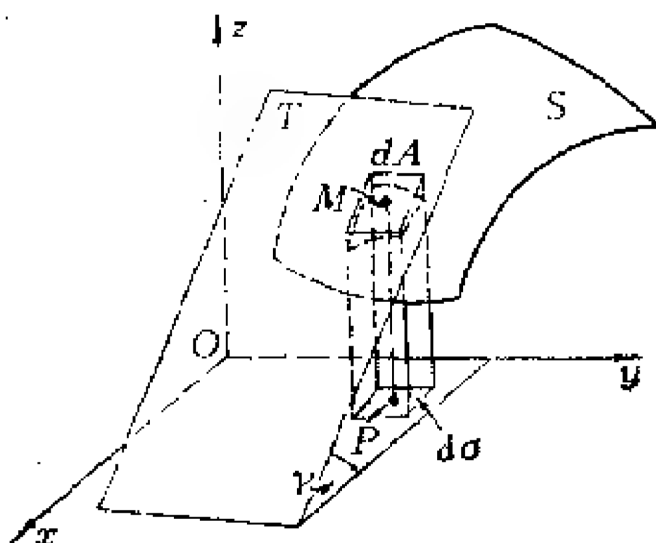


图 9-27

① 这个$f(x, y)d\sigma$与部分量之差当$d\sigma$的直径趋于零时是比$d\sigma$较高阶的无穷小量．

母线平行于 z 轴的柱面，这柱面在曲面 S 上截下一小片曲面，在切平面 T 上截下一小片平面．由于 $d\sigma$ 的直径很小，切平面 T 上的那一小片平面的面积 dA 可以近似代替相应的那小片曲面的面积．设点 M 处曲面 S 上的法线（指向朝上）与 z 轴所成的角为 γ，则

$$dA=\frac{d\sigma}{\cos\gamma}^{①}.$$

因为
$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2(x,\ y)+f_y^2(x,\ y)}},$$

所以
$$dA=\sqrt{1+f_x^2(x,\ y)+f_y^2(x,\ y)}\,d\sigma.$$

这就是曲面 S 的面积元素，以它为被积表达式在区域 D 上积分，得

$$A=\iint\limits_D\sqrt{1+f_x^2(x,\ y)+f_y^2(x,\ y)}\,d\sigma.$$

上式也可写成

---

① 设两平面 Π_1、Π_2 的夹角为 θ（取锐角），Π_1 上的区域 D 在 Π_2 上的投影区域为 D_0，则 D 的面积 A 与 D_0 的面积 σ 之间有下列关系：

$$A=\frac{\sigma}{\cos\theta}.$$

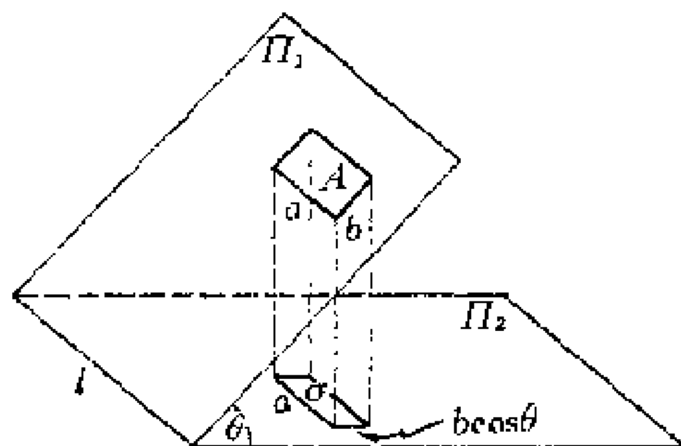


图 9-28

事实上，先假定 D 是矩形区域，且其一边平行于平面 Π_1、Π_2 的交线 l，边长为 a，另一边长为 b（图 9-28），则 D_0 也是矩形区域，且边长分别为 a 及 $b\cos\theta$，从而

$$\sigma=ab\cos\theta=A\cos\theta,$$

即
$$A=\frac{\sigma}{\cos\theta}.$$

在一般情况，可把 D 分成上述类型的 m 个小矩形区域（不计靠边界的不规则部分），则小矩形区域的面积 A_k 及其投影区域的面积 σ_k 之间符合 $A_k=\frac{\sigma_k}{\cos\theta}$ $(k=1,\ 2,\cdots,m)$．从而 $\sum\limits_{k=1}^{m}A_k=\frac{\sum\limits_{k=1}^{m}\sigma_k}{\cos\theta}$．使各小区域的直径中的最大者趋于零，取极限便得 $A=\frac{\sigma}{\cos\theta}$．

$$A=\iint_{D}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy.$$

这就是计算曲面面积的公式.

设曲面的方程为 $x=g(y, z)$ 或 $y=h(z, x)$，可分别把曲面投影到 yOz 面上（投影区域记作 D_{yz}）或 zOx 面上（投影区域记作 D_{zx}），类似地可得

$$A=\iint_{D_{yz}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dy\,dz,$$

或

$$A=\iint_{D_{zx}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,dz\,dx.$$

例 1 求半径为 a 的球的表面积.

解 取上半球面方程为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，则它在 xOy 面上的投影区域 D 可表示为 $x^2+y^2\leqslant a^2$.

由
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

得
$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

因为这函数在区域 D 的边界即圆周 $x^2+y^2=a^2$ 上不连续，我们不能直接应用曲面面积公式．所以先取区域 D_1: $x^2+y^2\leqslant b^2$ $(0<b<a)$ 为积分区域，算出相应于 D_1 上的球面面积 A_1 后，令 $b\to a$ 取 A_1 的极限①就得半球面的面积.

$$A_1=\iint_{D_1}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy,$$

利用极坐标，得

$$A_1=\iint_{D_1}\frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}\,r\,dr\,d\theta$$

① 这极限就是函数 $\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$ 在区域 D 上的所谓广义二重积分.

$$= a\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^b \frac{r\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}}$$

$$= 2\pi a\int_0^b \frac{r\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}} = 2\pi a(a-\sqrt{a^2-b^2}).$$

$$\therefore\quad \lim_{b\to a} A_1 = \lim_{b\to a} 2\pi a(a-\sqrt{a^2-b^2}) = 2\pi a^2.$$

这就是半个球面的面积，因此整个球面的面积为

$$A = 4\pi a^2.$$

二、平面薄片的重心

设 xOy 平面上有 n 个质点，它们位于点 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，…，(x_n, y_n) 处，质量分别为 m_1, m_2, …, m_n. 由力学知道，该质点系的重心的坐标为

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i},$$

其中 $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ 为该质点系的总质量，

$$M_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \qquad M_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i.$$

设有一平面薄片，占有 xOy 面上的区域 D，在点 (x, y) 处的面密度为 $\rho(x, y)$，假定 $\rho(x, y)$ 在 D 上连续. 现在要找该薄片的重心的坐标.

在区域 D 上任取一直径很小的区域 $d\sigma$（这小区域的面积也记作 $d\sigma$），(x, y) 是这小区域内的一个点. 由于小区域 $d\sigma$ 的直径很小，且 $\rho(x, y)$ 在 D 上连续，所以薄片中相应于小区域 $d\sigma$ 的部分的质量近似等于 $\rho(x, y)d\sigma$，这部分质量可近似看作集中在点 (x, y) 上，于是可写出 M_y 及 M_x 的元素 dM_y 及 dM_x:

$$dM_y = x\rho(x, y)d\sigma, \qquad dM_x = y\rho(x, y)d\sigma.$$

以这些元素为被积表达式，在区域 D 上积分，便得

$$M_y=\iint_D x\rho(x, y)d\sigma, \qquad M_x=\iint_D y\rho(x, y)d\sigma.$$

又由第一节知道，薄片的质量为

$$M=\iint_D \rho(x, y)d\sigma.$$

所以，薄片的重心的坐标为

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\iint_D x\rho(x, y)d\sigma}{\iint_D \rho(x, y)d\sigma}, \qquad \bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\iint_D y\rho(x, y)d\sigma}{\iint_D \rho(x, y)d\sigma}.$$

如果薄片是均匀的，即面密度为常量，则上式中可把 ρ 提到积分记号外面并从分子、分母中约去，这样便得均匀薄片的重心的坐标为

$$\bar{x}=\frac{1}{A}\iint_D xd\sigma, \qquad \bar{y}=\frac{1}{A}\iint_D yd\sigma, \tag{1}$$

其中 $A=\iint_D d\sigma$ 为区域 D 的面积。这时薄片的重心完全由区域 D 的形状所决定。我们把均匀平面薄片的重心，叫做这平面薄片所占的平面图形的形心。因此，平面图形 D 的形心，就可用公式(1)计算。

例 2 求位于两圆 $r=2\sin\theta$ 和 $r=4\sin\theta$ 之间的均匀薄片的重心(图 9-29)。

解 因为区域 D 对称于 y 轴，所以重心 $C(\bar{x}, \bar{y})$ 必位于 y 轴上，于是 $\bar{x}=0$。

再由公式

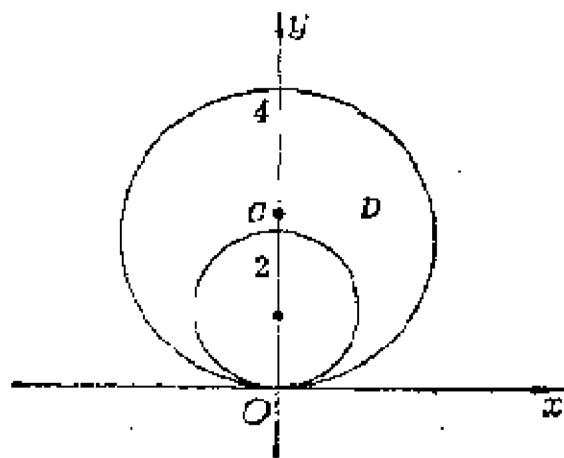


图 9-29

$$\bar{y}=\frac{1}{A}\iint\limits_{D} y d\sigma$$

计算 $\bar{y}$. 由于区域 D 位于半径为 1 与半径为 2 的两圆之间，所以它的面积等于这两个圆的面积之差，即 $A=3\pi$. 再利用极坐标计算积分：

$$\iint\limits_{D} y d\sigma=\iint\limits_{D} r^2 \sin\theta d r d\theta=\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta} r^2 dr$$

$$=\frac{56}{3}\int_0^{\pi} \sin^4\theta\, d\theta=7\pi.$$

因此
$$\bar{y}=\frac{7\pi}{3\pi}=\frac{7}{3},$$

所求重心是 $C\left(0, \frac{7}{3}\right)$.

三、平面薄片的转动惯量

设 xOy 平面上有 n 个质点，它们位于点 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，…，(x_n, y_n) 处，质量分别为 $m_1, m_2, \cdots, m_n$. 由力学知道，该质点系对于 x 轴、对于 y 轴以及对于原点 O 的转动惯量依次为：

$$I_x=\sum_{i=1}^{n} y_i^2 m_i, \quad I_y=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 m_i, \quad I_O=\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+y_i^2) m_i.$$

设有一薄片，占有 xOy 面上的区域 D，在点 (x, y) 处的面密度为 $\rho(x, y)$，假定 $\rho(x, y)$ 在 D 上连续. 现在要求该薄片对于 x 轴的转动惯量 I_x，对于 y 轴的转动惯量 I_y 以及对于原点 O 的转动惯量 I_O.

应用元素法. 在区域 D 上任取一直径很小的区域 $d\sigma$（这小区域的面积也记作 $d\sigma$），(x, y) 是这小区域内的一个点. 因为小区域 $d\sigma$ 的直径很小，且 $\rho(x, y)$ 在 D 上连续，所以薄片中相应于小区域 $d\sigma$ 部分的质量近似等于 $\rho(x, y)d\sigma$，这部分质量可近似看作集中在点 (x, y) 上，于是可写出薄片对于 x 轴、对于 y 轴以及对于

原点 O 的转动惯量元素：

$$dI_x = y^2\rho(x, y)d\sigma, \quad dI_y = x^2\rho(x, y)d\sigma,$$
$$dI_O = (x^2+y^2)\rho(x, y)d\sigma.$$

以这些元素为被积表达式，在区域 D 上积分，便得

$$I_x = \iint_D y^2\rho(x, y)d\sigma, \quad I_y = \iint_D x^2\rho(x, y)d\sigma,$$

$$I_O = \iint_D (x^2+y^2)\rho(x, y)d\sigma.$$

例 3 求半径为 a 的均匀半圆薄片（面密度为常数 ρ）对于其直径边的转动惯量。

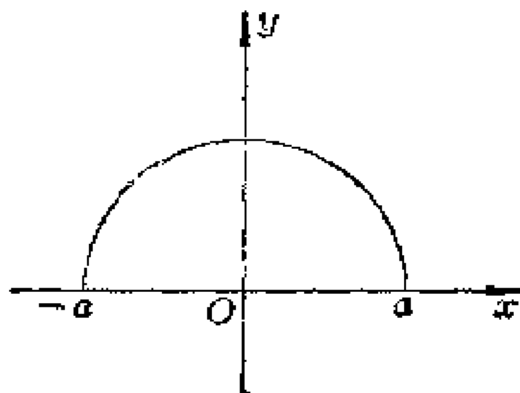


图 9-30

解 取坐标系如图 9-30 所示，则薄片所占区域 D 可表示为

$$x^2+y^2\leqslant a^2, \ y\geqslant 0;$$

而所求转动惯量即半圆薄片对于 x 轴的转动惯量 I_x.

$$I_x = \iint_D \rho y^2 d\sigma = \rho\iint_D r^3\sin^2\theta\, dr\, d\theta$$
$$= \rho\int_0^\pi d\theta\int_0^a r^3\sin^2\theta\, dr = \rho\cdot\frac{a^4}{4}\int_0^\pi \sin^2\theta\, d\theta$$
$$= \frac{1}{4}\rho a^4\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}Ma^2,$$

其中 $M = \frac{1}{2}\pi a^2\rho$ 为半圆薄片的质量。

习 题 9-3

1. 求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 含在圆柱面 $x^2+y^2=ax$ 内部的那部分面积。
2. 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所割下部分的曲面面积。
3. 求半径相等的两个直交圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 及 $x^2+z^2=R^2$ 所围立体

的表面积.

4. 求平面 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 被三坐标面所割出部分的面积.

5. 设薄片所占的区域 D 如下, 求均匀薄片的重心:

(1) D 由 $y=\sqrt{2px}$, $x=x_0$, $y=0$ 所围成;

(2) D 是半椭圆: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$, $y\geqslant 0$;

(3) D 是由圆 $r=a\cos\theta$, $r=b\cos\theta$ $(0<a<b)$所围成.

6. 设平面薄片所占的区域 D 是由抛物线 $y=x^2$ 及直线 $y=x$ 所围成, 它在点(x, y)处的面密度 $\rho(x, y)=x^2y$, 求该薄片的重心.

7. 设有一等腰直角三角形薄片, 腰长为 a, 各点处的面密度等于该点到直角顶点的距离的平方, 求这薄片的重心.

8. 在均匀半圆形薄片的直径上, 要接上一个一边与直径等长的均匀矩形薄片, 为了使整个均匀薄片的重心恰好落在圆心上, 问接上去的均匀矩形薄片另一边的长度应是多少?

9. 设均匀薄片(面密度为常数 1)所占区域 D 如下, 求指定的转动惯量:

(1) D: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$, 求 I_y 和 I_0;

(2) D 由抛物线 $y^2=\frac{9}{2}x$ 与直线 $x=2$ 所围成, 求 I_x 和 I_y;

(3) D 为矩形区域: $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant b$, 求 I_x 和 I_y.

10. 已知均匀矩形板(面密度为常数 ρ)的长和宽分别为 b 和 h, 计算此矩形板对于通过其形心且分别与一边平行的两轴的转动惯量.

11. 求内、外半径依次为 r 及 R 的均匀圆环状薄片(面密度为常数 ρ)对于垂直于环面并通过其中心的轴的转动惯量.

12. 求由抛物线 $y=x^2$ 及直线 $y=1$ 所围成的均匀薄片(面密度为常数 ρ)对于直线 $y=-1$ 的转动惯量.

第四节　三重积分的概念及其计算法

定积分及二重积分作为和的极限的概念, 可以很自然地推广到三重积分.

定义　设 $f(x, y, z)$ 是空间闭区域 Ω 上的有界函数. 将 Ω 任

意分成 n 个小区域

$$\Delta v_1,\ \Delta v_2,\ \cdots,\ \Delta v_n.$$

其中 Δv_i 表示第 i 个小区域，也表示它的体积．在每个小区域 Δv_i 上任取一点 $(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i)$，作乘积 $f(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i)\ \Delta v_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，并作和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i)\Delta v_i$．如果当各小区域直径中的最大值 λ 趋于零时这和的极限存在，则称此极限值为函数 $f(x,\ y,\ z)$ 在区域 Ω 上的三重积分，记作 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,\ y,\ z)dv$，即

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,\ y,\ z)\ dv=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i)\Delta v_i, \tag{1}$$

其中 dv 叫做体积元素．

体积元素 dv 象征着 Δv_i．在直角坐标系中，如果用平行于坐标面的平面来分区域 Ω，那末除了靠 Ω 边界曲面的一些不规则小区域外，得到小区域 Δv_i 为长方体．设长方体小区域 Δv_i 的边长为 Δx_j、Δy_k、Δz_l，则 $\Delta v_i=\Delta x_j\Delta y_k\Delta z_l$．因此在直角坐标系中，有时也把体积元素 dv 记作 $dx\,dy\,dz$，而把三重积分记作

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,\ y,\ z)dx\,dy\,dz,$$

其中 $dx\,dy\,dz$ 叫做直角坐标系中的体积元素．

当函数 $f(x,\ y,\ z)$ 在区域 Ω 上连续时，(1)式右端的和的极限必定存在，也就是，函数 $f(x,\ y,\ z)$ 在区域 Ω 上的三重积分必定存在．以后我们总假定函数 $f(x,\ y,\ z)$ 在区域 Ω 上是连续的．关于二重积分的一些术语，例如被积函数、积分区域等，也可相应地用到三重积分上．三重积分的性质也与第一节中所叙述的二重积分的性质类似，这里不再重复了．

如果 $f(x,\ y,\ z)$ 表示某物体在点 $(x,\ y,\ z)$ 处的密度，Ω 是该物体所占有的空间区域，$f(x,\ y,\ z)$ 在 Ω 上连续，则 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\ \eta_i,$

$\zeta_i)\Delta v_i$ 是该物体的质量 M 的近似值，这个和当 $\lambda\to 0$ 时的极限值就是该物体的质量 M，所以

$$M=\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dv.$$

三重积分也可化为三次积分来计算，下面我们只限于叙述化三重积分为三次积分的方法。

假设平行于 z 轴且穿过区域 Ω 内部的直线与区域 Ω 的边界曲面 S 相交不多于两点。把区域 Ω 投影到 xOy 面上，得一平面区域 D(图 9-31)。以 D 的边界为准线作母线平行于 z 轴的柱面。这柱面与曲面 S 的交线从 S 中分出的上、下两部分，它们的方程分别为

$$S_1:\qquad z=z_1(x, y),$$

$$S_2:\qquad z=z_2(x, y),$$

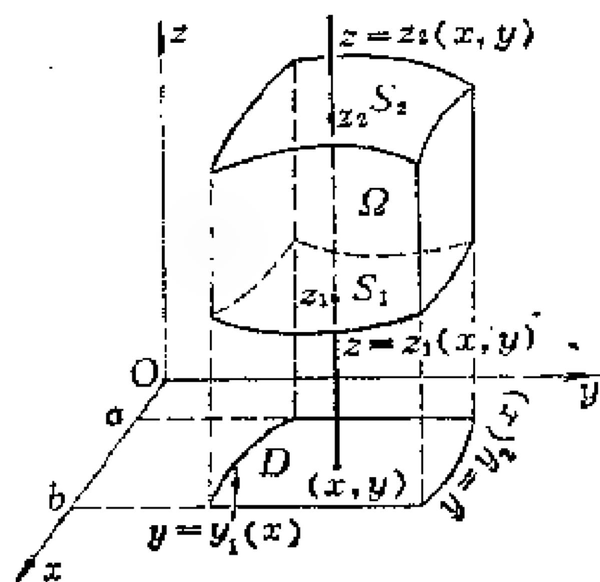


图 9-31

其中 $z_1(x, y)$ 与 $z_2(x, y)$ 都是 D 上的连续函数，且 $z_1(x, y)\leqslant z_2(x, y)$。过 D 内任一点 (x, y) 作平行于 z 轴的直线，这直线通过曲面 S_1 穿入 Ω 内，然后通过曲面 S_2 穿出 Ω 外，穿入点与穿出点的竖坐标分别为 $z_1(x, y)$ 与 $z_2(x, y)$。

先将 x、y 看作定值，将 $f(x, y, z)$ 只看作 z 的函数，在区间 $[z_1(x, y), z_2(x, y)]$ 上对 z 积分。积分的结果是 x、y 的函数，记为 $F(x, y)$，即

$$F(x, y)=\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz.$$

然后计算 $F(x, y)$在区域 D 上的二重积分

$$\iint_D F(x, y)d\sigma=\iint_D\left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz\right]d\sigma.$$

假如区域 D 可用不等式

$$y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x), \quad a\leqslant x\leqslant b$$

来表示．把这个二重积分化为二次积分，于是得到三重积分的计算公式：

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)dv=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz. \qquad (2)$$

公式(2)把三重积分化为先对 z、次对 y、最后对 x 的三次积分．

如果平行于 x 轴或 y 轴且穿过区域 Ω 内部的直线与 Ω 的边界曲面 S 相交不多于两点，也可把区域 Ω 投影到 yOz 面上或 xOz 面上，这样便可把三重积分化为按其它顺序的三次积分．如果平行于坐标轴且穿过区域 Ω 内部的直线与边界曲面 S 的交点多于两个，也可象处理二重积分那样，把 Ω 分成若干部分，使 Ω 上的三重积分化为各部分区域上的三重积分的和．

例 计算三重积分 $\iiint_\Omega x\,dx\,dy\,dz$，其中 Ω 为三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的区域．

解 作区域 Ω 如图 9-32 所示．

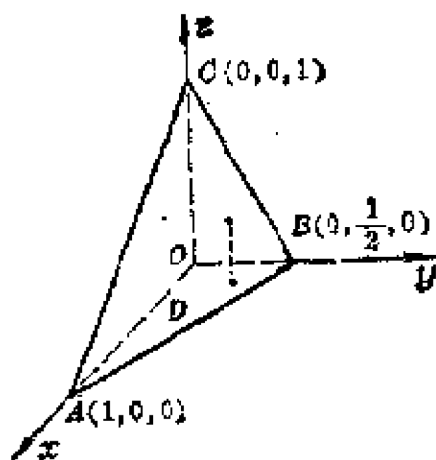


图 9-32

将 Ω 投影到 xOy 面上，得投影区域 D 为三角形 OAB．直线 OA、OB 及 AB 的方程依次为 $y=0$、$x=0$ 及 $x+2y=1$，所以 D 可用不等式

$$0\leqslant y\leqslant\frac{1-x}{2}, \quad 0\leqslant x\leqslant 1$$

來表示.

在 D 内任取一点 (x, y)，过此点作平行于 z 轴的直线，该直线通过平面 $z=0$ 穿入 Ω 内，然后通过平面 $z=1-x-2y$ 穿出 Ω 外.

于是，由公式(2)得

$$\iiint_{\Omega} x\,dx\,dy\,dz=\int_0^1 dx\int_0^{\frac{1-x}{2}} dy\int_0^{1-x-2y} x\,dz$$

$$=\int_0^1 x\,dx\int_0^{\frac{1-x}{2}}(1-x-2y)dy$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1 (x-2x^2+x^3)\,dx=\frac{1}{48}.$$

习 题 9-4

1．化三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dx\,dy\,dz$ 为三次积分，其中积分区域 Ω 分别是：

(1) 由双曲抛物面 $xy=z$ 及平面 $x+y-1=0$, $z=0$ 所围成的区域；

(2) 由曲面 $z=x^2+y^2$ 及平面 $z=1$ 所围成的区域；

(3) 由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=2-x^2$ 所围成的区域；

(4) 由曲面 $cz=xy$ $(c>0)$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $z=0$ 所围成的在第一卦限内的区域；

(5) 由曲面 $z=x^2+y^2$, $y=x^2$ 及平面 $y=1$, $z=0$ 所围成的区域.

2．设有一物体，占有空间区域 Ω: $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$, $0\leqslant z\leqslant 1$, 在点 (x, y, z) 处的密度为 $\rho(x, y, z)=x+y+z$, 计算该物体的质量.

3．如果三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dx\,dy\,dz$ 的被积函数 $f(x, y, z)$ 是三个函数 $f_1(x)$、$f_2(y)$、$f_3(z)$ 的乘积，即 $f(x, y, z)=f_1(x)\cdot f_2(y)\cdot f_3(z)$, 积分区域 Ω 为 $a\leqslant x\leqslant b$, $c\leqslant y\leqslant d$, $l\leqslant z\leqslant m$; 证明这个三重积分等于三个单积分的乘积，即

$$\iiint_{\Omega} f_1(x)f_2(y)f_3(z)\,dx\,dy\,dz=\int_a^b f_1(x)\,dx\int_c^d f_2(y)dy\int_l^m f_3(z)dz.$$

4. 计算$\iiint\limits_{\Omega} xy^2z^3\,dx\,dy\,dz$，其中$\Omega$是由曲面$z=xy$，与平面$y=x$，$x=1$和$z=0$所围成的区域.

5. 计算$\iiint\limits_{\Omega} \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}$，其中$\Omega$为平面$x=0$，$y=0$，$z=0$，$x+y+z=1$所围成的四面体.

6. 计算$\iiint\limits_{\Omega} xyz\,dx\,dy\,dz$，其中$\Omega$为球面$x^2+y^2+z^2=1$及三个坐标面所围成的在第一卦限内的区域.

7. 计算$\iiint\limits_{\Omega} xz\,dx\,dy\,dz$，其中$\Omega$是由平面$z=0$，$z=y$，$y=1$以及抛物柱面$y=x^2$所围成的区域.

第五节　利用柱面坐标和球面坐标计算三重积分

在第二节二重积分的计算中我们看到，由于积分区域和被积函数的特点，二重积分有时要用极坐标来计算. 与此类似，三重积分有时也要利用柱面坐标或球面坐标来进行计算.

一、利用柱面坐标计算三重积分

设$M(x, y, z)$为空间内一点，并设点M在xOy面上的投影P的极坐标为r，θ，则这样的三个数r，θ，z就叫做点M的柱面坐标(图 9-33)，这里规定r，θ，z的变化范围为：

$$0\leqslant r<+\infty,$$

$$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,$$

$$-\infty<z<+\infty.$$

三组坐标面分别为

$r=$常数，即以z轴为轴的圆柱面；

$\theta=$常数，即过z轴的半平面；

$z=$常数，即与xOy面平行的平面.

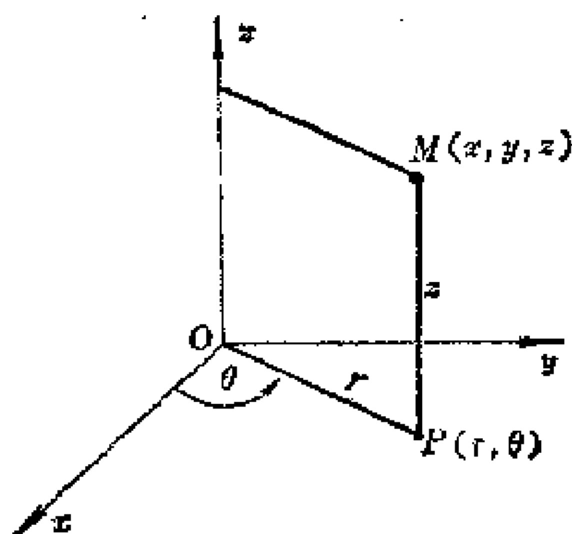


图 9-33

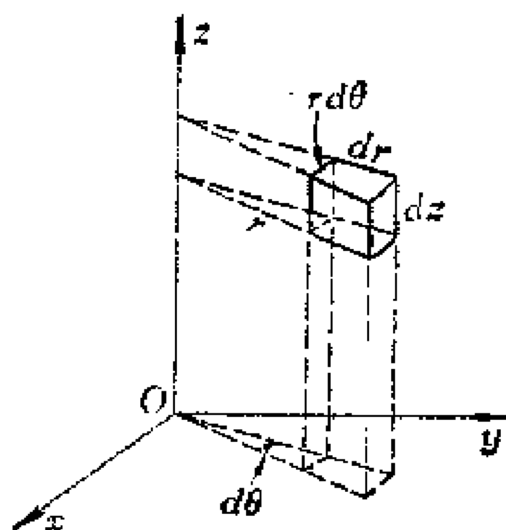


图 9-34

显然，点 M 的直角坐标与柱面坐标的关系为

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z. \end{cases} \tag{1}$$

现在要把三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dv$ 中的变量变换为柱面坐标. 为此，用三组坐标面 $r=$常数，$\theta=$ 常数，$z=$常数把 Ω 分成许多小区域，除了靠 Ω 的边界曲面的一些不规则小区域外，这种小区域都是柱体. 今考虑由 r, θ, z 各取得微小增量 $dr, d\theta, dz$ 所成的柱体的体积（图 9-34）. 这个体积等于高与底面积的乘积. 现在高为 dz、底面积在不计高阶无穷小时为 $r\,dr\,d\theta$（即极坐标系中的面积元素），于是得

$$dv = r\,dr\,d\theta\,dz,$$

这就是柱面坐标系中的体积元素. 再注意到关系式(1)，就有

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\Omega} F(r, \theta, z)\,r\,dr\,d\theta\,dz, \tag{2}$$

其中 $F(r, \theta, z) = f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$. (2)式就是把三重积分的变量从直角坐标变换为柱面坐标的公式. 至于变量变换为柱面坐

标后的三重积分的计算，则可化为三次积分来进行。化为三次积分时，积分限是根据 r, θ, z 在积分区域 Ω 中的变化范围来确定的，下面通过例子来说明。

例 1 利用柱面坐标计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} z\,dx\,dy\,dz$，其中区域 Ω 为半球体：$x^2+y^2+z^2\leqslant 1$, $z\geqslant 0$.

解 把区域 Ω 投影到 xOy 面上，得半径为 1 的圆形区域 D: $0\leqslant r\leqslant 1$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$. 在 D 内任取一点 (r, θ)，过此点作平行于 z 轴的直线，此直线通过平面 $z=0$ 穿入 Ω 内，然后通过上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 即 $z=\sqrt{1-r^2}$ 穿出 Ω 外。因此区域 Ω 可用不等式

$$0\leqslant z\leqslant\sqrt{1-r^2},\qquad 0\leqslant r\leqslant 1,\qquad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$$

来表示。于是

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega} z\,dx\,dy\,dz &= \iiint\limits_{\Omega} zr\,dr\,d\theta\,dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 r\,dr\int_0^{\sqrt{1-r^2}} z\,dz \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 r(1-r^2)\,dr \\ &= \frac{1}{2}\cdot 2\pi\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]_0^1=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

二、利用球面坐标计算三重积分

设 $M(x, y, z)$ 为空间内一点，则点 M 也可用这样三个有次序的数 r, φ, θ 来确定，其中 r 为原点 O 与点 M 间的距离，φ 为有向线段 $\overrightarrow{OM}$ 与 z 轴正向所夹的角，θ 为从正 z 轴来看自 x 轴按逆时针方向转到有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 的角，这里 P 为点 M 在 xOy 面上的投影（图 9-35），这样的三个数 r, φ, θ 叫做点 M 的球面坐标，

这里 r, φ, θ 的变化范围为

$$0 \leqslant r < +\infty,$$

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \pi,$$

$$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

三组坐标面分别为

r=常数，即以原点为心的球面；

φ=常数，即以原点为顶点、z 轴为轴的圆锥面；

θ=常数，即过 z 轴的半平面.

设点 M 在 xOy 面上的投影为 P，点 P 在 x 轴上的投影为 A，则 $OA=x$, $AP=y$, $PM=z$. 又

$$OP=r\sin\varphi, \qquad z=r\cos\varphi.$$

因此，点 M 的直角坐标与球面坐标的关系为

$$\begin{cases} x=OP\cos\theta=r\sin\varphi\cos\theta, \\ y=OP\sin\theta=r\sin\varphi\sin\theta, \\ z=r\cos\varphi. \end{cases} \tag{3}$$

为了把三重积分中的变量从直角坐标变换为球面坐标，用三组坐标面 r=常数，φ=常数，θ=常数把积分区域 Ω 分成许多小区域. 考虑由 r, φ, θ 各取得微小增量 dr, $d\varphi$, $d\theta$ 所成的六面体的体积(图 9-36). 不计高阶无穷小，可把这个六面体看作长方体，

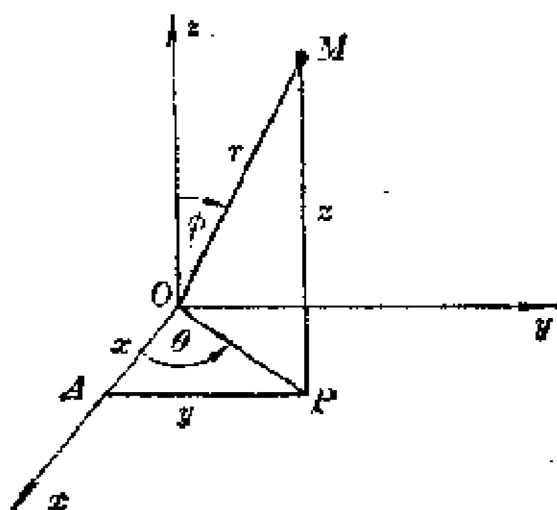


图 9-35

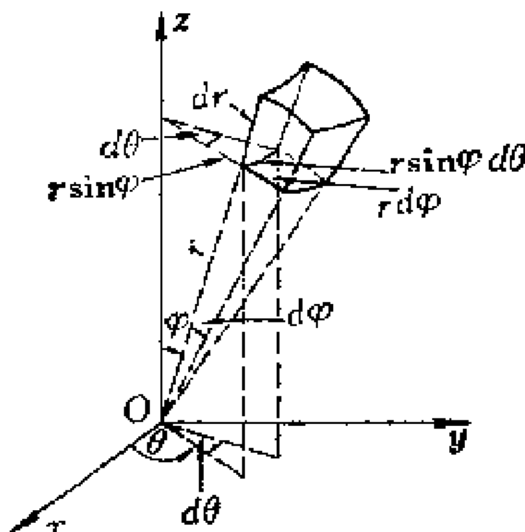


图 9-36

其经线方向的长为 $rd\varphi$，纬线方向的宽为 $r\sin\varphi\, d\theta$，向径方向的高为 dr，于是得

$$dv=r^2\sin\varphi\, drd\varphi\, d\theta,$$

这就是球面坐标系中的体积元素．再注意到关系式(3)，就有

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)dx\,dy\,dz$$
$$=\iiint_{\Omega} F(r, \varphi, \theta)r^2\sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta, \qquad (4)$$

其中 $F(r, \varphi, \theta)=f(r\sin\varphi\cos\theta,\ r\sin\varphi\sin\theta,\ r\cos\varphi)$．(4)式就是把三重积分的变量从直角坐标变换为球面坐标的公式．

要计算变量变换为球面坐标后的三重积分，可把它化为对 r、对 φ 及对 θ 的三次积分．

若积分区域 Ω 的边界曲面是一个包围原点在内的闭曲面，其球面坐标方程为 $r=r(\varphi, \theta)$，则

$$I=\iiint_{\Omega} F(r, \varphi, \theta)r^2\sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{r(\varphi, \theta)}F(r, \varphi, \theta)r^2\sin\varphi\, dr.$$

当积分区域 Ω 为球面 $r=a$ 所围成时，则

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{a}F(r, \varphi, \theta)r^2\sin\varphi\, dr.$$

特别地，当 $F(r, \varphi, \theta)=1$ 时，由上式即得球的体积

$$V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\, d\varphi\int_0^{a}r^2dr=2\pi\cdot 2\cdot\frac{a^3}{3}=\frac{4}{3}\pi a^3,$$

这是我们所熟知的结果．

例 2 求半径为 a 的球面与半顶角为 α 的内接锥面所围成的立体(图 9-37)的体积．

解 设球面通过原点 O，球心在 z 轴上，又内接锥面的顶点在原点 O，其轴与 z 轴重合，则球面方程为 $r=2a\cos\varphi$，锥面方程为

$\varphi=\alpha$. 因为立体所占有的空间区域 Ω 可用不等式

$$0\leqslant r\leqslant 2a\cos\varphi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\alpha,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$$

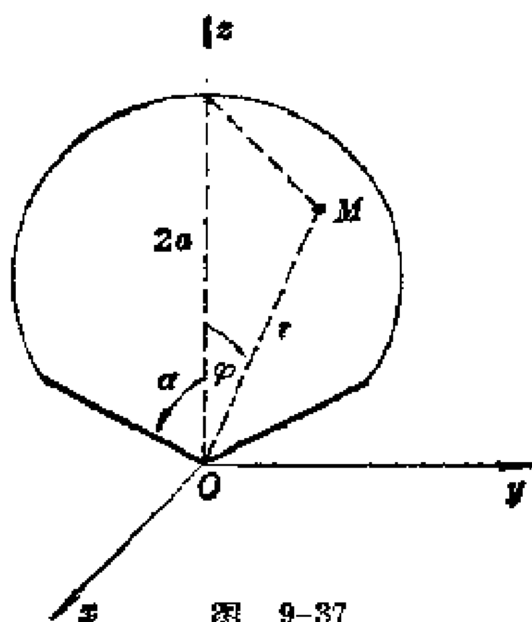


图 9-37

来表示, 所以

$$V=\iiint\limits_{\Omega} r^2\sin\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\alpha}d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^2\sin\varphi dr$$

$$=2\pi\int_0^{\alpha}\sin\varphi d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^2\,dr$$

$$=\frac{16\pi a^3}{3}\int_0^{\alpha}\cos^3\varphi\sin\varphi\, d\varphi$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3}(1-\cos^4\alpha).$$

在三重积分的应用中也可采用元素法.

设物体占有空间区域 Ω, 在点 $(x,\ y,\ z)$ 处的密度为 $\rho(x,\ y,\ z)$, 假定这函数在 Ω 上连续, 求该物体的重心的坐标和转动惯量. 与第三节中关于平面薄片的这类问题一样, 应用元素法可写出

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega}x\rho\, dv,\ \bar{y}=\frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega}y\rho\, dv,\ \bar{z}=\frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega}z\rho\, dv,$$

$$I_x=\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)\rho\, dv,\ I_O=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\rho dv$$

等, 其中 $M=\iiint\limits_{\Omega}\rho dv$ 为物体的质量.

例 3 求均匀半球体的重心.

解 取半球体的对称轴为 z 轴, 原点取在球心上, 又设球半径为 a, 则半球体所占空间区域 Ω 可用不等式

$$x^2+y^2+z^2\leqslant a^2,\ z\geqslant 0$$

来表示.

显然, 重心在 z 轴上, 故 $\bar{x}=\bar{y}=0$.

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\iiint_{\Omega} z\rho\, dv=\frac{1}{V}\iiint_{\Omega} z dv,$$

其中 $V=\frac{2}{3}\pi a^3$ 为半球体的体积.

$$\iiint_{\Omega} z dv=\iiint_{\Omega} r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi\int_0^a r^3\, dr$$

$$=2\pi\cdot\left[\frac{\sin^2\varphi}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{a^4}{4}=\frac{\pi a^4}{4}.$$

因此, $\bar{z}=\frac{3}{8}a$, 重心为 $\left(0,\ 0,\ \frac{3}{8}a\right)$.

例 4 求均匀球体对于过球心的一条轴 l 的转动惯量.

解 取球心为坐标原点, z 轴与轴 l 重合, 又设球的半径为 a, 则球体所占空间区域 Ω 可用不等式

$$x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$$

来表示.

所求转动惯量即球体对于 z 轴的转动惯量 I_z.

$$I_z=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\rho dv$$

$$=\rho\iiint_{\Omega}(r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta)r^2\sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta$$

$$=\rho\iiint_{\Omega} r^4\sin^3\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta=\rho\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\, d\varphi\int_0^a r^4\, dr$$

$$=\rho\cdot 2\pi\cdot\frac{a^5}{5}\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\, d\varphi$$

$$=\frac{2}{5}\pi a^5\rho\cdot\frac{4}{3}=\frac{2}{5}a^2 M,$$

其中 $M=\frac{4}{3}\pi a^3\rho$ 为球体的质量.

习 题 9-5

1. 利用柱面坐标计算下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_{\Omega} z dv$，其中 Ω 是由曲面 $x^2+y^2+z^2=2$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的区域；

(2) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv$，其中 Ω 是由曲面 $x^2+y^2=2z$ 及平面 $z=2$ 所围成的区域.

2. 利用球面坐标计算下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv$，其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所围成的区域；

(2) $\iiint\limits_{\Omega} z dv$，其中区域 Ω 由不等式 $x^2+y^2+(z-a)^2\leqslant a^2$，$x^2+y^2\leqslant z^2$ 所确定.

3. 选用适当的坐标计算下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_{\Omega} xy\,dv$，其中 Ω 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=1$，$z=0$，$x=0$，$y=0$ 所围成的在第一卦限内的区域；

(2) $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}dv$，其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=z$ 所围成的区域；

(3) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv$，其中 Ω 是由曲面 $4z^2=25(x^2+y^2)$ 及平面 $z=5$ 所围成的区域；

(4) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,dv$，其中 Ω 是由两个半球面 $z=\sqrt{A^2-x^2-y^2}$，$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ $(A>a>0)$ 及平面 $z=0$ 所围成的区域；

(5) $\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}dv$，其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所围成的区域.

4. 利用三重积分计算下列由曲面所围成的立体的体积：

(1) $z=6-x^2-y^2$ 及 $z=\sqrt{x^2+y^2}$；

(2) $x^2+y^2+z^2=2az$ $(a>0)$ 及 $x^2+y^2=z^2$（含有 z 轴的部分）；

(3) $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$；

(4) $x^2+y^2+z^2=5$ 及 $x^2+y^2=4z$.

5. 球心在原点、半径为 R 的球体，在其上任意一点的体密度与这点到球心的距离成正比，求这球体的质量.

6. 利用三重积分计算下列由曲面所围立体的重心(设密度 $\rho=1$):

(1) $z^2=x^2+y^2$, $z=1$;

(2) $z=\sqrt{A^2-x^2-y^2}$, $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ $(A>a>0)$, $z=0$;

(3) $z=x^2+y^2$, $x+y=a$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

7. 球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz$ 内，各点处的体密度等于该点到坐标原点的距离的平方. 试求这球体的重心.

8. 一均匀物体(密度 ρ 为常数)占有的区域 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 和平面 $z=0$, $|x|=a$, $|y|=a$ 所围成,

(1) 求其体积;

(2) 求物体的重心;

(3) 求物体关于 z 轴的转动惯量.

9. 求半径为 a、高为 h 的均匀圆柱体对于过中心而平行于母线的轴的转动惯量(设密度 $\rho=1$).

10. 求半径为 a、高为 h 的均匀圆柱体对于过中心而垂直于母线的轴的转动惯量(设密度 $\rho=1$).

*第六节　含参变量的积分

设 $f(x, y)$ 是矩形(闭区域) $R(a\leqslant x\leqslant b,\ \alpha\leqslant y\leqslant \beta)$ 上的连续函数. 在 $[a, b]$ 上任意取定 x 的一个值，于是 $f(x, y)$ 是变量 y 在 $[\alpha, \beta]$ 上的一个一元连续函数，从而积分

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x, y)\, dy$$

存在，这个积分的值依赖于取定的 x 值. 当 x 的值改变时，一般说来这个积分的值也跟着改变. 这个积分确定一个定义在 $[a, b]$ 上的 x 的函数，我们把它记作 $\varphi(x)$，即

$$\varphi(x)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x, y)\, dy \quad (a\leqslant x\leqslant b). \tag{1}$$

这里变量 x 在积分过程中是一个常量，通常称它为<u>参变量</u>，因此

(1)式右端是一个含参变量 x 的积分，这积分确定 x 的一个函数 $\varphi(x)$，下面讨论关于 $\varphi(x)$ 的一些性质.

定理 1　如果函数 $f(x, y)$ 在矩形 $R(a\leqslant x\leqslant b, \alpha\leqslant y\leqslant\beta)$ 上连续，那末由积分(1)确定的函数 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上也连续.

证　设 x 和 $x+\Delta x$ 是 $[a, b]$ 上的两点，则

$$\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)=\int_\alpha^\beta[f(x+\Delta x, y)-f(x, y)]dy. \qquad (2)$$

由于 $f(x, y)$ 在闭区域 R 上连续，从而一致连续. 因此对于任意取定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对于 R 内的任意两点 (x_1, y_1) 及 (x_2, y_2)，只要它们之间的距离小于 δ，即 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}<\delta$，就有

$$|f(x_2, y_2)-f(x_1, y_1)|<\varepsilon.$$

因为点 $(x+\Delta x, y)$ 与 (x, y) 的距离等于 $|\Delta x|$，所以当 $|\Delta x|<\delta$ 时，就有

$$|f(x+\Delta x, y)-f(x, y)|<\varepsilon.$$

于是由(2)式有

$$|\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)|$$
$$\leqslant\int_\alpha^\beta|f(x+\Delta x, y)-f(x, y)|dy<\varepsilon(\beta-\alpha).$$

所以 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续.

既然函数 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，那末它在 $[a, b]$ 上的积分存在，这个积分可以写为

$$\int_a^b\varphi(x)dx=\int_a^b\left[\int_\alpha^\beta f(x, y)dy\right]dx=\int_a^b dx\int_\alpha^\beta f(x, y)dy.$$

右端积分是函数 $f(x, y)$ 先对 y 后对 x 的二次积分. 当 $f(x, y)$ 在矩形 R 上连续时，$f(x, y)$ 在 R 上的二重积分 $\iint\limits_R f(x, y)dx\,dy$ 是存在的，这个二重积分化为二次积分来计算时，如果先对 y 后

对 x 积分，就是上面的这个二次积分. 但二重积分 $\iint\limits_R f(x,y)dx\,dy$ 也可化为先对 x 后对 y 的二次积分 $\int_\alpha^\beta\left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy$，因此有下面的定理 2.

定理 2 **如果函数** $f(x,y)$ **在矩形** $R(a\leqslant x\leqslant b,\ \alpha\leqslant y\leqslant\beta)$ **上连续，则**

$$\int_a^b\left[\int_\alpha^\beta f(x,y)dy\right]dx=\int_\alpha^\beta\left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy. \tag{3}$$

公式(3)也可写成

$$\int_a^b dx\int_\alpha^\beta f(x,y)dy=\int_\alpha^\beta dy\int_a^b f(x,y)dx. \tag{3'}$$

下面考虑由积分(1)确定的函数 $\varphi(x)$ 的微分问题.

定理 3 **如果函数** $f(x,y)$ **及其偏导数** $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ **都在矩形** R $(a\leqslant x\leqslant b,\ \alpha\leqslant y\leqslant\beta)$ **上连续，那末由积分(1)确定的函数** $\varphi(x)$ **在** $[a,b]$ **上可微分，并且**

$$\varphi'(x)=\frac{d}{dx}\int_\alpha^\beta f(x,y)dy=\int_\alpha^\beta\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dy. \tag{4}$$

证 因为 $\varphi'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}$，为了求 $\varphi'(x)$，先利用公式(2)作出增量之比

$$\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}=\int_\alpha^\beta\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}dy. \tag{5}$$

由拉格朗日中值定理，以及 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 的一致连续性，我们有

$$\begin{aligned}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}&=\frac{\partial f(x+\theta\Delta x,y)}{\partial x}\\&=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\eta(x,y,\Delta x),\end{aligned} \tag{6}$$

其中 $0<\theta<1$，$|\eta|$ 可小于任意给定的正数 ε，只要 $|\Delta x|$ 小于某个正数 δ. 因此

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta}\eta(x,\ y,\ \Delta x)dy\right|<\int_{\alpha}^{\beta}\varepsilon dy=\varepsilon(\beta-\alpha)\quad(|\Delta x|<\delta),$$

这就是说 $$\lim_{\Delta x\to 0}\int_{\alpha}^{\beta}\eta(x,\ y,\ \Delta x)dy=0.$$

由(5)及(6)有

$$\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial x}dy+\int_{\alpha}^{\beta}\eta(x,\ y,\ \Delta x)dy,$$

令 $\Delta x\to 0$ 取上式的极限，即得公式(4).

在积分(1)中积分限 α 与 β 都是常数. 但在实际应用中还会遇到对于参变量 x 的不同的值，积分限也不同的情形，这时积分限也是参变量 x 的函数. 这样，积分

$$\Phi(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}f(x,\ y)dy\tag{7}$$

也是参变量 x 的函数. 下面我们考虑这种更为广泛地依赖于参变量的积分的某些性质.

定理 4 如果函数 $f(x,\ y)$ 在矩形 $R(a\leqslant x\leqslant b,\ \alpha\leqslant y\leqslant\beta)$ 上连续，又函数 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 在区间 $[a,\ b]$ 上连续，并且

$$\alpha\leqslant\alpha(x)\leqslant\beta,\ \alpha\leqslant\beta(x)\leqslant\beta\quad(a\leqslant x\leqslant b),$$

则由积分(7)确定的函数 $\Phi(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上也连续.

证 设 x 和 $x+\Delta x$ 是 $[a,\ b]$ 上的两点，则

$$\begin{aligned}&\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)\\&=\int_{\alpha(x+\Delta x)}^{\beta(x+\Delta x)}f(x+\Delta x,\ y)dy-\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}f(x,\ y)dy.\end{aligned}$$

因为 $$\begin{aligned}&\int_{\alpha(x+\Delta x)}^{\beta(x+\Delta x)}f(x+\Delta x,\ y)dy\\&=\int_{\alpha(x+\Delta x)}^{\alpha(x)}f(x+\Delta x,\ y)dy+\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}f(x+\Delta x,\ y)dy\\&\quad+\int_{\beta(x)}^{\beta(x+\Delta x)}f(x+\Delta x,\ y)dy,\end{aligned}$$

所以 $$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_{\alpha(x+\Delta x)}^{\alpha(x)} f(x+\Delta x, y)dy$$
$$+\int_{\beta(x)}^{\beta(x+\Delta x)} f(x+\Delta x, y)dy$$
$$+\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}[f(x+\Delta x, y)-f(x, y)]dy. \tag{8}$$

当 $\Delta x\to 0$ 时，上式右端最后一个积分的积分限不变，根据证明定理1时同样的理由，这个积分趋于零．又

$$\left|\int_{\alpha(x+\Delta x)}^{\alpha(x)} f(x+\Delta x, y)dy\right|\leqslant M|\alpha(x+\Delta x)-\alpha(x)|,$$
$$\left|\int_{\beta(x)}^{\beta(x+\Delta x)} f(x+\Delta x, y)dy\right|\leqslant M|\beta(x+\Delta x)-\beta(x)|,$$

其中 M 是 $|f(x, y)|$ 在矩形 R 上的最大值．根据 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续的假定，由以上两式可见，当 $\Delta x\to 0$ 时，(8)式右端的前两个积分都趋于零．于是，当 $\Delta x\to 0$ 时，

$$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)\to 0 \quad (a\leqslant x\leqslant b),$$

所以函数 $\Phi(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续．

关于函数 $\Phi(x)$ 的微分，有下列定理．

定理5 **如果函数 $f(x, y)$ 及其偏导数 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ 都在矩形 $(a\leqslant x\leqslant b,\ \alpha\leqslant y\leqslant\beta)$ 上连续，又函数 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 都在区间 $[a, b]$ 上可微，并且**

$$\alpha\leqslant\alpha(x)\leqslant\beta,\ \alpha\leqslant\beta(x)\leqslant\beta \quad (a\leqslant x\leqslant b),$$

则由积分(7)确定的函数 $\Phi(x)$ 在 $[a, b]$ 上可微，并且

$$\Phi'(x)=\frac{d}{dx}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)dy$$
$$=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}dy+f[x, \beta(x)]\beta'(x)-f[x, \alpha(x)]\alpha'(x). \tag{9}$$

证 由(8)式有

$$\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}\frac{f(x+\Delta x,\ y)-f(x,\ y)}{\Delta x}dy$$
$$+\frac{1}{\Delta x}\int_{\beta(x)}^{\beta(x+\Delta x)}f(x+\Delta x,\ y)dy$$
$$-\frac{1}{\Delta x}\int_{\alpha(x)}^{\alpha(x+\Delta x)}f(x+\Delta x,\ y)dy. \qquad (10)$$

当 $\Delta x\to 0$ 时，上式右端的第一个积分的积分限不变，根据证明定理 3 时同样的理由，有

$$\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}\frac{f(x+\Delta x,\ y)-f(x,\ y)}{\Delta x}dy\to\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial x}dy.$$

对于(10)式右端的第二项，应用积分中值定理得

$$\frac{1}{\Delta x}\int_{\beta(x)}^{\beta(x+\Delta x)}f(x+\Delta x,\ y)dy$$
$$=\frac{1}{\Delta x}[\beta(x+\Delta x)-\beta(x)]f(x+\Delta x,\ \eta),$$

其中 η 在 $\beta(x)$ 与 $\beta(x+\Delta x)$ 之间．当 $\Delta x\to 0$ 时，

$$\frac{1}{\Delta x}[\beta(x+\Delta x)-\beta(x)]\to\beta'(x),\ f(x+\Delta x,\ \eta)\to f[x,\ \beta(x)],$$

于是 $$\frac{1}{\Delta x}\int_{\beta(x)}^{\beta(x+\Delta x)}f(x+\Delta x,\ y)dy\to f[x,\ \beta(x)]\beta'(x).$$

类似地可证，当 $\Delta x\to 0$ 时，

$$\frac{1}{\Delta x}\int_{\alpha(x)}^{\alpha(x+\Delta x)}f(x+\Delta x,\ y)dy\to f[x,\ \alpha(x)]\alpha'(x).$$

因此，令 $\Delta x\to 0$，取(10)式的极限便得公式(9)．

公式(9)称为莱布尼兹公式．

例 1 设 $\Phi(x)=\int_x^{x^2}\frac{\sin xy}{y}dy$，求 $\Phi'(x)$．

解 应用莱布尼兹公式，得

$$\Phi'(x)=\int_x^{x^2}\cos xy\,dy+\frac{\sin x^3}{x^2}\cdot 2x-\frac{\sin x^2}{x}\cdot 1$$
$$=\left[\frac{\sin xy}{x}\right]_x^{x^2}+\frac{2\sin x^3}{x}-\frac{\sin x^2}{x}=\frac{3\sin x^3-2\sin x^2}{x}.$$

例 2 求 $I=\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}dx \quad (0<a<b)$.

解 因为

$$\int_a^b x^y dy=\left[\frac{x^y}{\ln x}\right]_a^b=\frac{x^b-x^a}{\ln x},$$

所以

$$I=\int_0^1 dx\int_a^b x^y dy.$$

这里函数 $f(x, y)=x^y$ 在矩形 $R(0\leqslant x\leqslant 1,\ 0<a\leqslant y\leqslant b)$ 上连续, 根据定理 2, 可交换积分次序, 由此有

$$I=\int_a^b dy\int_0^1 x^y dx=\int_a^b\left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_0^1 dy$$

$$=\int_a^b \frac{1}{y+1}dy=\ln\frac{b+1}{a+1}.$$

例 3 计算定积分 $I=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$.

解 考虑含参变量 α 的积分所确定的函数

$$\varphi(\alpha)=\int_0^1 \frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}dx.$$

显然, $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=I$. 根据公式(4)得

$$\varphi'(\alpha)=\int_0^1 \frac{x}{(1+\alpha x)(1+x^2)}dx.$$

把被积函数分解为部分分式, 得到

$$\frac{x}{(1+\alpha x)(1+x^2)}=\frac{1}{1+\alpha^2}\left[\frac{-\alpha}{1+\alpha x}+\frac{x}{1+x^2}+\frac{\alpha}{1+x^2}\right].$$

于是

$$\varphi'(\alpha)=\frac{1}{1+\alpha^2}\left[\int_0^1\frac{-\alpha dx}{1+\alpha x}+\int_0^1\frac{x dx}{1+x^2}+\int_0^1\frac{\alpha dx}{1+x^2}\right]$$

$$=\frac{1}{1+\alpha^2}\left[-\ln(1+\alpha)+\frac{1}{2}\ln 2+\alpha\cdot\frac{\pi}{4}\right],$$

上式在[0, 1]上对 α 积分, 得到

$$\varphi(1)-\varphi(0)=-\int_0^1\frac{\ln(1+\alpha)}{1+\alpha^2}d\alpha$$

$$+\frac{1}{2}\ln 2\int_0^1\frac{d\alpha}{1+\alpha^2}+\frac{\pi}{4}\int_0^1\frac{\alpha}{1+\alpha^2}d\alpha,$$

即 $$I=-I+\frac{\ln 2}{2}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\ln 2}{2}=-I+\frac{\pi}{4}\ln 2.$$

从而 $$I=\frac{\pi}{8}\ln 2.$$

*习 题 9-6

1．求下列含参变量的积分所确定的函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\int_x^{1+x}\frac{dy}{1+x^2+y^2}$； (2) $\lim\limits_{x\to 0}\int_{-1}^1\sqrt{x^2+y^2}\,dy$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^2 y^2\cos(xy)dy$.

2．求下列函数的导数：

(1) $\varphi(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}(y^2\sin x-y^3)dy$； (2) $\varphi(x)=\int_0^x\frac{\ln(1+xy)}{y}dy$；

(3) $\varphi(x)=\int_{x^2}^{x^3}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}dy$； (4) $\varphi(x)=\int_x^{x^2}e^{-xy^2}dy$.

3．设 $F(x)=\int_0^x(x+y)f(y)dy$，其中 $f(x)$为可微分的函数，求$F''(x)$.

4．应用对参数的微分法，计算下列积分：

(1) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\cdot\frac{dx}{\cos x}$ $(|a|<1)$；

(2) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos^2 x+a^2\sin^2 x)dx$ $(a>0)$.

[提示：设 $\varphi(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos^2 x+\alpha^2\sin^2 x)dx$，则有 $\varphi(1)=0$，$\varphi(a)=I$.]

5．计算下列积分：

(1) $\int_0^1\frac{\operatorname{arc\,tg}x}{x}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$；

[提示：利用公式 $\frac{\operatorname{arc\,tg}x}{x}=\int_0^1\frac{dy}{1+x^2y^2}$.]

(2) $\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$, $(0<a<b)$.

[提示：利用公式 $\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\int_a^b x^y dy$.]

第十章 曲线积分与曲面积分

讲重积分概念时，已经把积分概念从积分范围为数轴上一个区间的情形推广到积分范围为平面或空间内的一个区域的情形．由于实际需要，还有必要把积分概念推广到积分范围为一段曲线弧或一片曲面①的情形．这样推广后的积分称为曲线积分和曲面积分．本章将阐明有关这两种积分的一些基本内容．

第一节 曲线积分的概念与性质

一、对弧长的曲线积分的概念

曲线形构件的质量 在设计曲线形细长构件时，为了合理使用材料，应该根据构件各部分受力情况，把构件上各点处的截面大小设计得不完全一样．因此，可以认为这构件的线密度（单位长度的质量）是变量．假设这根构件所占的位置在 xOy 面内的一段曲线弧 L 上，它的端点是 A、B，在 L 上任一点 (x, y) 处，它的线密度为 $\rho(x, y)$．现在要计算这构件的质量 M（图 10-1）．

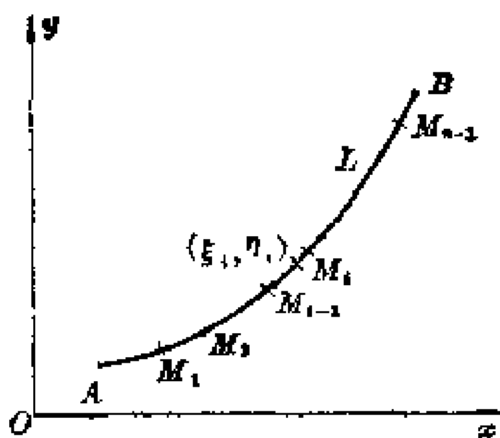


图 10-1

如果构件的线密度为常量，那末这根构件的质量就等于它的线密度与它的长度的乘积．现在构件上各点处的线密度是变量，就不能直接用上述方法来计算．为

① 本章讨论的都是具有有限长度的曲线和具有有限面积的曲面．

了克服这个困难，可以用 L 上的点 $M_1, M_2, \cdots, M_{n-1}$ 把 L 分成 n 个小段，取其中一小段构件 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 来分析．在线密度连续变化的前提下，只要这小段很短，就可以用这小段上任一点 (ξ_i, η_i) 处的线密度代替这小段上其它各点处的线密度，从而得到这小段构件的质量的近似值为

$$\rho(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i,$$

其中 Δs_i 表示 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 的长度．于是整个曲线形构件的质量为

$$M \approx \sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i.$$

用 λ 表示 n 个小弧段的最大长度．为了计算 M 的精确值，取上式右端之和当 $\lambda\to 0$ 时的极限，从而得到

$$M = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i.$$

这种和的极限在研究其它问题时也会遇到．现在引进下面的定义．

定义 1　设 L 为 xOy 面内的一条光滑曲线弧①，函数 $f(x, y)$ 在 L 上有界．用 L 上的点 $M_1, M_2, \cdots, M_{n-1}$ 把 L 分成 n 个小段．设第 i 个小段的长度为 Δs_i，又 (ξ_i, η_i) 为第 i 个小段上任意取定的一点 $(i=1, 2, \cdots, n)$．如果极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i$$

存在，这个极限值就叫做函数 $f(x, y)$ 在曲线弧 L 上对弧长的曲线积分，记作 $\int_L f(x, y)ds$，即

$$\int_L f(x, y)ds = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i,$$

其中 $f(x, y)$ **叫做被积函数，L 叫做积分弧段．**

① 所谓曲线弧是光滑的，就是说，这曲线弧上各点处都具有切线，且当切点连续移动时切线也连续转动。

在第二节中我们将看到，当 $f(x, y)$ 在光滑曲线弧 L 上连续时，对弧长的曲线积分 $\int_L f(x, y)ds$ 是存在的．以后我们总假定 $f(x, y)$ 在 L 上是连续的．

根据这个定义，前述曲线形构件的质量 M 当线密度 $\rho(x, y)$ 在 L 上连续时，就等于 $\rho(x, y)$ 对弧长的曲线积分，即

$$M=\int_L \rho(x, y)ds.$$

上述定义可以类似地推广到空间曲线 Γ 的情形，这样便得函数 $f(x, y, z)$ 在曲线弧 Γ 上对弧长的曲线积分：

$$\int_\Gamma f(x, y, z)ds=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta s_i.$$

如果 L(或 Γ) 是分段光滑的①，我们规定函数在 L (或 Γ) 上的曲线积分等于函数在光滑的各段上的曲线积分之和．例如，设 L 可分成两段光滑曲线弧 L_1 及 L_2 (记作 $L=L_1+L_2$)，就规定

$$\int_{L_1+L_2} f(x, y)ds=\int_{L_1} f(x, y)ds+\int_{L_2} f(x, y)ds.$$

如果 L 是闭曲线，那末函数 $f(x, y)$ 在闭曲线 L 上对弧长的曲线积分记为 $\oint_L f(x, y)ds$.

二、对坐标的曲线积分的概念

变力沿曲线所作的功 设一个质点在 xOy 面内从点 A 沿光滑曲线弧 L 移动到点 B．在移动过程中，这质点受到力

$$\boldsymbol{F}(x, y)=P(x, y)\boldsymbol{i}+Q(x, y)\boldsymbol{j}$$

的作用，其中函数 $P(x, y)$, $Q(x, y)$ 在 L 上连续．要计算在上述移动过程中变力 $\boldsymbol{F}(x, y)$ 所作的功(图 10–2)．

① 就是说，L (或 Γ) 可以分成有限段，而每一段都是光滑的．以后我们总假定 L(或 Γ) 是光滑的或分段光滑的．

我们知道，如果力 $\boldsymbol{F}$ 是常力，且质点从 A 沿直线移动到 B，那末常力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功 W 等于两个向量 $\boldsymbol{F}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 的数量积，即

$$W=\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{AB}.$$

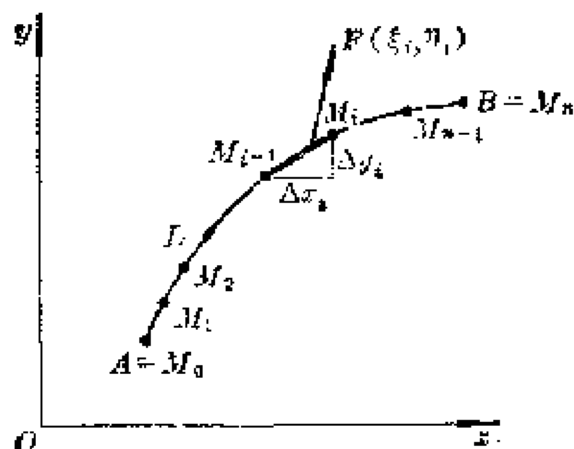


图 10-2

现在 $\boldsymbol{F}(x, y)$ 是变力，且质点沿曲线 L 移动，功 W 不能直接按以上公式计算. 但是前面用来处理构件质量问题的方法，原则上也可用于目前的问题.

先用曲线弧 L 上的点 $M_1(x_1, y_1)$，$M_2(x_2, y_2)$，…，$M_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1})$ 把 L 分成 n 个小弧段，取其中一个有向小弧段 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 来分析. 由于 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 光滑而且很短，可以用有向线段

$$\overrightarrow{M_{i-1}M_i}=(\Delta x_i)\boldsymbol{i}+(\Delta y_i)\boldsymbol{j}$$

来近似代替它，其中 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$、$\Delta y_i=y_i-y_{i-1}$. 又由于函数 $P(x, y)$、$Q(x, y)$ 在 L 上连续，可以用 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 上任意取定的一点 (ξ_i, η_i) 处的力

$$\boldsymbol{F}(\xi_i, \eta_i)=P(\xi_i, \eta_i)\boldsymbol{i}+Q(\xi_i, \eta_i)\boldsymbol{j}$$

来近似代替这小弧段上其它各点处的力. 这样，变力 $\boldsymbol{F}(x, y)$ 沿有向小弧段 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 所作的功 ΔW_i 就近似地等于常力 $\boldsymbol{F}(\xi_i, \eta_i)$ 沿 $\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$ 所作的功：

$$\Delta W_i\approx\boldsymbol{F}(\xi_i, \eta_i)\cdot\overrightarrow{M_{i-1}M_i},$$

即

$$\Delta W_i\approx P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i.$$

于是

$$W=\sum_{i=1}^{n}\Delta W_i\approx\sum_{i=1}^{n}\{P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i\}.$$

为了计算 W 的精确值，令 $\lambda\to 0$ 取上述和的极限，从而得到

$$W=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\{P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i\}.$$

这种和的极限在研究其它问题时也会遇到，现在引进下面的定义.

定义 2 设 L 为 xOy 面内从点 A 到点 B 的一条有向光滑曲线弧，函数 $P(x, y)$、$Q(x, y)$ 在 L 上有界. 用 L 上的点 $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $\cdots$, $M_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1})$ 把 L 分成 n 个有向小弧段

$$\widehat{M_{i-1}M_i} \quad (i=1, 2, \cdots, n; \ M_0=A, \ M_n=B).$$

设 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $\Delta y_i=y_i-y_{i-1}$, 点 (ξ_i, η_i) 为 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 上任意取定的一点. 如果极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i$ 存在，这个极限值就叫做函数 $P(x, y)$ 在有向曲线弧 L 上**对坐标 x 的曲线积分**，记作 $\int_L P(x, y)dx$. 类似地，如果极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i$ 存在，这个极限值就叫做函数 $Q(x, y)$ 在有向曲线弧 L 上**对坐标 y 的曲线积分**，记作 $\int_L Q(x, y)dy$. 即

$$\int_L P(x, y)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i,$$

$$\int_L Q(x, y)dy=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i,$$

其中 $P(x, y)$、$Q(x, y)$ 叫做**被积函数**，L 叫做**积分弧段**.

在第二节中我们将看到，当 $P(x, y)$、$Q(x, y)$ 在有向光滑曲线弧 L 上连续时，对坐标的曲线积分 $\int_L P(x,y)dx$ 及 $\int_L Q(x, y)dy$ 都存在. 以后我们总假定 $P(x, y)$、$Q(x, y)$ 在 L 上连续.

上述定义可以类似地推广到空间有向曲线弧 Γ 的情形：

$$\int_\Gamma P(x, y, z)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i,$$

$$\int_\Gamma Q(x, y, z)dy=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta y_i,$$

$$\int_\Gamma R(x, y, z)\,dz=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta z_i.$$

应用上经常出现的是

$$\int_L P(x, y)\,dx+\int_L Q(x, y)\,dy$$

这种合并起来的形式，为简便起见，把上式写成

$$\int_L P(x, y)dx+Q(x, y)dy.$$

例如，本目开始时讨论过的功可以表达成

$$W=\int_L P(x, y)dx+Q(x, y)dy.$$

类似地，把

$$\int_\Gamma P(x, y, z)dx+\int_\Gamma Q(x, y, z)dy+\int_\Gamma R(x, y, z)dz$$

简写成

$$\int_\Gamma P(x, y, z)dx+Q(x, y, z)dy+R(x, y, z)dz.$$

如果 L (或 Γ) 是分段光滑的，我们规定函数在有向曲线弧 L (或 Γ)上对坐标的曲线积分等于在光滑的各段上对坐标的曲线积分之和。

三、曲线积分的性质

根据曲线积分的定义，可以导出曲线积分的一些性质．例如

(1) **如果把 L 分成 L_1 和 L_2，则**

$$\int_L P\,dx+Q\,dy=\int_{L_1} P\,dx+Q\,dy+\int_{L_2} P\,dx+Q\,dy. \qquad (1)$$

公式 (1) 可以推广到 L 由 L_1, L_2, $\cdots$, L_k 组成的情形．关于对弧长的曲线积分也有同样的性质，这就是：如果 L 由几部分组成，则在 L 上的曲线积分等于在各部分上的曲线积分之和。

(2) 设 L 是有向曲线弧，$-L$ 是与 L 方向相反的有向曲线弧，则

$$\int_{-L} P(x, y)dx = -\int_L P(x, y)dx,$$

$$\int_{-L} Q(x, y)dy = -\int_L Q(x, y)dy. \tag{2}$$

证 把 L 分成 n 小段，相应地 $-L$ 也分成 n 小段. 对于每一个小弧段来说，当曲线弧的方向改变时，有向弧段在坐标轴上的投影的绝对值不变但要改变符号，因此(2)式成立.

(2)式表示，当积分弧段的方向改变时，对坐标的曲线积分要改变符号. 因此关于对坐标的曲线积分，我们必须注意积分弧段的方向.

习 题 10-1

1．设在 xOy 面内有一分布着质量的曲线 L，在点 (x, y) 处它的线密度为 $\rho(x, y)$. 用对弧长的曲线积分分别表达：

(1) 这曲线对 x 轴、对 y 轴以及对原点 O 的转动惯量 I_x、I_y、I_O；

(2) 这曲线的重心坐标 $\bar{x}$、$\bar{y}$.

2．利用曲线积分定义证明：

(1) 如果曲线 L 分为两段光滑曲线弧 L_1 和 L_2，则

$$\int_L f(x, y)ds = \int_{L_1} f(x, y)ds + \int_{L_2} f(x, y)ds;$$

(2) 如果 L 是有向曲线弧，则

$$\int_{-L} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = -\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

3．设 L 为 xOy 面内直线 $x=a$ 上的一段，证明：

$$\int_L P(x, y)dx = 0.$$

4．设 L 为 xOy 面内 x 轴上从点 $(a, 0)$ 到点 $(b, 0)$ 的一段直线，证明：

$$\int_L P(x, y)\,dx = \int_a^b P(x, 0)dx.$$

5. 对下列曲线积分给与物理意义：

(1) $\int_L (x^2+y^2)ds$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$；

(2) $\int_L (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$，其中 L 是在抛物线 $y=x^2$ 上从点 $(0, 0)$ 到点 $(1, 1)$ 的一段弧。

第二节　曲线积分的计算法

一、对弧长的曲线积分的计算法

设曲线 L 由参数方程

$$x=\varphi(t), \qquad y=\psi(t) \quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

给出，其中函数 $\varphi(t)$、$\psi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上具有一阶连续导数（这样，曲线 L 是光滑的），又函数 $f(x, y)$ 在 L 上连续。

假定当参数 t 由 α 变至 β 时，L 上的点 $M(x, y)$ 依点 A 至点 B 的方向描出曲线 L. 在 L 上取一系列的点

$$A=M_0,\ M_1,\ M_2,\ \cdots,\ M_{n-1},\ M_n=B,$$

它们对应于一系列单调增加的参数值

$$\alpha=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=\beta.$$

根据对弧长的曲线积分的定义，有

$$\int_L f(x, y)\,ds=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i.$$

设点 (ξ_i, η_i) 对应于参数值 τ_i，即 $\xi_i=\varphi(\tau_i)$、$\eta_i=\psi(\tau_i)$，这里 $t_{i-1}\leqslant\tau_i\leqslant t_i$. 由于

$$\Delta s_i=\int_{t_{i-1}}^{t_i}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt,$$

应用积分中值定理，有

$$\Delta s_i=\sqrt{\varphi'^2(\tau_i')+\psi'^2(\tau_i')}\,\Delta t_i,$$

其中 $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$，$t_{i-1}\leqslant\tau_i'\leqslant t_i$. 于是

$$\int_L f(x, y)ds=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f[\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)]\sqrt{\varphi'^2(\tau_i')+\psi'^2(\tau_i')}\Delta t_i.$$

由于函数 $\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}$ 在闭区间 $[\alpha, \beta]$ 上连续，我们可以把上式中的 τ_i' 换成 τ_i①，从而

$$\int_L f(x, y)\,ds=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f[\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)]\sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\tau_i)}\Delta t_i.$$

上式右端的和的极限，就是函数 $f[\varphi(t), \psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上的定积分，由于这个函数在 $[\alpha, \beta]$ 上连续，所以这个定积分是存在的，因此上式左端的曲线积分 $\int_L f(x, y)\,ds$ 也存在，并且有

$$\int_L f(x, y)\,ds=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t), \psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt \quad (\alpha<\beta). \tag{1}$$

公式 (1) 表明，计算对弧长的曲线积分 $\int_L f(x, y)\,ds$ 时，只要把 x, y, ds 依次换为 $\varphi(t)$、$\psi(t)$、$\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$，然后从 α 到 β 作定积分就行了．这里必须注意，定积分的下限 α 一定要小于上限 β．这是因为，从上述推导中可以看出，由于小弧段的长度 Δs_i 总是正的，从而 $\Delta t_i>0$，所以定积分的下限 α 一定小于上限 β．

如果曲线 L 由方程

$$y=\psi(x) \quad (x_0\leqslant x\leqslant X)$$

给出，那末可以把这种情形看作是特殊的参数方程

$$x=t, \qquad y=\psi(t) \quad (x_0\leqslant t\leqslant X)$$

的情形，从而由公式(1)得出

$$\int_L f(x, y)\,ds=\int_{x_0}^{X} f[x, \psi(x)]\sqrt{1+\psi'^2(x)}\,dx \quad (x_0<X). \tag{2}$$

---

① 此事的证明要用到函数 $\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}$ 在闭区间 $[\alpha, \beta]$ 上的一致连续性，这里从略。

类似地，如果曲线 L 由方程

$$x=\varphi(y) \quad (y_0\leqslant y\leqslant Y)$$

给出，则有

$$\int_L f(x,\ y)ds=\int_{y_0}^{Y} f[\varphi(y),\ y]\sqrt{1+\varphi'^2(y)}dy \quad (y_0<Y). \qquad (3)$$

公式(1)可推广到空间曲线弧 Γ 由参数方程

$$x=\varphi(t), \qquad y=\psi(t), \qquad z=\omega(t) \quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

给出的情形，这样就有

$$\int_\Gamma f(x,\ y,\ z)ds$$

$$=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t),\ \omega(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}\,dt$$

$$(\alpha<\beta). \qquad (4)$$

例 1 计算 $\int_L \sqrt{y}\,ds$，其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上点 $O(0,\ 0)$ 与点 $B(1,\ 1)$ 之间的一段弧(图 10-3)。

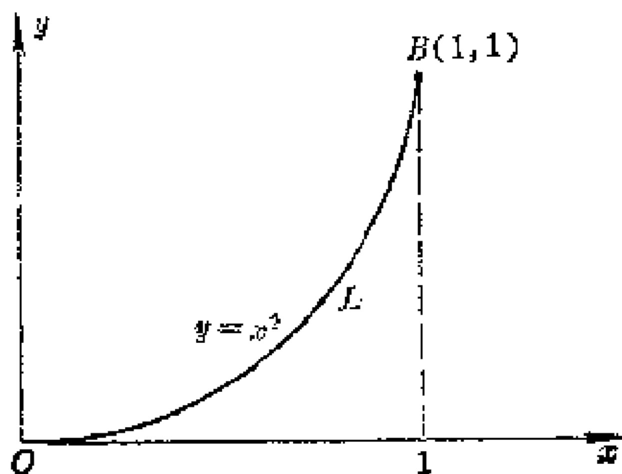


图 10-3

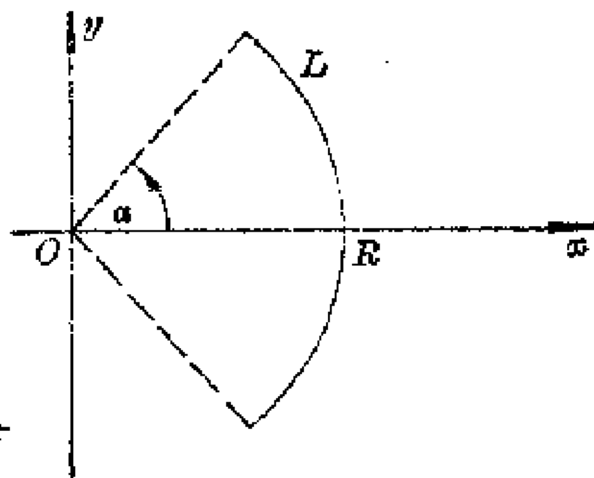


图 10-4

解 现在，L 由方程

$$y=x^2 \quad (0\leqslant x\leqslant 1)$$

给出，因此

$$\int_L \sqrt{y}\,ds=\int_0^1 \sqrt{x^2}\sqrt{1+(x^2)'^2}dx$$

$$=\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,dx=\left[\frac{1}{12}(1+4x^2)^{3/2}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1).$$

例 2 计算半径为 R、中心角为 2α 的圆弧 L 对于它的对称轴的转动惯量 I(设线密度 $\rho=1$).

解 取坐标系如图 10-4 所示，则

$$I=\int_L y^2\,ds.$$

为了便于计算，利用 L 的参数方程

$$x=R\cos\theta,\qquad y=R\sin\theta\quad(-\alpha\leqslant\theta\leqslant\alpha).$$

于是

$$I=\int_L y^2\,ds=\int_{-\alpha}^{\alpha}R^2\sin^2\theta\sqrt{(-R\sin\theta)^2+(R\cos\theta)^2}\,d\theta$$

$$=R^3\int_{-\alpha}^{\alpha}\sin^2\theta\,d\theta=\frac{R^3}{2}\left[\theta-\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{-\alpha}^{\alpha}$$

$$=\frac{R^3}{2}(2\alpha-\sin 2\alpha)=R^3(\alpha-\sin\alpha\cos\alpha).$$

例 3 计算曲线积分 $\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\,ds$，其中 Γ 为螺旋线 $x=a\cos t$、$y=a\sin t$、$z=kt$ 上相应于 t 从 0 到 2π 的一段弧.

解 $\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\,ds$

$$=\int_0^{2\pi}\left[(a\cos t)^2+(a\sin t)^2+(kt)^2\right]\cdot\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+k^2}\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}(a^2+k^2t^2)\sqrt{a^2+k^2}\,dt$$

$$=\sqrt{a^2+k^2}\left[a^2t+\frac{k^2}{3}t^3\right]_0^{2\pi}$$

$$=\frac{2}{3}\pi\sqrt{a^2+k^2}\,(3a^2+4\pi^2k^2).$$

二、对坐标的曲线积分的计算法

设曲线 L 由参数方程

$$x=\varphi(t), \qquad y=\psi(t)$$

给出，L 的起点 A 及终点 B 分别对应于参数值 α 及 β（这里 α 不一定小于 β），函数 $\varphi(t)$、$\psi(t)$ 在以 α 及 β 为端点的闭区间上具有一阶连续导数，当参数 t 由 α 变到 β 时，点 $M(x, y)$ 描出有向曲线 L；又函数 $P(x, y)$、$Q(x, y)$ 在 L 上连续。

在 L 上取一系列的点

$$A=M_0,\ M_1,\ M_2,\ \cdots,\ M_{n-1},\ M_n=B,$$

它们对应于单调变化的参数值

$$\alpha=t_0,\ t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_{n-1},\ t_n=\beta.$$

根据对坐标的曲线积分的定义，有

$$\int_L P(x, y)dx=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i.$$

设点 (ξ_i, η_i) 对应于参数值 τ_i，即 $\xi_i=\varphi(\tau_i)$，$\eta_i=\psi(\tau_i)$，这里 τ_i 在 t_{i-1} 与 t_i 之间。由于

$$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}=\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1}),$$

应用微分中值定理，有

$$\Delta x_i=\varphi'(\tau_i')\Delta t_i,$$

其中 $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$，τ_i' 在 t_{i-1} 与 t_i 之间。于是

$$\int_L P(x, y)\,dx=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n} P[\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)]\varphi'(\tau_i')\Delta t_i.$$

因为函数 $\varphi'(t)$ 在闭区间 $[\alpha, \beta]$（或 $[\beta, \alpha]$）上连续，我们可以把上式中的 τ_i' 换成 τ_i①，从而

$$\int_L P(x, y)\,dx=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n} P[\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)]\varphi'(\tau_i)\Delta t_i.$$

---

① 此事的证明用到函数 $\varphi'(t)$ 的一致连续性，这里从略。

上式右端的和的极限就是定积分 $\int_\alpha^\beta P[\varphi(t),\ \psi(t)]\varphi'(t)\,dt$，由于 $P[\varphi(t),\ \psi(t)]\varphi'(t)$ 连续，这个定积分是存在的，因此上式左端的曲线积分 $\int_L P(x,\ y)dx$ 也存在，并且有

$$\int_L P(x,\ y)\,dx=\int_\alpha^\beta P[\varphi(t),\ \psi(t)]\varphi'(t)dt.$$

同理可证

$$\int_L Q(x,\ y)\,dy=\int_\alpha^\beta Q[\varphi(t),\ \psi(t)]\psi'(t)dt.$$

把以上两式相加，得

$$\int_L P(x,\ y)dx+Q(x,\ y)dy$$

$$=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\ \psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\ \psi(t)]\psi'(t)\}dt,\qquad(5)$$

这里下限 α 对应于 L 的起点，上限 β 对应于 L 的终点.

公式(5)表明，计算对坐标的曲线积分

$$\int_L P(x,\ y)dx+Q(x,\ y)dy$$

时，只要把 x、y、dx、dy 依次换为 $\varphi(t)$、$\psi(t)$、$\varphi'(t)dt$、$\psi'(t)dt$，然后从 L 的起点所对应的参数值 α 到 L 的终点所对应的参数值 β 作定积分就行了. 这里必须注意，下限 α 对应于 L 的起点，上限 β 对应于 L 的终点，α 不一定小于 β.

如果 L 由方程 $y=\psi(x)$ 或 $x=\varphi(y)$ 给出，可以看作参数方程的特殊情形，例如，当 L 由 $y=\psi(x)$ 给出时，公式(5)成为

$$\int_L P(x,\ y)dx+Q(x,\ y)dy$$

$$=\int_a^b\{P[x,\ \psi(x)]+Q[x,\ \psi(x)]\psi'(x)\}dx,$$

这里下限 a 对应于 L 的起点，上限 b 对应于 L 的终点.

公式(5)可推广到空间曲线 Γ 由参数方程

$$x=\varphi(t), \qquad y=\psi(t), \qquad z=\omega(t)$$

给出的情形，这样便得到

$$\int_\Gamma P(x, y, z)dx+Q(x, y, z)dy+R(x, y, z)dz$$

$$=\int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t), \psi(t), \omega(t)]\varphi'(t)$$

$$+Q[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\psi'(t)+R[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\omega'(t)\}dt,$$

这里下限 α 对应于 Γ 的起点，上限 β 对应于 Γ 的终点.

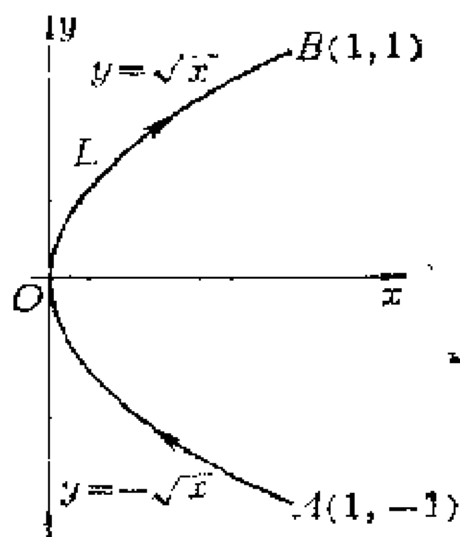


图 10-5

例 4 计算 $\int_L xy\,dx$，其中 L 为抛物线 $y^2=x$ 上从点 $A(1, -1)$ 到点 $B(1,1)$ 的一段弧(图 10-5).

解 第一种方法：将所给积分化为对 x 的定积分来计算. 由于 $y=\pm\sqrt{x}$ 不是单值函数，所以要把 L 分为 AO 和 OB 两部分. 在 AO 上，$y=-\sqrt{x}$，x 从 1 变到 0；在 OB 上，$y=\sqrt{x}$，x 从 0 变到 1. 因此

$$\int_L xy\,dx=\int_{AO} xy\,dx+\int_{OB} xy\,dx$$

$$=\int_1^0 x(-\sqrt{x})dx+\int_0^1 x\sqrt{x}\,dx$$

$$=2\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{4}{5}.$$

第二种方法：将所给积分化为对 y 的定积分来计算. 现在 $x=y^2$，y 从 -1 变到 1. 因此

$$\int_L xy\,dx=\int_{-1}^1 y^2y(y^2)'dy=2\int_{-1}^1 y^4\,dy=2\left[\frac{y^5}{5}\right]_{-1}^1=\frac{4}{5}.$$

例 5 计算 $\int_L y^2 dx$, 其中 L 为(图 10-6):

(1) 半径为 a、圆心为原点、按逆时针方向绕行的上半圆周;

(2) 从点 $A(a, 0)$ 沿 x 轴到点 $B(-a, 0)$ 的直线段.

解 (1) L 是参数方程

$$x = a\cos\theta, \qquad y = a\sin\theta$$

当参数 θ 从 0 变到 π 的曲线弧. 因此

$$\int_L y^2 dx = \int_0^{\pi} a^2 \sin^2\theta(-a\sin\theta)d\theta$$

$$= a^3\int_0^{\pi}(1-\cos^2\theta)d(\cos\theta)$$

$$= a^3\left[\cos\theta - \frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi} = -\frac{4}{3}a^3.$$

(2) 现在, L 的方程为 $y=0$, x 从 a 变到 $-a$. 所以

$$\int_L y^2 dx = \int_a^{-a} 0\,dx = 0.$$

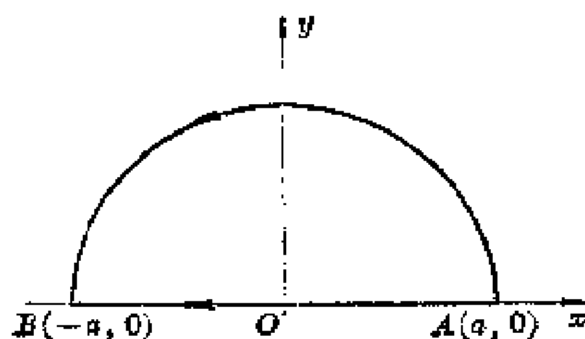


图 10-6

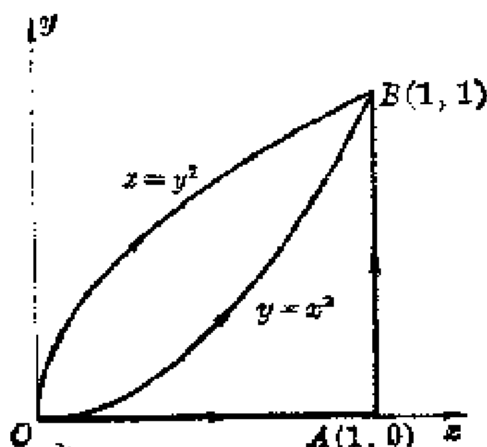


图 10-7

从例 5 看出,虽然两个曲线积分的被积函数相同,起点和终点也相同,但沿不同路径得出的值并不相等.

例 6 计算 $\int_L 2xy\,dx + x^2 dy$, 其中 L 为(图 10-7):

(1) 抛物线 $y=x^2$ 上从 $O(0, 0)$ 到 $B(1, 1)$ 的一段弧;

(2) 抛物线 $x=y^2$ 上从 $O(0, 0)$ 到 $B(1, 1)$ 的一段弧；

(3) 有向折线 OAB，这里 O，A，B 依次是点 $(0, 0)$，$(1, 0)$，$(1, 1)$。

解 (1) 化为对 x 的定积分。L：$y=x^2$，x 从 0 变到 1，所以

$$\int_L 2xy\,dx+x^2\,dy=\int_0^1 (2x\cdot x^2+x^2\cdot 2x)\,dx=4\int_0^1 x^3\,dx=1.$$

(2) 化为对 y 的定积分。L：$x=y^2$，y 从 0 变到 1，所以

$$\int_L 2xy\,dx+x^2\,dy=\int_0^1 (2y^2\cdot y\cdot 2y+y^4)\,dy=5\int_0^1 y^4\,dy=1.$$

(3) $$\int_L 2xy\,dx+x^2\,dy=\int_{OA} 2xy\,dx+x^2\,dy+\int_{AB} 2xy\,dx+x^2\,dy,$$

在 OA 上，$y=0$，x 从 0 变到 1，所以

$$\int_{OA} 2xy\,dx+x^2\,dy=\int_0^1 (2x\cdot 0+x^2\cdot 0)dx=0.$$

在 AB 上，$x=1$，y 从 0 变到 1，所以

$$\int_{AB} 2xy\,dx+x^2\,dy=\int_0^1 (2y\cdot 0+1)dy=1.$$

从而 $$\int_L 2xy\,dx+x^2\,dy=0+1=1.$$

从例 6 可以看出，虽然沿不同路径，曲线积分的值可以相等。

例 7 计算 $\int_\Gamma x^3\,dx+3zy^2\,dy-x^2y\,dz$，其中 Γ 是从点 $A(3, 2, 1)$ 到点 $B(0, 0, 0)$ 的直线段 AB。

解 直线段 AB 的方程是

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1};$$

化为参数方程得

$$x=3t,\ y=2t,\ z=t,\ t \text{ 从 1 变到 0. 所以}$$

$$\int_\Gamma x^3dx+3zy^2dy-x^2ydz$$
$$=\int_1^0\{(3t)^3\cdot 3+3t(2t)^2\cdot 2-(3t)^2\cdot 2t\}dt$$
$$=87\int_1^0 t^3dt=-\frac{87}{4}.$$

例 8 设有一质量为 m 的质点受重力作用在铅直平面上沿某一曲线弧从点 A 移动到点 B，求重力所作的功.

解 取水平直线为 x 轴，y 轴铅直向上(图 10-8)，则重力在两坐标轴上的投影分别为

$$P(x,y)=0,\ Q(x,y)=-mg,$$

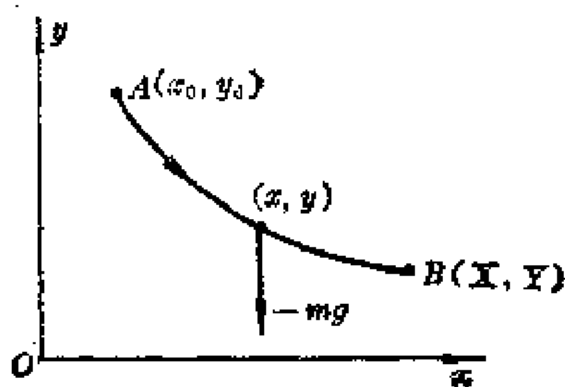


图 10-8

这里 g 是重力加速度. 于是，当质点从 $A(x_0,\ y_0)$ 移动到点 $B(X,\ Y)$ 时，重力所作的功为

$$W=\int_{AB}Pdx+Qdy=\int_{AB}(-mg)dy$$
$$=-\int_{y_0}^{Y}mgdy=-mg(Y-y_0)=mg(y_0-Y).$$

这结果表明，这里重力所作的功与路径无关，而且仅取决于下降的距离.

三、两类曲线积分之间的联系

设有向曲线 L 的起点为 A，终点为 B. 取弧长 $\overset{\frown}{AM}=s$ 为曲线 L 的参数(图 10-9)，曲线 L 的全长 $\overset{\frown}{AB}=l$.

设曲线 L 由参数方程

$$x=x(s),\qquad y=y(s)\quad (0\leqslant s\leqslant l)$$

给出，函数 $x(s)$、$y(s)$ 在 $[0,l]$ 上具有一阶连续导数，又函数 $P(x,y)$、$Q(x,\ y)$ 在 L 上连续. 于是，由对坐标的曲线积分计算公式(5)有

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$
$$=\int_0^l\left\{P[x(s),\ y(s)]\frac{dx}{ds}+Q[x(s),\ y(s)]\frac{dy}{ds}\right\}ds$$
$$=\int_0^l\{P[x(s),\ y(s)]\cos\alpha+Q[x(s),\ y(s)]\cos\beta\}ds,$$

其中 $\cos\alpha=\frac{dx}{ds}$, $\cos\beta=\frac{dy}{ds}$ 是曲线 L 的切线向量的方向余弦，这切线向量的指向与有向曲线 L 的方向相应.

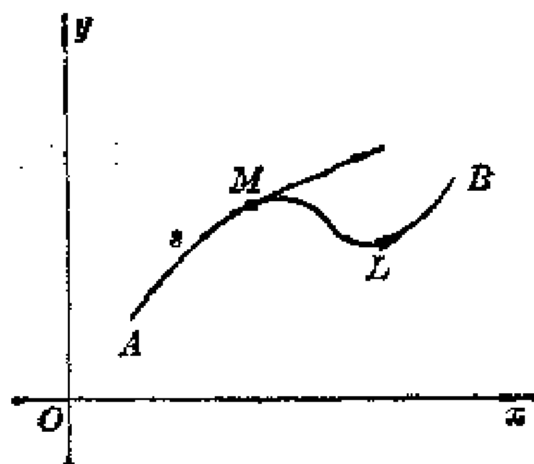


图 10-9

另一方面，由对弧长的曲线积分的计算公式(1)可得

$$\int_L[P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta]ds$$
$$=\int_0^l\{P[x(s),\ y(s)]\cos\alpha+Q[x(s),\ y(s)]\cos\beta\}ds.$$

由此可见，平面曲线 L 上的两类曲线积分之间有如下联系：

$$\int_L P\,dx+Q\,dy=\int_L(P\cos\alpha+Q\cos\beta)ds,$$

其中 $\alpha(x,y)$、$\beta(x,y)$ 为 L 上点 (x,y) 处的切线向量的方向角.

类似地可知，空间曲线 Γ 上的两类曲线积分之间有如下联系：

$$\int_\Gamma P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\int_\Gamma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds,$$

其中 $\alpha(x,y,z)$、$\beta(x,y,z)$、$\gamma(x,y,z)$ 为 Γ 上点 (x,y,z) 处的切线向量的方向角.

习　题　10-2

1．计算下列对弧长的曲线积分：

(1) $\oint_L (x^2+y^2)^n ds$，其中 L 为圆周 $x=a\cos t,\ y=a\sin t\quad(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$；

(2) $\int_L (x+y)ds$，其中 L 为连接(1, 0)及(0, 1)两点的直线段；

(3) $\oint_L x ds$，其中 L 为由直线 $y=x$ 及抛物线 $y=x^2$ 所围成的区域的整个边界；

(4) $\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$，直线 $y=x$ 及 x 轴在第一象限内所围成的扇形的整个边界；

(5) $\int_\Gamma \frac{1}{x^2+y^2+z^2} ds$，其中 Γ 为曲线 $x=e^t\cos t,\ y=e^t\sin t,\ z=e^t$ 上相应于 t 从 0 变到 2 的这段弧；

(6) $\int_\Gamma x^2yz\,ds$，其中 Γ 为折线 $ABCD$，这里 A、B、C、D 依次为点(0, 0, 0)、(0, 0, 2)、(1, 0, 2)、(1, 3, 2)；

(7) $\int_L y^2 ds$，其中 L 为摆线的一拱 $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$；

(8) $\int_L (x^2+y^2)ds$，其中 L 为曲线 $x=a(\cos t+t\sin t),\ y=a(\sin t-t\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$；

(9) $\int_\Gamma z\,ds$，其中 Γ 为曲线 $x=t\cos t,\ y=t\sin t,\ z=t\quad(0\leqslant t\leqslant t_0)$；

(10) $\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=ax$。

2．计算下列对坐标的曲线积分：

(1) $\int_L (x^2-y^2)dx$，其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上从点(0, 0)到点(2, 4)的一段弧；

(2) $\oint_L xy\,dx$，其中 L 为圆周 $(x-a)^2+y^2=a^2\quad(a>0)$ 及 x 轴所围成的在第一象限内的区域的整个边界(按逆时针方向绕行)；

(3) $\int_L y\,dx+x\,dy$，其中 L 为圆周 $x=R\cos t,\ y=R\sin t$ 上由 $t_1=0$ 到 $t_2=\frac{\pi}{2}$ 的一段；

(4) $\oint_L \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$（按逆时针方向绕行）；

(5) $\int_\Gamma x^2dx+z\,dy-y\,dz$，其中 Γ 为曲线 $x=k\theta,\ y=a\cos\theta,\ z=a\sin\theta$ 上从 $\theta=0$ 到 $\theta=\pi$ 的一段弧；

(6) $\int_\Gamma x\,dx+y\,dy+(x+y-1)dz$，其中 Γ 是从点 $(1,\ 1,\ 1)$ 到点 $(2,\ 3,\ 4)$ 的一段直线；

(7) $\oint_\Gamma dx-dy+y\,dz$，其中 Γ 为有向闭折线 $ABCA$，这里的 A、B、C 依次为点 $(1,\ 0,\ 0)$、$(0,\ 1,\ 0)$、$(0,\ 0,\ 1)$；

(8) $\int_L (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$，其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上从点 $(-1,\ 1)$ 到点 $(1,\ 1)$ 的一段弧；

(9) $\int_L (2a-y)dx+x\,dy$，其中 L 为摆线 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ 上自 $t_1=0$ 到 $t_2=2\pi$ 的一段弧；

(10) $\int_\Gamma (y^2-z^2)dx+2yz\,dy-x^2dz$，其中 Γ 是曲线 $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$ 上由 $t_1=0$ 到 $t_2=1$ 的一段弧。

3．计算 $\int_L (x+y)dx+(y-x)dy$，其中 L 是：

(1) 抛物线 $y^2=x$ 上从点 $(1,\ 1)$ 到点 $(4,\ 2)$ 的一段弧；

(2) 从点 $(1,\ 1)$ 到点 $(4,\ 2)$ 的直线段；

(3) 先沿直线从点 $(1,\ 1)$ 到点 $(1,\ 2)$，然后再沿直线到点 $(4,\ 2)$ 的折线；

(4) 曲线 $x=2t^2+t+1,\ y=t^2+1$ 上从点 $(1,\ 1)$ 到点 $(4,\ 2)$ 的一段弧。

4．求半径为 a，中心角为 2φ 的均匀圆弧（线密度 $\rho=1$）的重心。

5．设螺旋形弹簧一圈的方程为 $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=kt$，其中 $0\leqslant t\leqslant 2\pi$，它的线密度 $\rho(x,\ y,\ z)=x^2+y^2+z^2$。求：

(1) 它关于 z 轴的转动惯量 I_z；

(2) 它的重心。

6．一力场由依横轴正方向的常力 $\boldsymbol{F}$ 所构成．试求当一质量为 m 的质点

沿圆周 $x^2+y^2=R^2$ 按逆时针方向移过位于第一象限的那一段弧时场力所作的功.

7. 设 z 轴与重力的方向一致，求质量为 m 的质点从位置 (x_1, y_1, z_1) 沿直线移到 (x_2, y_2, z_2) 时重力所作的功.

8. 把对坐标的曲线积分 $\int_L P(x, y)dx+Q(x, y)dy$ 化成对弧长的曲线积分，其中 L 为:

(1) 在 xOy 面内沿直线从点 $(0, 0)$ 到点 $(1, 1)$;

(2) 沿抛物线 $y=x^2$ 从点 $(0, 0)$ 到点 $(1, 1)$;

(3) 沿上半圆周 $x^2+y^2=2x$ 从点 $(0, 0)$ 到点 $(1, 1)$.

9. 设 Γ 为曲线 $x=t$、$y=t^2$、$z=t^3$ 上相应于 t 从 0 变到 1 的曲线弧. 把对坐标的曲线积分 $\int_\Gamma P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ 化成对弧长的曲线积分.

第三节 格林公式及其应用

一、格 林 公 式

在一元函数积分学中，牛顿-莱布尼兹公式

$$\int_a^b F'(x)dx=F(b)-F(a)$$

表示: $F'(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的积分可以通过它的原函数 $F(x)$ 在这个区间端点上的值来表达.

下面要介绍的格林公式告诉我们，在平面区域 D 上的二重积分可以通过沿区域 D 的边界曲线 L 上的曲线积分来表达. 我们规定区域 D 的边界曲线 L 的正向如下: 当观察者沿 L 的这个方向行走时，D 内在他近处的那一部分总在他的左边.

定理 1 设闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 围成，函数 $P(x,y)$ 及 $Q(x, y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数，则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\oint_L P\,dx+Q\,dy, \tag{1}$$

这里 L 是 D 的取正向的整个边界曲线. 公式(1)叫做格林(Green)公式.

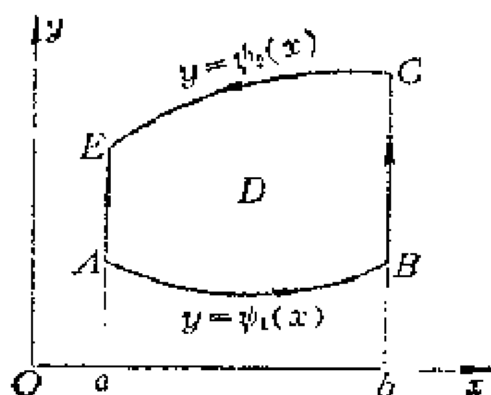


图 10-10

证 假定穿过区域 D 内部且平行于 y 轴的直线与 D 的边界曲线的交点恰好是两点, 例如区域 D 由曲线 $y=\psi_1(x)$, $y=\psi_2(x)$ ($\psi_1(x)\leqslant\psi_2(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$) 及直线 $x=a$, $x=b$ 围成(图 10-10). 于是, 根据二重积分计算法, 有

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy=\int_a^b\left\{\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)}\frac{\partial P(x,\ y)}{\partial y}\,dy\right\}dx$$

$$=\int_a^b\{P[x,\ \psi_2(x)]-P[x,\ \psi_1(x)]\}dx.$$

另一方面, 由曲线积分性质及计算法得

$$\oint_L P\,dx=\int_{AB}P\,dx+\int_{BC}P\,dx+\int_{CE}P\,dx+\int_{EA}P\,dx$$

$$=\int_a^b P[x,\ \psi_1(x)]dx+0+\int_b^a P[x,\ \psi_2(x)]dx+0$$

$$=\int_a^b P[x,\ \psi_1(x)]dx-\int_a^b P[x,\ \psi_2(x)]dx$$

$$=\int_a^b\{P[x,\ \psi_1(x)]-P[x,\psi_2(x)]\}dx.$$

因此
$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy=\oint_L P\,dx.$$

如果穿过区域 D 内部且平行于 x 轴的直线与 D 的边界曲线的交点恰好是两点, 那末类似地可证

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy=\oint_L Q\,dy.$$

如果区域 D 的边界曲线与穿过 D 内部且平行于坐标轴(x 轴

或 y 轴)的任何直线的交点都恰好是两点，那末以上两式同时成立，合并后即得公式(1). 如果 D 不满足以上条件，那末可以在 D 内引进一条或几条辅助曲线把 D 分成有限个部分区域，使得每个部分区域都满足上述条件. 例如就图 10-11 来说，引进一条辅助线把 D 分成 D_1 和 D_2 两个部分区域，应用公式(1)于这两个部分区域 D_1 和 D_2，得到两个等式：

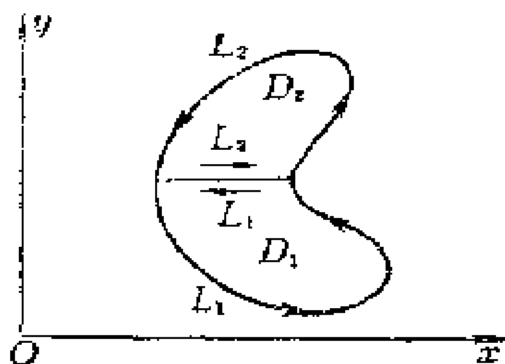


图 10-11

$$\iint\limits_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\oint_{L_1}P\,dx+Q\,dy,$$

$$\iint\limits_{D_2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\oint_{L_2}P\,dx+Q\,dy,$$

把这两个等式相加，注意到相加时沿辅助线的曲线积分相互抵消，便得

$$\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\oint_{L}P\,dx+Q\,dy,$$

这就证明了公式(1)对于图 10-11 中区域 D 也是成立的.

下面说明格林公式的一个简单应用.

在公式(1)中取 $P=-y$, $Q=x$, 即得

$$2\iint\limits_{D}dx\,dy=\oint_{L}x\,dy-y\,dx.$$

上式左端是区域 D 的面积 A 的两倍，因此有

$$A=\frac{1}{2}\oint_{L}x\,dy-y\,dx. \tag{2}$$

例 1 求椭圆 $x=a\cos\theta$, $y=b\sin\theta$ 所围成图形的面积 A.

解 根据公式(2)有

$$A=\frac{1}{2}\oint_L x\,dy-y\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(ab\cos^2\theta+ab\sin^2\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}d\theta=\pi ab.$$

例2 设 L 是任意一条闭曲线，证明 $\oint_L 2xy\,dx+x^2dy=0$.

证 令 $P=2xy,\ Q=x^2$,

则
$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2x-2x=0.$$

因此，由公式(1)有

$$\oint_L 2xy\,dx+x^2dy=\iint_D 0\,dx\,dy=0.$$

二、平面上曲线积分与路径无关的条件

第二节例8表明，重力所作的功与路径无关．在物理、力学中要研究所谓势力场，就是要研究场力所作的功与路径无关的情形．在什么条件下场力所作的功与路径无关？这个问题在数学上就是要研究曲线积分与路径无关的条件．为了研究这问题，先要明确什么叫做曲线积分 $\int_L P\,dx+Q\,dy$ 与路径无关．

设 G 是一个开区域，函数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在区域 G 内具有一阶连续偏导数．如果对于 G 内任意指定的两个点 A、B 以及 G 内从点 A 到点 B 的任意两条曲线 L_1, L_2(图 10-12)，等式

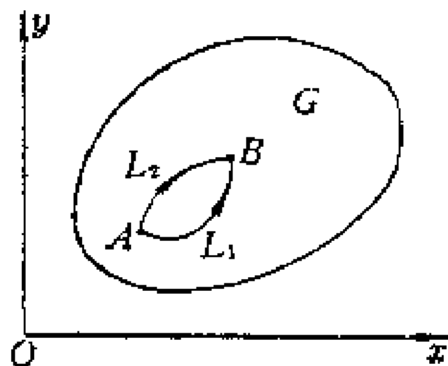


图 10-12

$$\int_{L_1}P\,dx+Q\,dy=\int_{L_2}P\,dx+Q\,dy$$

恒成立，就说曲线积分 $\int_L P\,dx+Q\,dy$ 在 G 内与路径无关，否则便说与路径有关．

在以上叙述中注意到，如果曲线积

分与路径无关，那末

$$\int_{L_1} P\,dx+Q\,dy=\int_{L_2} P\,dx+Q\,dy$$

(图 10-12). 由于

$$\int_{L_2} P\,dx+Q\,dy=-\int_{-L_2} P\,dx+Q\,dy,$$

所以
$$\int_{L_1} P\,dx+Q\,dy+\int_{-L_2} P\,dx+Q\,dy=0,$$

从而
$$\oint_{L_1+(-L_2)} P\,dx+Q\,dy=0,$$

这里 $L_1+(-L_2)$ 是一条有向闭曲线. 因此，在区域 G 内由曲线积分与路径无关可推得在 G 内沿闭曲线的曲线积分为零. 反过来，如果在区域 G 内沿任意闭曲线的曲线积分为零，也可推得在 G 内曲线积分与路径无关. 由此得出结论：曲线积分 $\int_L P\,dx+Q\,dy$ 在 G 内与路径无关相当于沿 G 内任意闭曲线 C 的曲线积分 $\oint_C P\,dx+Q\,dy$ 等于零.

定理 2 设开区域 G 是一个单连通域①，函数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在 G 内具有一阶连续偏导数，则曲线积分 $\int_L P\,dx+Q\,dy$ 在 G 内与路径无关（或沿 G 内任意闭曲线的曲线积分为零）的充要条件是等式

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \tag{3}$$

在 G 内恒成立.

证 先证这条件是充分的. 在 G 内任取一条闭曲线 C，要证当条件 (3) 成立时有 $\oint_C P\,dx+Q\,dy=0$. 因为 G 是单连通的，所以

---

① 如果开区域 G 内的任意一条闭曲线所围成的区域完全属于 G，就说 G 是单连通域. 形象化地说，单连通域是没有"空洞"的区域.

闭曲线 C 所围成的区域 D 全部在 G 内，于是 (3) 式在 D 上恒成立。应用格林公式，有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy=\oint_C P\, dx+Q\, dy.$$

上式左端的二重积分等于零（因为被积函数 $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$ 在 D 上恒为零），从而右端的曲线积分也等于零。

再证条件(3)是必要的。现在要证的是：如果沿 G 内任意闭曲线的曲线积分为零，那末(3)式在 G 内恒成立。用反证法来证。假设上述论断不成立，那末 G 内至少有一点 M_0 使

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{M_0}\neq 0.$$

不妨假定
$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{M_0}=\eta>0.$$

由于 $\frac{\partial P}{\partial y}$、$\frac{\partial Q}{\partial x}$ 在 G 内连续，可以在 G 内取得一个以 M_0 为圆心、半径足够小的圆形闭区域 K，使得在 K 上恒有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\geqslant\frac{\eta}{2}.$$

于是由格林公式及二重积分的性质就有

$$\oint_\gamma P\, dx+Q\, dy=\iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy\geqslant\frac{\eta}{2}\cdot\sigma,$$

这里 γ 是 K 的正向边界曲线，σ 是 K 的面积。因为 $\eta>0$, $\sigma>0$. 从而

$$\oint_\gamma P\, dx+Q\, dy>0.$$

这结果与沿 G 内任意闭曲线的曲线积分为零的假定相矛盾，可见 G 内使(3)式不成立的点不可能存在，即(3)式在 G 内处处成立。

证毕.

在第一目例 2 中我们看到，对于任意一条闭曲线 L，曲线积分

$\oint_L 2xy\,dx+x^2\,dy$ 等于零. 由定理2来看，这不是偶然的，因为这里 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=2x$ 在整个 xOy 面内恒成立，而整个 xOy 面是单连通域. 因此沿任意闭曲线 L 有 $\oint_L P\,dx+Q\,dy=0$.

定理中关于区域 G 是单连通域这个条件也很重要. 例如，

$$P=-\frac{y}{x^2+y^2},\ Q=\frac{x}{x^2+y^2},$$

则
$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\quad (x^2+y^2\neq 0).$$

设 L 为圆周 $x=\cos t,\ y=\sin t\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$，取逆时针方向，则

$$\oint_L P\,dx+Q\,dy=\oint_L \frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}(\sin^2 t+\cos^2 t)\,dt=2\pi,$$

这里积分不等于零的原因是因为 $P,\ Q,\ \frac{\partial P}{\partial y},\ \frac{\partial Q}{\partial x}$ 在原点处不连续，因而在任何包含圆周 L 的单连通域内，不满足定理的条件. 虽然，这个圆周 L 也可以包含在某个区域内部，例如包含在环形区域 $\frac{1}{4}<x^2+y^2<4$ 内部，而 $P,\ Q$ 在此环形区域内部具有一阶连续偏导数且 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ 恒成立. 但这环形区域不是单连通域，因此不能保证曲线积分 $\oint_L P\,dx+Q\,dy=0$ 成立.

三、二元函数的全微分求积

现在要讨论：函数 $P(x,y)$、$Q(x,y)$ 满足什么条件时，表达式 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 才是某个二元函数 $u(x,y)$ 的全微分；当这样的二元函数存在时把它求出来.

定理3 设开区域 G 是一个单连通域，函数 $P(x,y)$、$Q(x,y)$ 在 G 内具有一阶连续偏导数，则 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 在 G 内为某一函数 $u(x,y)$ 的全微分的充要条件是等式

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \tag{3}$$

在 G 内恒成立.

证　先证必要性. 假设存在着某一函数 $u(x, y)$,使得

$$du=P(x, y)dx+Q(x, y)dy,$$

则必有
$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}=Q(x, y).$$

从而
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

由于 P、Q 具有一阶连续偏导数, 所以 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$、$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ 连续, 因此 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, 即 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. 这就证明了条件(3)是必要的.

再证充分性. 设已知条件(3)在 G 内恒成立, 则由定理 2 可知, 起点为 $M_0(x_0, y_0)$终点为 $M(x, y)$的曲线积分在区域 G 内与路径无关,把这个曲线积分写作

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx+Q(x, y)dy.$$

当起点 $M_0(x_0, y_0)$固定时,这个积分的值取决于终点 $M(x, y)$,因此,它是 x、y 的函数,把这函数记作 $u(x, y)$, 即

$$u(x, y)=\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx+Q(x, y)dy. \tag{4}$$

下面来证明这函数 $u(x, y)$的全微分就是 $P(x, y)dx+Q(x, y)dy$. 为此,要证明

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}=Q(x, y).$$

按偏导数的定义,有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x, y)-u(x, y)}{\Delta x}.$$

由(4)式,得

$$u(x+\Delta x,\ y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x+\Delta x,y)} P(x,\ y)dx+Q(x,\ y)dy.$$

由于这里的曲线积分与路径无关，可以取先从 M_0 到 M，然后沿平行于 x 轴的直线段从 M 到 N 作为上式右端曲线积分的路径（图 10–13）．这样就有

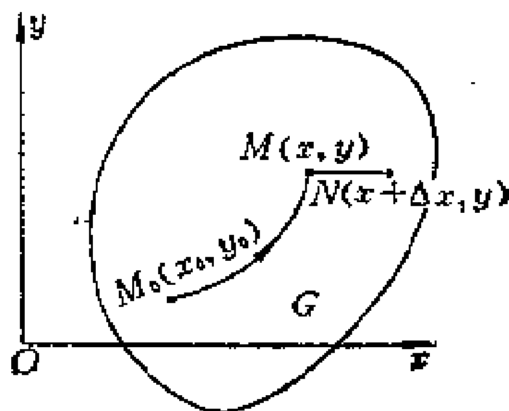


图 10–13

$$u(x+\Delta x,\ y)=u(x,\ y)+\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} P(x,y)dx+Q(x,\ y)dy.$$

从而

$$u(x+\Delta x,\ y)-u(x,\ y)=\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} P(x,\ y)dx+Q(x,\ y)dy.$$

因为在直线段 MN 上 $y=$ 常数，$dy=0$，所以上式成为

$$u(x+\Delta x,\ y)-u(x,\ y)=\int_x^{x+\Delta x} P(x,\ y)dx.$$

应用积分中值定理，得

$$u(x+\Delta x,\ y)-u(x,\ y)=P(x+\theta\Delta x,\ y)\Delta x,\quad (0\leqslant\theta\leqslant 1).$$

上式两边除以 Δx，并令 $\Delta x\to 0$ 取极限．由于 $P(x,\ y)$ 的偏导数在 G 内连续 $P(x,\ y)$本身也一定连续，于是得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,\ y).$$

同理可证

$$\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,\ y).$$

这就证明了条件(3)是充分的．

证毕．

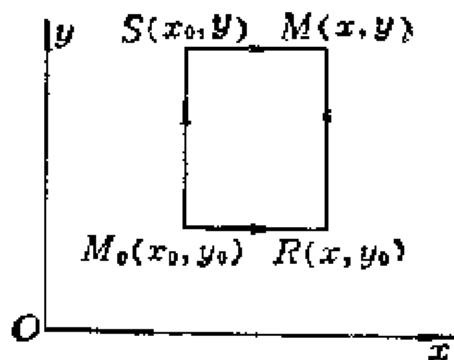


图 10–14

根据上述定理，如果函数 $P(x,y)$、$Q(x,\ y)$在单连通域 G 内具有一阶连续偏导数，且满足条件(3)，那末 $Pdx+Qdy$ 是某个函数的全微分，这函数可用公式(4)来求出．

因为公式(4)中的曲线积分与路径无关，为计算简便起见，可以选择平行于坐标轴的直线段连成的折线 M_0RM 或 M_0SM 作为积分路线(图 10-14)，当然要假定这些折线完全位于 G 内.

在公式(4)中取 M_0RM 为积分路线，得

$$u(x, y)=\int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy.$$

在公式(4)中取 M_0SM 为积分路线，则函数 u 也可表为

$$u(x, y)=\int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy+\int_{x_0}^{x} P(x, y)dx.$$

例 3 验证：在整个 xOy 面内，$xy^2\,dx+x^2y\,dy$ 是某个函数的全微分，并求出一个这样的函数.

解 现在 $P=xy^2$, $Q=x^2y$, 且

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2xy=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

在整个 xOy 面内恒成立，因此在整个 xOy 面内，$xy^2\,dx+x^2y\,dy$ 是某个函数的全微分.

取积分路线如图 10-15 所示，利用公式(4)得所求函数为

$$\begin{aligned}u(x, y)&=\int_{(0,0)}^{(x,y)} xy^2\,dx+x^2y\,dy\\&=\int_{OA} xy^2\,dx+x^2y\,dy+\int_{AB} xy^2\,dx+x^2y\,dy\\&=0+\int_0^y x^2y\,dy=x^2\int_0^y y\,dy=\frac{x^2y^2}{2}.\end{aligned}$$

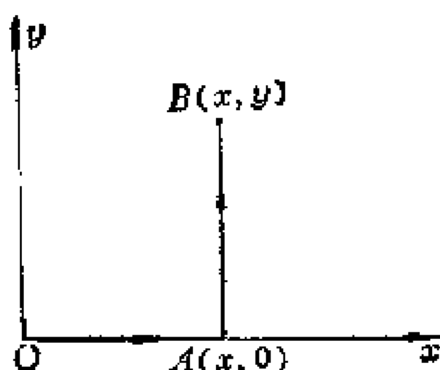


图 10-15

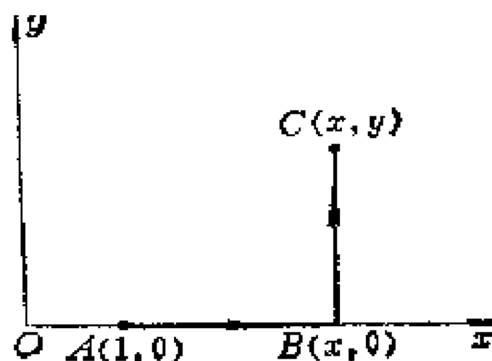


图 10-16

例 4　验证：$\dfrac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$ 在右半平面($x>0$)内是某个函数的全微分，并求出一个这样的函数.

解　现在

$$P=\frac{-y}{x^2+y^2},\qquad Q=\frac{x}{x^2+y^2},$$

且

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

在右半平面内恒成立，因此在右半平面内，$\dfrac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$ 是某个函数的全微分.

取积分路线如图 10-16 所示，利用公式(4)得所求函数为

$$\begin{aligned}u(x,\ y)&=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}\\&=\int_{AB}\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}+\int_{BC}\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}\\&=0+\int_0^y\frac{x\,dy}{x^2+y^2}=\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right]_0^y\\&=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}.\end{aligned}$$

习　题　10-3

1. 计算下列曲线积分，并验证格林公式的正确性：

(1) $\oint_L(2xy-x^2)dx+(x+y^2)dy$，其中 L 是由抛物线 $y=x^2$ 和 $y^2=x$ 所围成的区域的正向边界曲线；

(2) $\oint_L(x^2-xy^3)dx+(y^2-2xy)dy$，其中 L 是四个顶点分别为 (0, 0)、(2, 0)、(2, 2)和(0, 2)的正方形区域的正向边界.

2. 利用曲线积分，求下列曲线所围成的图形的面积：

(1) 星形线 $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t$；

(2) 椭圆 $9x^2+16y^2=144$；

(3) 圆 $x^2+y^2=2ax$.

3. 证明下列曲线积分在整个 xOy 面内与路径无关，并计算积分值：

(1) $\int_{(1,1)}^{(2,3)}(x+y)dx+(x-y)dy$;

(2) $\int_{(1,2)}^{(3,4)}(6xy^2-y^3)dx+(6x^2y-3xy^2)dy$;

(3) $\int_{(1,0)}^{(2,1)}(2xy-y^4+3)dx+(x^2-4xy^3)dy$.

4. 利用格林公式，计算下列曲线积分：

(1) $\oint_L(2x-y+4)dx+(5y+3x-6)dy$，其中 L 为三顶点分别为(0,0)、(3, 0)和(3, 2)的正向三角形边界；

(2) $\oint_L(x^2y\cos x+2xy\sin x-y^2e^x)dx+(x^2\sin x-2ye^x)dy$，其中 L 为正向星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $(a>0)$；

(3) $\int_L(2xy^3-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy$，其中 L 为在抛物线 $2x=\pi y^2$ 上由点(0, 0)到 $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ 的一段弧；

(4) $\int_L(x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy$，其中 L 是在圆周 $x^2+y^2=2x$ 上由点(0, 0)到点(1, 1)的一段弧。

5. 验证下列 $P(x, y)dx+Q(x, y)dy$ 在整个 xOy 平面内是某一函数 $u(x, y)$ 的全微分，并求这样的一个 $u(x, y)$：

(1) $(x+2y)dx+(2x+y)dy$;

(2) $2xydx+x^2dy$;

(3) $4\sin x\sin 3y\cos x\,dx-3\cos 3y\cos 2x\,dy$;

(4) $(3x^2y+8xy^2)dx+(x^3+8x^2y+12ye^y)dy$;

(5) $(2x\cos y+y^2\cos x)dx+(2y\sin x-x^2\sin y)dy$.

6. 证明 $\frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}$ 在整个 xOy 面除 y 的负半轴及原点外的开区域 G 内是某个二元函数的全微分，并求出一个这样的二元函数 $u(x, y)$.

7. 设有一变力在坐标轴上的投影为 $X=x+y^2$, $Y=2xy-8$，这变力确定了一个力场. 证明质点在此场内移动时，场力所作的功与路径无关.

8. 设在半平面 $x>0$ 中有力 $\boldsymbol{F}=-\frac{k}{r^3}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})$ 构成力场，其中 k 为常数，$r=\sqrt{x^2+y^2}$. 证明在此力场中场力所作的功与所取路径无关.

第四节　曲面积分的概念与性质

一、对面积的曲面积分

在本章第一节第一目的质量问题中，如果把曲线改为曲面①，并相应地把线密度 $\rho(x, y)$ 改为面密度 $\rho(x, y, z)$，小段曲线的弧长 Δs_i 改为小块曲面的面积 ΔS_i，而第 i 小段曲线上的一点 (ξ_i, η_i) 改为第 i 小块曲面上的一点 (ξ_i, η_i, ζ_i)，那末，在面密度 $\rho(x, y, z)$ 为连续的前提下，所求的质量 M 就是下列和的极限：

$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i,$$

其中 λ 表示 n 小块曲面的直径②的最大值.

这样的极限还会在其它实际问题中遇到．抽去它们的具体意义，就得出对面积的曲面积分的概念.

定义 1　**设曲面 Σ 是光滑的③，函数 $f(x, y, z)$ 在 Σ 上有界．把 Σ 分成 n 小块 ΔS_i（ΔS_i 同时也代表第 i 小块曲面的面积），设 (ξ_i, η_i, ζ_i) 是 ΔS_i 上任意取定的一点．如果极限**

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i$$

存在，这个极限值就叫做函数 $f(x, y, z)$ 在曲面 Σ 上对面积的曲面积分，记作 $\iint\limits_{\Sigma}f(x, y, z)dS$，即

$$\iint\limits_{\Sigma}f(x, y, z)\,dS=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i,$$

其中 $f(x, y, z)$ 叫做被积函数，Σ 叫做积分曲面.

① 以后都假定曲面的边界曲线是分段光滑的闭曲线，且曲面有界.

② 曲面的直径是指曲面上任意两点间距离的最大者.

③ 所谓曲面是光滑的，就是说，曲面上各点处都具有切平面，且当点在曲面上连续移动时，切平面也连续转动.

我们指出，当$f(x, y, z)$在光滑曲面Σ上连续时，对面积的曲面积分是存在的．今后总假定$f(x, y, z)$在Σ上连续．

根据上述定义，面密度为连续函数$\rho(x, y, z)$的光滑曲面Σ的质量M，可表示为$\rho(x, y, z)$在Σ上对面积的曲面积分：

$$M=\iint_{\Sigma}\rho(x, y, z)dS.$$

如果Σ是分片光滑的①，我们规定函数在Σ上的曲面积分②等于函数在光滑的各片曲面上的曲面积分之和．例如，设Σ可分成两片光滑曲面Σ_1及Σ_2（记作$\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$），就规定

$$\iint_{\Sigma_1+\Sigma_2} f(x, y, z)dS=\iint_{\Sigma_1} f(x, y, z)dS+\iint_{\Sigma_2} f(x, y, z)dS.$$

二、对坐标的曲面积分

我们对曲面作一些说明．这里假定曲面是光滑的．

通常我们遇到的曲面都是双侧的．例如由方程$z=z(x, y)$表示的曲面，有上侧与下侧之分③；又例如，一张包围某一空间区域的闭曲面，有外侧与内侧之分．以后我们总假定所考虑的曲面是双侧的．

在讨论对坐标的曲面积分时，需要指定曲面的侧．我们可以通过曲面上法向量的指向来定出曲面的侧．例如，对于曲面$z=z(x, y)$，如果取它的法向量$\boldsymbol{n}$的指向朝上，我们就认为取定曲面的上侧；又如，对于闭曲面如果取它的法向量的指向朝外，我们就认为取定曲面的外侧．这种取定了法向量亦即选定了侧的曲

---

① 分片光滑的曲面是指由有限个光滑曲面连成的曲面．以后我们总假定曲面是光滑的或分片光滑的．

② 这里的曲面积分包括对面积的曲面积分以及下一目要介绍的对坐标的曲面积分．

③ 按惯例，这里假定z轴铅直向上．

面，就称为有向曲面.

设 Σ 是有向曲面. 在 Σ 上取一小块曲面 ΔS, 把 ΔS 投影到 xOy 面上得一投影区域，这投影区域的面积记为 $(\Delta\sigma)_{xy}$. 假定 ΔS 上各点处的法向量与 z 轴的夹角 γ 的余弦 $\cos\gamma$ 有相同的符号(即 $\cos\gamma$ 都是正的或都是负的). 我们规定 ΔS 在 xOy 面上的投影 $(\Delta S)_{xy}$ 为

$$(\Delta S)_{xy}=\begin{cases}(\Delta\sigma)_{xy}, & \text{当}\cos\gamma>0\text{时},\\ -(\Delta\sigma)_{xy}, & \text{当}\cos\gamma<0\text{时},\\ 0, & \text{当}\cos\gamma\equiv0\text{时}.\end{cases}$$

其中 $\cos\gamma\equiv0$ 也就是 $(\Delta\sigma)_{xy}=0$ 的情形. ΔS 在 xOy 面上的投影 $(\Delta S)_{xy}$ 实际就是 ΔS 在 xOy 面上的投影区域的面积附以一定的正负号. 类似地可以定义 ΔS 在 yOz 面及 zOx 面上的投影 $(\Delta S)_{yz}$ 及 $(\Delta S)_{zx}$.

下面讨论一个例子，然后引进对坐标的曲面积分的概念.

流向曲面一侧的流量 设稳定流动[①]的不可压缩流体(假定密度为 1)的速度场由

$$\boldsymbol{v}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

给出，Σ 是速度场中的一片有向曲面，函数 $P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$、$R(x,y,z)$ 都在 Σ 上连续，求在单位时间内流向 Σ 指定侧的流量 Φ.

如果流体流过平面上面积为 A 的一个区域，且流体在这区域上各点处的流速为(常向量) $\boldsymbol{v}$, 又设 $\boldsymbol{n}$ 为该平面的单位法向量(图 10-17(a)), 那末在单位时间内流过这区域的流量组成一个底面积为 A、斜高为 $|\boldsymbol{v}|$ 的斜柱体(图 10-17(b)). 这斜柱体的体积为

$$A|\boldsymbol{v}|\cos\theta=A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}.$$

① 所谓稳定流动，就是说，流速与时间 t 无关.

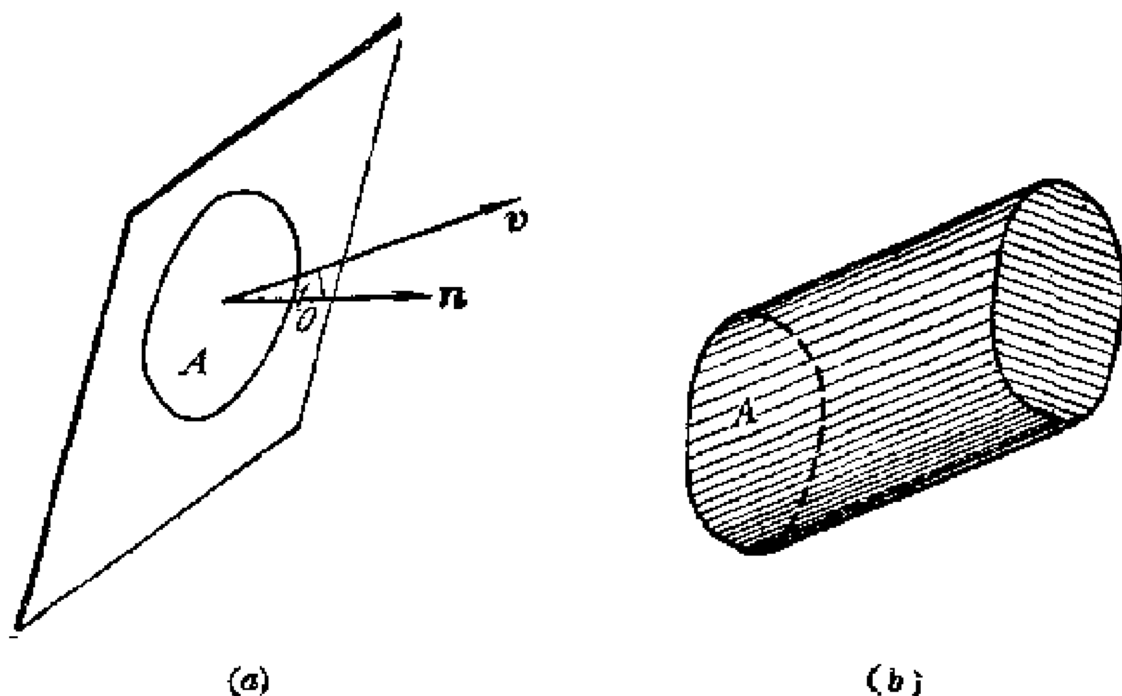


图 10-17

由于现在所考虑的不是平面区域而是一片曲面，且流速 $\boldsymbol{v}$ 也不是常向量，因此所求流量不能直接用上述方法计算. 但过去在引出各类积分概念的例子中一再使用过的方法，也可用来解决目前的问题.

把曲面 Σ 分成 n 小块 ΔS_i（ΔS_i 同时也代表第 i 小块曲面的面积）. 在 Σ 是光滑的和 $\boldsymbol{v}$ 是连续的前提下，只要 ΔS_i 的直径很小，我们就可以用 ΔS_i 上任一点 (ξ_i, η_i, ζ_i) 处的流速

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_i &= \boldsymbol{v}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\\ &= P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\boldsymbol{i} + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\boldsymbol{j} + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

代替 ΔS_i 上其它各点处的流速，以该点 (ξ_i, η_i, ζ_i) 处曲面 Σ 的单位法向量

$$\boldsymbol{n}_i = \cos\alpha_i\boldsymbol{i} + \cos\beta_i\boldsymbol{j} + \cos\gamma_i\boldsymbol{k}$$

代替 ΔS_i 上其它各点处的单位法向量(图 10-18). 从而得到通过 ΔS_i 流向指定侧的流量的近似值为

$$\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{n}_i \Delta S_i \quad (i=1, 2, \cdots, n)。$$

于是，通过 Σ 流向指定侧的流量

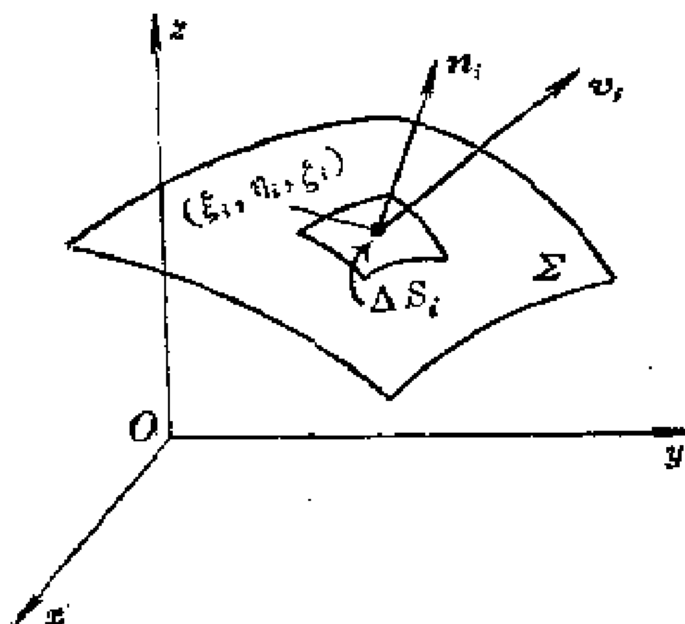


图 10-18

$$\Phi \approx \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{n}_i \Delta S_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\cos\alpha_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\cos\beta_i + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\cos\gamma_i] \Delta S_i.$$

但
$$\cos\alpha_i \cdot \Delta S_i \approx (\Delta S_i)_{yz},$$
$$\cos\beta_i \cdot \Delta S_i \approx (\Delta S_i)_{zx}, \qquad \cos\gamma_i \cdot \Delta S_i \approx (\Delta S_i)_{xy},$$

因此上式可以写成

$$\Phi \approx \sum_{i=1}^{n} [P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{zx} + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}].$$

令 $\lambda \to 0$ 取上述和的极限，就得到流量 Φ 的精确值. 这样的极限还会在其它实际问题中遇到. 抽去它们的具体意义，就得出下列对坐标的曲面积分的概念.

定义 2 设 Σ 为光滑的有向曲面，函数 $R(x, y, z)$ 在 Σ 上有界. 把 Σ 分成 n 块小曲面 ΔS_i（ΔS_i 同时又表示第 i 块小曲面的面积），ΔS_i 在 xOy 面上的投影为 $(\Delta S_i)_{xy}$，(ξ_i, η_i, ζ_i) 是 ΔS_i 上任意取定的一点. 如果极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$$

存在，这个极限值就叫做函数 $R(x,\ y,\ z)$ 在有向曲面 Σ 上对坐标 x、y 的曲面积分，记作 $\iint\limits_{\Sigma} R(x,\ y,\ z)dx\,dy$，即

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x,\ y,\ z)dx\,dy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i)(\Delta S_i)_{xy},$$

其中 $R(x,\ y,\ z)$ 叫做被积函数，Σ 叫做积分曲面.

类似地可以定义函数 $P(x,\ y,\ z)$ 在有向曲面 Σ 上对坐标 y、z 的曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} P(x,\ y,\ z)dy\,dz$，及函数 $Q(x,\ y,\ z)$ 在有向曲面 Σ 上对坐标 z、x 的曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} Q(x,\ y,\ z)dz\,dx$ 为

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,\ y,\ z)dy\,dz = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}$$

$$\iint\limits_{\Sigma} Q(x,\ y,\ z)\,dz\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i)(\Delta S_i)_{zx}.$$

我们指出，当 $P(x,\ y,\ z)$、$Q(x,\ y,\ z)$、$R(x,\ y,\ z)$ 在有向光滑曲面 Σ 上连续时，对坐标的曲面积分是存在的，以后总假定 P、Q、R 在 Σ 上连续。

在应用上出现较多的是：

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,\ y,\ z)dy\,dz + \iint\limits_{\Sigma} Q(x,\ y,\ z)\,dz\,dx + \iint\limits_{\Sigma} R(x,\ y,\ z)dx\,dy$$

这种合并起来的形式，为简便起见，我们把它写成

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,\ y,\ z)dy\,dz + Q(x,\ y,\ z)dz\,dx + R(x,\ y,\ z)dx\,dy.$$

例如，上述流向 Σ 指定侧的流量 Φ 可表示为

$$\Phi = \iint\limits_{\Sigma} P(x,\ y,\ z)dy\,dz + Q(x,\ y,\ z)dz\,dx + R(x,\ y,\ z)dx\,dy.$$

三、曲面积分的性质

曲面积分具有与曲线积分相类似的一些性质. 例如:

(1) 如果把 Σ 分成 Σ_1 和 Σ_2, 则

$$\iint_{\Sigma} P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy$$

$$=\iint_{\Sigma_1} P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy$$

$$+\iint_{\Sigma_2} P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy. \tag{1}$$

公式(1)可以推广到 Σ 分成 $\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_n$ 几部分的情形. 关于对面积的曲面积分也有同样的性质, 这就是: 如果 Σ 分成几部分,则在 Σ 上的曲面积分等于各部分上的曲面积分之和.

(2) 设 Σ 是有向曲面, $-\Sigma$ 表示与 Σ 取相反侧的有向曲面, 则

$$\iint_{-\Sigma} P(x, y, z)dy\,dz=-\iint_{\Sigma} P(x, y, z)dy\,dz,$$

$$\iint_{-\Sigma} Q(x, y, z)\,dz\,dx=-\iint_{\Sigma} Q(x, y, z)dz\,dx,$$

$$\iint_{-\Sigma} R(x, y, z)dx\,dy=-\iint_{\Sigma} R(x, y, z)dx\,dy. \tag{2}$$

(2)式表示, 当积分曲面改变为相反侧时, 对坐标的曲面积分要改变符号. 因此关于对坐标的曲面积分, 我们必须注意积分曲面所取的侧.

这些性质的证明从略.

习 题 10-4

1. 设有一分布着质量的曲面 Σ, 在点 (x, y, z) 处它的面密度为 $\rho(x, y, z)$,

用对面积的曲面积分表达这曲面对于 x 轴的转动惯量.

2. 按对面积的曲面积分的定义证明公式

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)dS=\iint\limits_{\Sigma_1} f(x, y, z)dS+\iint\limits_{\Sigma_2} f(x, y, z)dS,$$

其中 Σ 是由 Σ_1 和 Σ_2 组成的.

3. 按对坐标的曲面积分的定义证明公式

$$\iint\limits_{\Sigma}[P_1(x, y, z)\pm P_2(x, y, z)]dydz$$

$$=\iint\limits_{\Sigma} P_1(x, y, z)\,dydz\pm\iint\limits_{\Sigma} P_2(x, y, z)dydz.$$

4. 当 Σ 为 xOy 面内的一个区域时，曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)dS$ 与二重积分有什么关系? 又曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} R(x, y, z)dxdy$ 与二重积分有什么关系?

第五节　曲面积分的计算法

一、对面积的曲面积分的计算法

设积分曲面 Σ 由方程 $z=z(x, y)$ 给出，Σ 在 xOy 面上的投影区域为 D_{xy}(图 10-19)，函数 $z=z(x, y)$ 在 D_{xy} 上具有连续偏导数，被积函数 $f(x, y, z)$ 在 Σ 上连续.

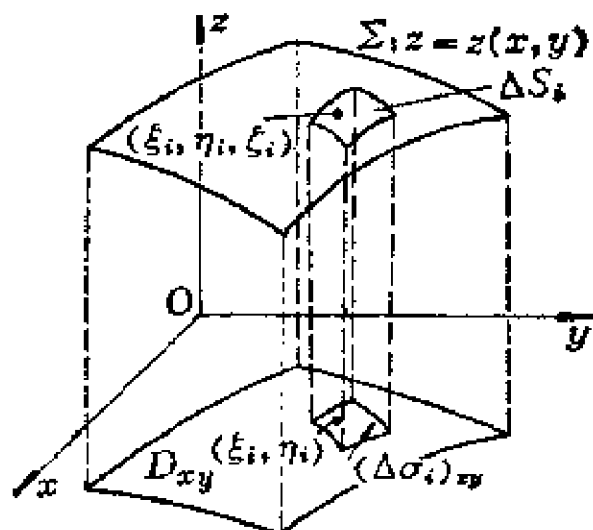


图　10-19

按对面积的曲面积分的定义，有

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)dS=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i. \quad (1)$$

设 Σ 上第 i 小块曲面 ΔS_i(它的面积也记作 ΔS_i) 在 xOy 面上

的投影区域为$(\Delta\sigma_i)_{xy}$(它的面积也记作$(\Delta\sigma_i)_{xy}$),则(1)式中的ΔS_i可表示为二重积分:

$$\Delta S_i=\iint\limits_{(\Delta\sigma_i)_{xy}}\sqrt{1+z_x^2(x,\ y)+z_y^2(x,\ y)}\,dx\,dy.$$

利用二重积分的中值定理,上式又可写成

$$\Delta S_i=\sqrt{1+z_x^2(\xi_i',\ \eta_i')+z_y^2(\xi_i',\ \eta_i')}\,(\Delta\sigma_i)_{xy},$$

其中$(\xi_i',\ \eta_i')$是小区域$(\Delta\sigma_i)_{xy}$上的一点. 又因$(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i)$是$\Sigma$上的一点,故$\zeta_i=z(\xi_i,\ \eta_i)$,这里$(\xi_i,\ \eta_i)$也是小区域$(\Delta\sigma_i)_{xy}$上的点. 于是

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i)\Delta S_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}f[\xi_i,\ \eta_i,\ z(\xi_i,\ \eta_i)]\sqrt{1+z_x^2(\xi_i',\ \eta_i')+z_y^2(\xi_i',\ \eta_i')}\,(\Delta\sigma_i)_{xy}.$$

由于函数$f[x,\ y,\ z(x,\ y)]$以及函数$\sqrt{1+z_x^2(x,\ y)+z_y^2(x,\ y)}$都在闭区域$D_{xy}$上连续,当$\lambda\to 0$时,上式右端的极限与

$$\sum_{i=1}^{n}f[\xi_i,\ \eta_i,\ z(\xi_i,\ \eta_i)]\sqrt{1+z_x^2(\xi_i,\ \eta_i)+z_y^2(\xi_i,\ \eta_i)}\,(\Delta\sigma_i)_{xy}$$

的极限相等,都等于二重积分

$$\iint\limits_{D_{xy}}f[x,\ y,\ z(x,\ y)]\sqrt{1+z_x^2(x,\ y)+z_y^2(x,\ y)}\,dx\,dy,$$

而左端的极限是曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}f(x,\ y,\ z)dS$,因此有

$$\iint\limits_{\Sigma}f(x,\ y,\ z)dS$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}f[x,\ y,\ z(x,\ y)]\sqrt{1+z_x^2(x,\ y)+z_y^2(x,\ y)}\,dx\,dy. \qquad (2)$$

这就是把对面积的曲面积分化为二重积分的公式. 这公式是容易记忆的,因为曲面Σ的方程是$z=z(x,\ y)$,而曲面的面积元素dS

就是$\sqrt{1+z_x^2(x, y)+z_y^2(x, y)}dx\,dy$. 在计算时，只要把变量 z 换为 $z(x, y)$，曲面面积元素 dS 换为 $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy$，再确定 Σ 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy}，这样就把对面积的曲面积分化为二重积分了.

如果积分曲面 Σ 由方程 $x=x(y, z)$ 或 $y=y(z, x)$ 给出，也可类似地把曲面积分化为相应的二重积分.

例 1 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{dS}{z}$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h(0<h<a)$ 截出的顶部(图 10-20).

解 Σ 的方程为

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}.$$

Σ 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 为圆形区域: $x^2+y^2\leqslant a^2-h^2$. 又

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

根据公式(2)，有

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{dS}{z}=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{a\,dx\,dy}{a^2-x^2-y^2}.$$

利用极坐标，得

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{dS}{z}=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{ar\,dr\,d\theta}{a^2-r^2}=a\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\frac{r\,dr}{a^2-r^2}$$

$$=2\pi a\left[-\frac{1}{2}\ln(a^2-r^2)\right]_0^{\sqrt{a^2-h^2}}=2\pi a\ln\frac{a}{h}.$$

例 2 计算 $\oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma}xyz\,dS$①，其中 Σ 是由平面 $x=0$, $y=0$, $z=0$ 及 $x+y+z=1$ 所围成的四面体的整个边界曲面(图 10-21).

解 整个边界曲面 Σ 在平面 $x=0$、$y=0$、$z=0$ 及 $x+y+z=1$

---

① 记号 $\oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma}$ 表示在闭曲面 Σ 上积分.

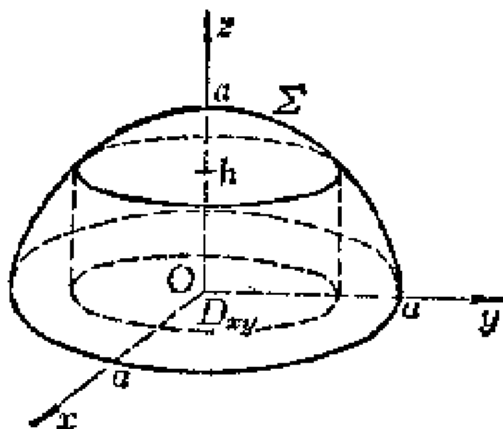


图 10-20

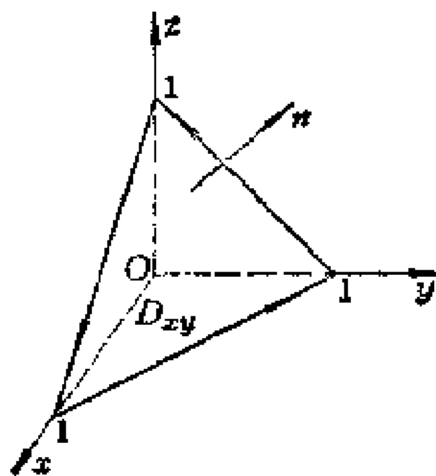


图 10-21

上的部分依次记为 Σ_1, Σ_2, Σ_3 及 Σ_4, 那末

$$\oiint_{\Sigma} xyz\,dS=\iint_{\Sigma_1} xyz\,dS+\iint_{\Sigma_2} xyz\,dS+\iint_{\Sigma_3} xyz\,dS+\iint_{\Sigma_4} xyz\,dS.$$

由于在 Σ_1, Σ_2, Σ_3 上, 被积函数 $f(x, y, z)=xyz$ 均为零, 所以

$$\iint_{\Sigma_1} xyz\,dS=\iint_{\Sigma_2} xyz\,dS=\iint_{\Sigma_3} xyz\,dS=0.$$

在 Σ_4 上, $z=1-x-y$, 所以

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{3},$$

从而

$$\oiint_{\Sigma} xyz\,dS=\iint_{\Sigma_4} xyz\,dS=\iint_{D_{xy}} \sqrt{3}\,xy(1-x-y)\,dx\,dy,$$

其中 D_{xy} 是 Σ_4 在 xOy 面上的投影区域, 即由直线 $x=0$、$y=0$ 及 $x+y=1$ 所围成的区域. 因此

$$\oiint_{\Sigma} xyz\,dS=\sqrt{3}\int_0^1 x\,dx\int_0^{1-x} y(1-x-y)\,dy$$

$$=\sqrt{3}\int_0^1 x\left[(1-x)\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x} dx$$

$$=\sqrt{3}\int_0^1 x\cdot\frac{(1-x)^3}{6}dx$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{6}\int_0^1 (x-3x^2+3x^3-x^4)dx=\frac{\sqrt{3}}{120}.$$

二、对坐标的曲面积分的计算法

设积分曲面 Σ 是由方程 $z=z(x,y)$ 所给出的曲面上侧，Σ 在 xOy 面上的投影区域为 D_{xy}，函数 $z=z(x,y)$ 在 D_{xy} 上具有一阶连续偏导数，被积函数 $R(x,y,z)$ 在 Σ 上连续.

按对坐标的曲面积分的定义，有

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dx\,dy=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}.$$

因为 Σ 取上侧，$\cos\gamma>0$，所以

$$(\Delta S_i)_{xy}=(\Delta\sigma_i)_{xy}.$$

又因 (ξ_i,η_i,ζ_i) 是 Σ 上的一点，故 $\zeta_i=z(\xi_i,\eta_i)$. 从而有

$$\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}=\sum_{i=1}^{n} R[\xi_i,\eta_i,z(\xi_i,\eta_i)](\Delta\sigma_i)_{xy}.$$

令 $\lambda\to 0$ 取上式两端的极限，就得到

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dx\,dy=\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dx\,dy. \tag{3}$$

这就是把对坐标的曲面积分化为二重积分的公式. 公式(3)表明，计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dx\,dy$ 时，只要把其中变量 z 换为表示 Σ 的函数 $z(x,y)$，然后在 Σ 的投影区域 D_{xy} 上计算二重积分就成了.

必须注意，公式(3)的曲面积分是取在曲面 Σ 上侧的；如果曲面积分是取在 Σ 的下侧，这时 $\cos\gamma<0$，所以

$$(\Delta S_i)_{xy} = -(\Delta\sigma_i)_{xy}.$$

从而有

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)dx\,dy = -\iint_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)]dx\,dy. \qquad (3')$$

类似地，如果 Σ 由 $x = x(y, z)$ 给出，则有

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z)dy\,dz = \pm\iint_{D_{yz}} P[x(y, z), y, z]dy\,dz, \qquad (4)$$

等式右端的符号这样决定：如果积分曲面 Σ 取为前侧，应取正号；反之，如果 Σ 取为后侧，应取负号。

如果 Σ 由 $y = y(z, x)$ 给出，则有

$$\iint_{\Sigma} Q(x, y, z)\,dz\,dx = \pm\iint_{D_{zx}} Q[x, y(z, x), z]dz\,dx, \qquad (5)$$

等式右端的符号这样决定：如果积分曲面 Σ 取为右侧，应取正号；反之，如果 Σ 取为左侧，应取负号。

例 3 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} xyz\,dx\,dy$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 外侧在 $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ 的部分。

解 把 Σ 分为 Σ_1 和 Σ_2 两部分，Σ_1 的方程为 $z_1 = -\sqrt{1-x^2-y^2}$，Σ_2 的方程为 $z_2 = \sqrt{1-x^2-y^2}$（图 10-22）。

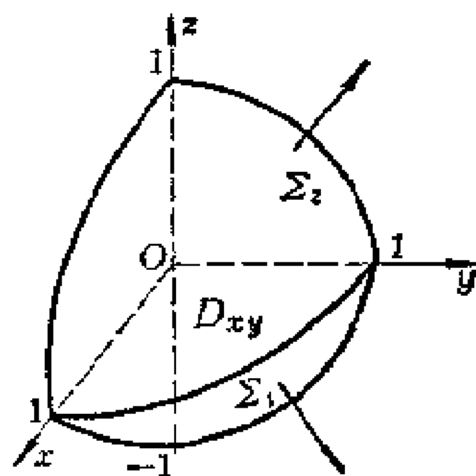


图 10-22

$$\iint_{\Sigma} xyz\,dx\,dy = \iint_{\Sigma_2} xyz\,dx\,dy + \iint_{\Sigma_1} xyz\,dx\,dy.$$

上式右端的第一个积分的积分曲面 Σ_2 取上侧，第二个积分的积分曲面 Σ_1 取下侧，因此分别应用公式(3)及(3')，就有

$$\iint_{\Sigma} xyz\,dx\,dy = \iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

$$-\iint_{D_{xy}} xy(-\sqrt{1-x^2-y^2})\,dx\,dy$$

$$=2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy,$$

其中 D_{xy} 是 Σ_1 及 Σ_2 在 xOy 面上的投影区域，就是位于第一象限内的扇形 $x^2+y^2\leqslant 1$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$. 利用极坐标计算这个二重积分如下：

$$2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

$$=2\iint_{D_{xy}} r^2\sin\theta\cos\theta\ \sqrt{1-r^2}\,r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\,d\theta\int_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}\,dr=1\cdot\frac{2}{15}=\frac{2}{15},$$

从而

$$\iint_{\Sigma} xyz\,dx\,dy=\frac{2}{15}.$$

三、两类曲面积分之间的联系

设有向曲面 Σ 由方程 $z=z(x,\ y)$ 给出，Σ 在 xOy 面上的投影区域为 D_{xy}，函数 $z=z(x,\ y)$ 在 D_{xy} 上具有一阶连续偏导数，$R(x,\ y,\ z)$ 在 Σ 上连续. 如果 Σ 取上侧，则由对坐标的曲面积分计算公式(3)有

$$\iint_{\Sigma} R(x,\ y,\ z)\,dx\,dy=\iint_{D_{xy}} R[x,\ y,\ z(x,\ y)]\,dx\,dy.$$

另一方面，因上述有向曲面 Σ 的法线向量的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{-z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},\qquad \cos\beta=\frac{-z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},$$

故由对面积的曲面积分计算公式(2)有

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)\cos\gamma\, dS=\iint_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)]dx\,dy.$$

由此可见，有

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)dx\,dy=\iint_{\Sigma} R(x, y, z)\cos\gamma\, dS. \tag{6}$$

如果 Σ 取下侧，则由(3′)有

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)dx\,dy=-\iint_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)]dx\,dy.$$

但这时 $\cos\gamma=\dfrac{-1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$，因此(6)式仍成立.

类似地可推得

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z)dy\,dz=\iint_{\Sigma} P(x, y, z)\cos\alpha\, dS, \tag{7}$$

$$\iint_{\Sigma} Q(x, y, z)dz\,dx=\iint_{\Sigma} Q(x, y, z)\cos\beta\, dS. \tag{8}$$

合并(6)、(7)、(8)三式，得两类曲面积分之间的如下联系:

$$\iint_{\Sigma} P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy$$

$$=\iint_{\Sigma} (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS, \tag{9}$$

其中 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 是有向曲面 Σ 上点 (x, y, z) 处的法线向量的方向余弦.

习　题　10-5

1. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dS$，其中 Σ 为抛物面 $z=2-(x^2+y^2)$ 在

xOy 面上方的部分，$f(x, y, z)$ 分别如下：

(1) $f(x, y, z)=1$;

(2) $f(x, y, z)=x^2+y^2$;

(3) $f(x, y, z)=3z$.

2．计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$，其中 Σ 是：

(1) 锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=1$ 所围成的区域的整个边界曲面；

(2) 锥面 $z^2=3(x^2+y^2)$ 被平面 $z=0$ 和 $z=3$ 所截得的部分.

3．计算下列对面积的曲面积分：

(1) $\iint\limits_{\Sigma}\left(z+2x+\frac{4}{3}y\right)dS$，其中 Σ 为平面 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ 在第一卦限中的部分；

(2) $\iint\limits_{\Sigma}(2xy-2x^2-x+z)dS$，其中 Σ 为平面 $2x+2y+z=6$ 在第一卦限中的部分；

(3) $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上 $z\geqslant h(0<h<a)$ 的部分；

(4) $\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)dS$，其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2ax$ 所截得的部分；

(5) $\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}dS$，其中 Σ 是界于平面 $z=0$ 及 $z=H$ 之间的圆柱面 $x^2+y^2=R^2$.

4．计算下列对坐标的曲面积分：

(1) $\iint\limits_{\Sigma}x^2y^2z\,dx\,dy$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的下半部分的下侧；

(2) $\iint\limits_{\Sigma}z\,dx\,dy+x\,dy\,dz+y\,dz\,dx$，其中 Σ 是柱面 $x^2+y^2=1$ 被平面 $z=0$ 及 $z=3$ 所截得的在第一卦限内的部分的前侧；

(3) $\oiint\limits_{\Sigma}\frac{e^z\,dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$，其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=1$，$z=2$ 所围成的空间区域的整个边界曲面的外侧；

(4) $\oiint\limits_{\Sigma} xz\,dx\,dy+xy\,dy\,dz+yz\,dz\,dx$，其中 Σ 是平面 $x=0$，$y=0$，$z=0$，$x+y+z=1$ 所围成的空间区域的整个边界曲面的外侧；

(5) $\oiint\limits_{\Sigma}(y-z)dy\,dz+(z-x)dz\,dx+(x-y)dx\,dy$，其中 Σ 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=h(h>0)$ 所围成的空间区域的整个边界曲面的外侧.

5．求抛物面壳 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ $(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的质量，此壳的密度按规律 $\rho=z$ 而变更.

6．求密度为 ρ_0 的均匀半球壳 $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(z\geqslant 0)$ 对于 z 轴的转动惯量.

7．求均匀曲面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的重心的坐标.

8．把对坐标的曲面积分

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dy\,dz+Q(x,y,z)dz\,dx+R(x,y,z)dx\,dy$$

化成对面积的曲面积分：

(1) Σ 是平面 $3x+2y+2\sqrt{3}z=6$ 在第一卦限的部分的上侧；

(2) 曲面 Σ 是抛物面 $z=8-(x^2+y^2)$ 在 xOy 面上方的部分的上侧.

*第六节　高斯公式　通量与散度

一、高斯公式

格林公式表达出平面区域上的二重积分与其边界曲线上的曲线积分之间的关系，而高斯公式表达了空间区域上的三重积分与其边界曲面上的曲面积分之间的关系，这个关系可陈述如下：

定理　**设空间闭区域 Ω 是由分片光滑的闭曲面 Σ 所围成，函数 $P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$、$R(x,y,z)$ 在 Ω 上具有一阶连续偏导数，则有公式**

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\oiint\limits_{\Sigma} P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy, \quad (1)$$

或

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv$$

$$=\oiint\limits_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS, \qquad (1')$$

这里曲面积分取在闭曲面 Σ 的外侧，$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 是 Σ 上点 (x, y, z) 处的法向量的方向余弦．公式 (1) 或 (1′) 叫做高斯 (Gauss) 公式．

证 由第五节公式(9)可知，公式(1)及(1′)的右端是相等的，因此这里只要证明公式(1)就可以了．

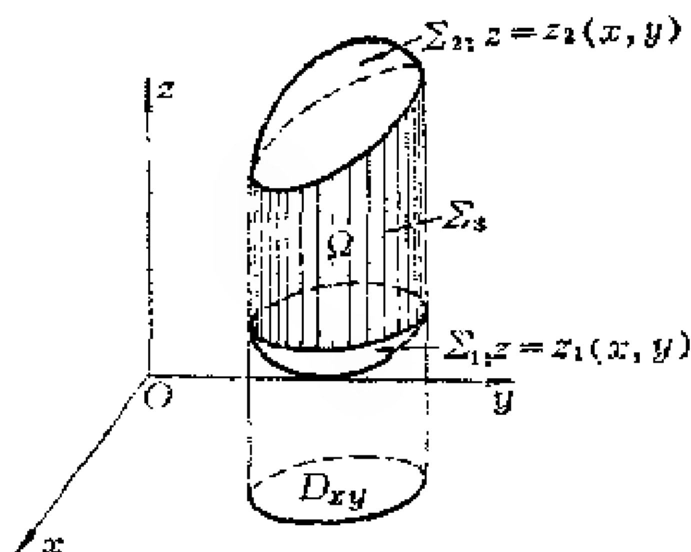


图 10-23

设区域 Ω 在 xOy 面上的投影区域为 D_{xy}．假定穿过 Ω 内部且平行于 z 轴的直线与 Ω 的边界曲面 Σ 的交点恰好是两个．这样，可设 Σ 由 Σ_1, Σ_2 和 Σ_3 三部分组成（图 10-23），其中 Σ_1 和 Σ_2 分别由方程 $z=z_1(x, y)$ 和 $z=z_2(x, y)$ 给定，这里 $z_1(x, y)\leqslant z_2(x, y)$，$\Sigma_1$ 取下侧，Σ_2 取上侧；Σ_3 是以 D_{xy} 的边界曲线为准线而母线平行于 z 轴的柱面上的一部分，取外侧．

根据三重积分的计算法，有

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial R}{\partial z}dv=\iint\limits_{D_{xy}}\left\{\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}dz\right\}dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\{R[x, y, z_2(x, y)]$$

$$-R[x, y, z_1(x, y)]\}dxdy. \qquad (2)$$

根据曲面积分的计算法，有

$$\iint\limits_{\Sigma_1} R(x, y, z)dxdy = -\iint\limits_{D_{xy}} R[x, y, z_1(x, y)]dxdy,$$

$$\iint\limits_{\Sigma_2} R(x, y, z)dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} R[x, y, z_2(x, y)]dxdy.$$

因为 Σ_3 上任意一块曲面在 xOy 面上的投影为零，所以直接根据对坐标的曲面积分的定义可知

$$\iint\limits_{\Sigma_3} R(x, y, z)dxdy = 0.$$

把以上三式相加，得

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x, y, z)dxdy$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} \{R[x, y, z_2(x, y)] - R[x, y, z_1(x, y)]\}dxdy. \tag{3}$$

比较(2)、(3)两式，得

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dv = \oiint\limits_{\Sigma} R(x, y, z)dxdy.$$

如果穿过 Ω 内部且平行于 x 轴的直线以及平行于 y 轴的直线与 Ω 的边界曲面 Σ 的交点也都恰好是两个，那末类似地可得

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} dv = \oiint\limits_{\Sigma} P(x, y, z)dydz,$$

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y} dv = \oiint\limits_{\Sigma} Q(x, y, z)dzdx.$$

把以上三式两端分别相加，即得高斯公式(1).

在上述证明中，我们对区域 Ω 作了这样的限制，即穿过 Ω 内部且平行于坐标轴的直线与 Ω 的边界曲面 Σ 的交点恰好是两点. 如果 Ω 不满足这样的条件，可以引

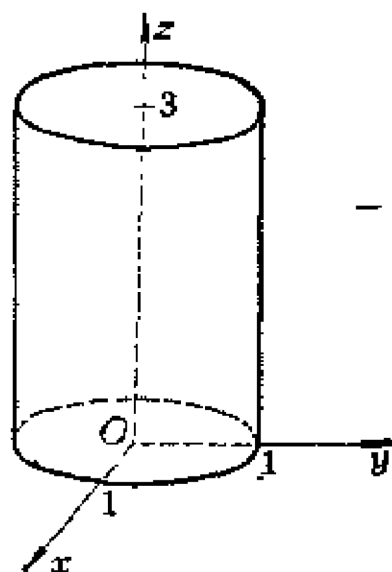


图 10-24

进几个辅助曲面把 Ω 分为有限个区域，使得每个区域满足这样的条件，并注意到沿辅助曲面相反两侧的两个曲面积分的绝对值相等而符号相反，相加时正好抵消，就不难证明公式 (1) 对于这样的区域仍然是正确的。

例 1 利用高斯公式计算曲面积分

$$\oiint_{\Sigma}(x-y)dx\,dy+(y-z)x\,dy\,dz,$$

其中 Σ 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0$, $z=3$ 所围成的空间区域 Ω 的整个边界曲面的外侧(图 10-24)。

解 现在，$P=(y-z)x$, $Q=0$, $R=x-y$,

$$\frac{\partial P}{\partial x}=y-z,\quad \frac{\partial Q}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial R}{\partial z}=0,$$

利用高斯公式把所给曲面积分化为三重积分，再利用柱面坐标计算三重积分：

$$\begin{aligned}
&\oiint_{\Sigma}(x-y)dx\,dy+(y-z)x\,dy\,dz\\
&=\iiint_{\Omega}(y-z)dx\,dy\,dz\\
&=\iiint_{\Omega}(r\sin\theta-z)r\,dr\,d\theta\,dz\\
&=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r\,dr\int_0^3(r\sin\theta-z)dz\\
&=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r\left[r(\sin\theta)z-\frac{z^2}{2}\right]_0^3 dr\\
&=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\left(3r^2\sin\theta-\frac{9}{2}r\right)dr\\
&=\int_0^{2\pi}\left[r^3\sin\theta-\frac{9}{4}r^2\right]_0^1 d\theta\\
&=\int_0^{2\pi}\left(\sin\theta-\frac{9}{4}\right)d\theta=-\frac{9\pi}{2}.
\end{aligned}$$

例 2　设函数 $U(x, y, z)$ 和 $V(x, y, z)$ 在闭区域 Ω 上具有一阶及二阶连续偏导数，证明

$$\iiint_{\Omega} U\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) dv=\oiint_{\Sigma} U \frac{\partial V}{\partial n} dS$$

$$-\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z}\right) dv,$$

其中 Σ 为区域 Ω 的整个边界曲面，$\frac{\partial V}{\partial n}$ 为函数 $V(x, y, z)$ 沿 Σ 的外法线方向的方向导数．这个公式叫做格林第一公式．

证　在高斯公式

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right) dv=\oiint_{\Sigma}(P \cos \alpha+Q \cos \beta+R \cos \gamma) dS$$

中，令 $P=U \frac{\partial V}{\partial x}$, $Q=U \frac{\partial V}{\partial y}$, $R=U \frac{\partial V}{\partial z}$, 便得到

$$\iiint_{\Omega}\left[U\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z}\right] dv$$

$$=\oiint_{\Sigma} U\left(\frac{\partial V}{\partial x} \cos \alpha+\frac{\partial V}{\partial y} \cos \beta+\frac{\partial V}{\partial z} \cos \gamma\right) dS.$$

把上式左端分成两个积分，将其中一个移至等号右端，再注意到

$$\frac{\partial V}{\partial x} \cos \alpha+\frac{\partial V}{\partial y} \cos \beta+\frac{\partial V}{\partial z} \cos \gamma=\frac{\partial V}{\partial n},$$

便得所要证明的等式．

二、沿任意闭曲面的曲面积分为零的条件

现在提出与第三节第二目所讨论的问题相类似的问题，这就是：在怎样的条件下，曲面积分

$$\iint_{\Sigma} P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy$$

与曲面 Σ 无关而只取决于 Σ 的边界曲线？这问题相当于，在怎样的条件下，沿任意闭曲面的曲面积分为零？这问题可用高斯公式来解决而有以下结论：

设空间开区域 G 是一个(依空间的)单连通域①，$P(x, y, z)$、$Q(x, y, z)$、$R(x, y, z)$ 在 G 内具有一阶连续偏导数，则曲面积分 $\iint_{\Sigma} P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy$ 在 G 内与所取曲面 Σ 无关而只取决于 Σ 的边界曲线(或沿 G 内任意闭曲面的曲面积分为零)的充要条件是等式

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0 \tag{4}$$

在 G 内恒成立。

事实上，如果等式(4)在 G 内恒成立，则由高斯公式(1)立即可看出沿 G 内的任意闭曲面的曲面积分为零，因此条件是充分的。另一方面，仿照第三节第二目，用反证法可证条件也是必要的。因为只要假定 G 内有一点 M_0 使得 $\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)_{M_0}\neq 0$，就得出 G 内存在着闭曲面使得沿该闭曲面的曲面积分不等于零，这是与所设条件相矛盾的。

三、通量与散度

下面来解释高斯公式

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\oiint_{\Sigma} P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy \tag{1}$$

---

① 如果开区域 G 内的任意一张闭曲面所围成的区域完全属于 G，就说 G 是依空间的单连通域。

的物理意义.

设稳定流动的不可压缩流体(假定密度为 1)的速度场由

$$\boldsymbol{v}(x, y, z)=P(x, y, z)\boldsymbol{i}+Q(x, y, z)\boldsymbol{j}+R(x, y, z)\boldsymbol{k}$$

给出，其中 P、Q、R 假定具有一阶连续偏导数，Σ 是速度场中一片有向曲面，又

$$\boldsymbol{n}=\cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}+\cos\gamma\boldsymbol{k}$$

是曲面 Σ 上点(x, y, z)处的单位法向量，则由第四节第二目知道，单位时间内流体经过 Σ 流向指定侧的流体总质量 Φ 可用曲面积分来表示：

$$\begin{aligned}\Phi&=\iint_{\Sigma} P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy\\&=\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS\\&=\iint_{\Sigma}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=\iint_{\Sigma}v_n\,dS,\end{aligned}$$

其中 $v_n=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma$ 表示流体的速度向量 $\boldsymbol{v}$ 在有向曲面 Σ 的法向量上的投影. 如果我们把这里的 Σ 看作是高斯公式(1)中区域 Ω 的边界曲面，且按高斯公式 Σ 取外侧，这样就可看出，**公式(1)的右端可解释为单位时间内离开区域 Ω 的流体的总质量**. 由于我们假定流体是不可压缩的，且流动是稳定的，因此在流体离开 Ω 的同时，Ω 内部必须有产生流体的“源头”产生出同样多的流体来进行补充. 所以**高斯公式左端可解释为分布在 Ω 内的源头在单位时间内所产生的流体的总质量.**

为简便起见，把高斯公式(1)改写成

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}v_n\,dS.$$

以区域 Ω 的体积 V 除上式两端，得

$$\frac{1}{V}\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\frac{1}{V}\oiint_{\Sigma}v_n dS.$$

上式左端表示Ω内的源头在单位时间单位体积内所产生的流体质量的平均值. 应用积分中值定理于上式左端, 得

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\bigg|_{(\xi,\eta,\zeta)}=\frac{1}{V}\oiint_{\Sigma}v_n dS,$$

这里(ξ, η, ζ)是Ω内的某个点. 令Ω缩向一点$M(x, y, z)$, 取上式的极限, 得

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\lim_{\Omega\to M}\frac{1}{V}\oiint_{\Sigma}v_n dS.$$

上式左端称为$\boldsymbol{v}$在M点的散度, 记作$\operatorname{div}\boldsymbol{v}$, 即

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

$\operatorname{div}\boldsymbol{v}$在这里可看作稳定流动的不可压缩流体在$M$点的源头强度——在单位时间单位体积内所产生的流体质量. 如果$\operatorname{div}\boldsymbol{v}$为负, 表示点$M$处流体在消失.

一般地, 设某向量场由

$$\boldsymbol{A}(x, y, z)=P(x, y, z)\boldsymbol{i}+Q(x, y, z)\boldsymbol{j}+R(x, y, z)\boldsymbol{k}$$

给出, 其中P、Q、R具有一阶连续偏导数, Σ是场内的一片有向曲面, $\boldsymbol{n}$是曲面Σ上点(x, y, z)处的单位法向量, 则$\iint_{\Sigma}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS$叫做向量场$\boldsymbol{A}$通过曲面$\Sigma$向着指定侧的通量(或流量), 而$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$叫做向量场$\boldsymbol{A}$的散度, 记作$\operatorname{div}\boldsymbol{A}$, 即

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

高斯公式现在可写成

$$\iiint_{\Omega}\operatorname{div}\boldsymbol{A}\,dv=\oiint_{\Sigma}A_n dS,$$

其中 Σ 是空间区域 Ω 的边界曲面，而

$$A_n = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n} = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma$$

是向量 $\boldsymbol{A}$ 在曲面 Σ 的外法线上的投影。

*习 题 10-6

1．利用高斯公式计算曲面积分：

(1) $\iint\limits_{\Sigma} x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$，其中 Σ 为平面 $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=a$, $y=a$, $z=a$ 所围成的立体的表面的外侧；

(2) $\iint\limits_{\Sigma} x^3\,dy\,dz + y^3\,dz\,dx + z^3\,dx\,dy$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧；

(3) $\iint\limits_{\Sigma} xz^2\,dy\,dz + (x^2y - z^3)\,dz\,dx + (2xy + y^2z)\,dx\,dy$，其中 Σ 为上半球体 $x^2+y^2\leqslant a^2$, $0\leqslant z\leqslant\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的表面外侧；

(4) $\iint\limits_{\Sigma} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$，其中 Σ 是界于 $z=0$ 和 $z=3$ 之间的圆柱体 $x^2+y^2\leqslant 9$ 的整个表面的外侧；

(5) $\iint\limits_{\Sigma} 4xz\,dy\,dz - y^2\,dz\,dx + yz\,dx\,dy$，其中 Σ 是平面 $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=1$, $y=1$, $z=1$ 所围成的立方体的全表面的外侧.

2．求下列向量 $\boldsymbol{A}$ 穿过曲面 Σ 的通量：

(1) $\boldsymbol{A} = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$，$\Sigma$ 为圆柱 $x^2+y^2\leqslant a^2\ (0\leqslant z\leqslant h)$ 的全表面；

(2) $\boldsymbol{A} = (2x-z)\boldsymbol{i} + x^2y\boldsymbol{j} - xz^2\boldsymbol{k}$，$\Sigma$ 为立方体 $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant a$, $0\leqslant z\leqslant a$ 的全表面；

(3) $\boldsymbol{A} = (2x+3z)\boldsymbol{i} - (xz+y)\boldsymbol{j} + (y^2+2z)\boldsymbol{k}$，$\Sigma$ 是以点 $(3, -1, 2)$ 为球心、半径 $R=3$ 的球面.

3．求下列向量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度：

(1) $\boldsymbol{A} = (x^2+yz)\boldsymbol{i} + (y^2+xz)\boldsymbol{j} + (z^2+xy)\boldsymbol{k}$；

(2) $\boldsymbol{A} = e^{xy}\boldsymbol{i} + \cos(xy)\boldsymbol{j} + \cos(xz^2)\boldsymbol{k}$；

(3) $\boldsymbol{A} = y^2z\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j} + xz\boldsymbol{k}$.

4. 利用例 2 的计算结果，证明

$$\iiint_{\Omega}\left[U\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)-V\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)\right]dv$$

$$=\oiint_{\Sigma}\left(U\frac{\partial V}{\partial n}-V\frac{\partial U}{\partial n}\right)dS,$$

其中 Σ 是空间闭区域 Ω 的整个边界曲面，$U(x, y, z)$、$V(x, y, z)$ 是两个定义在 Ω 上的具有二阶连续偏导数的函数，$\frac{\partial U}{\partial n}$、$\frac{\partial V}{\partial n}$ 依次表示 $U(x, y, z)$、$V(x, y, z)$ 沿 Σ 的外法线方向的方向导数．这个公式叫做格林第二公式．

5. 利用高斯公式推证阿基米德原理：浸没在液体中的物体所受液体的压力的合力（即浮力）的方向铅直向上、大小等于这物体所排开的液体的重量．

［提示：取液面为 xOy 面、z 轴铅直向下，那末这物体表面 Σ 上点 (x, y, z) 处单位面积上所受液体的压力为 $-\boldsymbol{i}r_0z\cos\alpha-\boldsymbol{j}r_0z\cos\beta-\boldsymbol{k}r_0z\cos\gamma$，其中 r_0 为液体单位体积的重量，$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 为点 (x, y, z) 处 Σ 的外法线的方向余弦．］

*第七节　斯托克斯公式　环流量与旋度

一、斯托克斯公式

斯托克斯公式是格林公式的推广．格林公式表达了平面区域上的二重积分与其边界曲线上的曲线积分间的关系，而斯托克斯公式则把曲面 Σ 上的曲面积分与沿着 Σ 的边界曲线所取的曲线积分联系起来．这个联系可陈述如下：

定理　设 Γ 为分段光滑的空间有向闭曲线，Σ 是以 Γ 为边界的分片光滑的有向曲面，Γ 的正向与 Σ 的侧符合右手规则①，函数 $P(x, y, z)$、$Q(x, y, z)$、$R(x, y, z)$ 在包含曲面 Σ 在内的一个空间区域内具有一阶连续偏导数，则有

① 就是说，当右手除拇指外的四指依 Γ 的绕行方向时，拇指所指的方向与 Σ 上法向量的指向相同．

$$\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\,dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\,dx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

$$=\oint_{\Gamma}P\,dx+Q\,dy+R\,dz. \tag{1}$$

公式(1)叫做斯托克斯(Stokes)公式.

证 先假定 Σ 与平行于 z 轴的直线相交不多于一点，并设 Σ 为曲面 $z=f(x, y)$ 的上侧，Σ 的边界曲线 Γ 在 xOy 面上的投影为平面曲线 C, C 所围成的区域为 D_{xy}（图 10-25）.

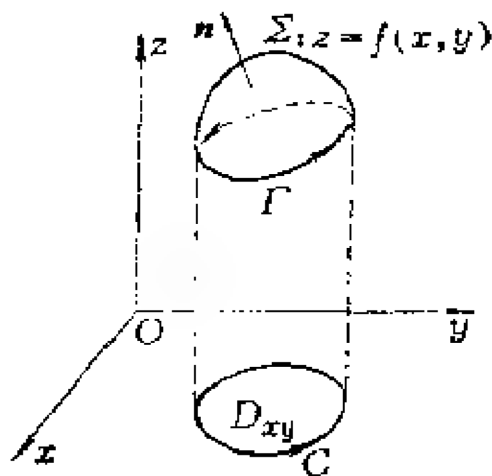


图 10-25

我们设法把曲面积分

$$\iint_{\Sigma}\frac{\partial P}{\partial z}dz\,dx-\frac{\partial P}{\partial y}dx\,dy$$

化为区域 D_{xy} 上的二重积分，然后通过格林公式使它与曲线积分相联系.

根据对面积的和对坐标的曲面积分间的关系，有

$$\iint_{\Sigma}\frac{\partial P}{\partial z}dz\,dx-\frac{\partial P}{\partial y}dx\,dy=\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta-\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)dS. \tag{2}$$

由第八章第六节知道，有向曲面 Σ 的法线向量的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\quad \cos\beta=\frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},$$

因此 $\cos\beta=-f_y\cos\gamma$，把它代入(2)式得

$$\iint_{\Sigma}\frac{\partial P}{\partial z}dz\,dx-\frac{\partial P}{\partial y}dx\,dy=-\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}f_y\right)\cos\gamma\,dS,$$

即

$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = -\iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} f_y\right) dx dy. \tag{3}$$

上式右端的曲面积分化为二重积分时，应把 $P(x, y, z)$ 中的 z 用 $f(x, y)$ 来代替．因为由复合函数的微分法，有

$$\frac{\partial}{\partial y} P[x, y, f(x, y)] = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot f_y.$$

所以，(3)式可写成

$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = -\iint_{D_{xy}} \frac{\partial}{\partial y} P[x, y, f(x, y)] dx dy.$$

根据格林公式，上式右端的二重积分可化为沿区域 D_{xy} 的边界 C 的曲线积分：

$$-\iint_{D_{xy}} \frac{\partial}{\partial y} P[x, y, f(x, y)] dx dy = \oint_{C} P[x, y, f(x, y)] dx,$$

于是 $$\iint_{\Sigma} \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \oint_{C} P[x, y, f(x, y)] dx.$$

因为函数 $P[x, y, f(x, y)]$ 在曲线 C 上点 (x, y) 处的值与函数 $P(x, y, z)$ 在曲线 Γ 上对应点 $(x, y, z=f(x, y))$ 处的值是一样的，并且两曲线上的对应小弧段在 x 轴上的投影也是一样的，所以根据曲线积分的定义，上式右端的曲线积分等于曲线 Γ 上的曲线积分 $\int_{\Gamma} P(x, y, z) dx$．因此，我们证得

$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \oint_{\Gamma} P(x, y, z) dx. \tag{4}$$

如果 Σ 取下侧，Γ 也相应地改成相反的方向，那末(4)式两端同时改变符号，因此(4)式仍成立．

其次，如果曲面与平行于 z 轴的直线的交点多于一个，则可作辅助曲线把曲面分成几部分，然后应用公式(4)并相加．因为沿辅助曲线而方向相反的两个曲线积分相加时正好抵消，所以对于这

一类曲面公式(4)也成立

同样可证

$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial Q}{\partial x} dx\,dy - \frac{\partial Q}{\partial z} dy\,dz = \oint_{\Gamma} Q\,dy,$$

$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial R}{\partial y} dy\,dz - \frac{\partial R}{\partial x} dz\,dx = \oint_{\Gamma} R\,dz.$$

把它们与公式(4)相加即得公式(1).

为了便于记忆,利用行列式记号把斯托克斯公式(1)写成

$$\iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dy\,dz & dz\,dx & dx\,dy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \oint_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

把其中的行列式按第一行展开,并把 $\frac{\partial}{\partial y}$ 与 R 的"积"理解为 $\frac{\partial R}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ 与 Q 的"积"理解为 $\frac{\partial Q}{\partial z}$ 等等,那末这个行列式就"等于"

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

这恰好是公式(1)左端的被积表达式.

如果 Σ 是 xOy 面上的一块平面区域, 斯托克斯公式就变成格林公式. 因此, 格林公式是斯托克斯公式的一个特殊情形.

例 利用斯托克斯公式计算曲线积分 $\oint_{\Gamma} z\,dx + x\,dy + y\,dz$, 其中 Γ 为平面 $x+y+z=1$ 被三个坐标面所截成的三角形的整个边界, 它的正向与这个三角形上侧的法向量之间符合右手规则(图 10-26)

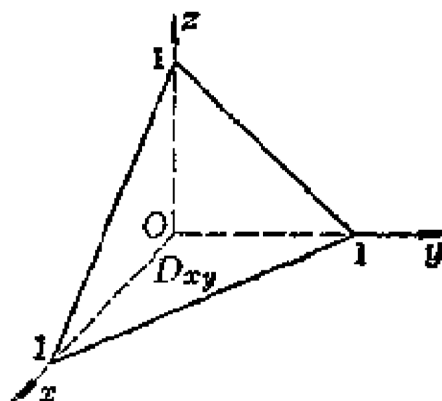


图 10-26

解 按斯托克斯公式,有

$$\oint_{\Gamma} z\,dx + x\,dy + y\,dz = \iint_{\Sigma} dy\,dz + dz\,dx + dx\,dy.$$

由于 Σ 的法向量的三个方向余弦都为正，又由于对称性，上式右端等于

$$3\iint_{D_{xy}} d\sigma,$$

其中 D_{xy} 为 xOy 面上由直线 $x+y=1$ 及两条坐标轴围成的三角形区域，因此

$$\oint_{\Gamma} z\,dx + x\,dy + y\,dz = \frac{3}{2}.$$

二、空间曲线积分与路径无关的条件

在第三节中，利用格林公式推得了平面曲线积分与路径无关的条件．完全类似地，利用斯托克斯公式，可推得空间曲线积分与路径无关的条件．

首先我们指出，空间曲线积分与路径无关相当于沿任意闭曲线的曲线积分为零．关于空间曲线积分在什么条件下与路径无关的问题，有以下结论：

设空间开区域 G 是(依曲面的)单连通域[1]，函数 $P(x, y, z)$、$Q(x, y, z)$、$R(x, y, z)$ 在 G 内具有一阶连续偏导数，则空间曲线积分 $\int_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ 在 G 内与路径无关(或沿 G 内任意闭曲线的曲线积分为零)的充要条件是等式

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y},\quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} \tag{5}$$

在 G 内恒成立．

---

[1] 如果开区域 G 内的任意一条闭曲线上总可以张一片完全属于 G 的曲面，就说 G 是依曲面的单连通域．例如一个球面或两个同心球面所围成的区域就是依曲面单连通的，但环面所围成的区域就不是依曲面单连通的．

事实上，如果等式(5)在 G 内恒成立，则由斯托克斯公式(1)立即可看出，沿闭曲线的曲线积分为零，因此条件是充分的。反之，条件也是必要的。此事可用反证法来证。假设 G 内有一点 M_0 使(5)式中的三个等式不完全成立，例如 $\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$。不妨假定

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{M_0}=\eta>0.$$

过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 作平面 $z=z_0$，并在这个平面上取一个以 M_0 为圆心、半径足够小的圆形闭区域 K，使得在 K 上恒有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\geqslant\frac{\eta}{2}.$$

因为在 K 上 $z=$常数而 $dz=0$，于是由(1)式有

$$\oint_{\gamma} P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\iint_{K}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy\geqslant\frac{\eta}{2}\cdot\sigma,$$

这里 γ 是 K 的正向边界曲线，σ 是 K 的面积。因为 $\eta>0$，$\sigma>0$，从而

$$\oint_{\gamma} P\,dx+Q\,dy+R\,dz>0.$$

这结果与所设不合，从而(5)式在 G 内恒成立。

三、环流量与旋度

设斯托克斯公式中的有向曲面 Σ 上点 (x, y, z) 处的单位法向量为

$$\boldsymbol{n}=\cos\alpha\,\boldsymbol{i}+\cos\beta\,\boldsymbol{j}+\cos\gamma\,\boldsymbol{k},$$

而 Σ 的边界曲线 Γ 上点 (x, y, z) 处的单位切向量为

$$\boldsymbol{t}=\cos\lambda\,\boldsymbol{i}+\cos\mu\,\boldsymbol{j}+\cos\nu\,\boldsymbol{k},$$

则斯托克斯公式可用对面积的曲面积分及对弧长的曲线积分表示为

$$\iint_{\Sigma}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]dS$$

$$=\oint_{\Gamma}(P\cos\lambda+Q\cos\mu+R\cos\nu)ds. \tag{6}$$

设有向量场

$$\boldsymbol{A}(x, y, z)=P(x, y, z)\boldsymbol{i}+Q(x, y, z)\boldsymbol{j}+R(x, y, z)\boldsymbol{k}.$$

在坐标轴上的投影为

$$\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\qquad \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$$

的向量叫做向量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度，记作 $\operatorname{rot}\boldsymbol{A}$, 即

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}. \tag{7}$$

现在，斯托克斯公式可写成向量的形式

$$\iint_{\Sigma}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=\oint_{\Gamma}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{t}\,ds,$$

或

$$\iint_{\Sigma}(\operatorname{rot}\boldsymbol{A})_n dS=\oint_{\Gamma}A_t\,ds, \tag{8}$$

其中

$$(\operatorname{rot}\boldsymbol{A})_n=\operatorname{rot}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}$$

$$=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma$$

为 $\operatorname{rot}\boldsymbol{A}$ 在 Σ 的法向量上的投影，而

$$A_t=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{t}=P\cos\lambda+Q\cos\mu+R\cos\nu$$

为向量 $\boldsymbol{A}$ 在 Γ 的切向量上的投影。

沿有向闭曲线 Γ 的曲线积分

$$\oint_{\Gamma}P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\oint_{\Gamma}A_t\,ds$$

叫做向量场 $\boldsymbol{A}$ 沿有向闭曲线 Γ 的环流量. 斯托克斯公式 (8) 现在可叙述为: **向量场 $\boldsymbol{A}$ 沿有向闭曲线 Γ 的环流量等于向量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度场通过 Γ 所张的曲面 Σ 的通量**, 这里 Γ 的正向与 Σ 的侧应符合右手规则.

为了便于记忆, $\operatorname{rot}\boldsymbol{A}$ 的表达式(7) 可利用行列式记号形式地表示为

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}.$$

最后,我们从力学角度来对 $\operatorname{rot}\boldsymbol{A}$ 的含义作些解释.

设有刚体绕定轴 l 转动,角速度为 $\boldsymbol{\omega}$, M 为刚体内任意一点. 在定轴 l 上任取一点 O 为坐标原点, 作空间直角坐标系, 使 z 轴与定轴 l 重合,则 $\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{k}$, 而点 M 可用向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\{x, y, z\}$ 来确定. 由力学知道,点 M 的线速度 $\boldsymbol{v}$ 可表示为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}.$$

由此有

$$\boldsymbol{v}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 0 & 0 & \omega\\ x & y & z\end{vmatrix}=\{-\omega y, \omega x, 0\},$$

而

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{v}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ -\omega y & \omega x & 0\end{vmatrix}=\{0, 0, 2\omega\}=2\boldsymbol{\omega}.$$

从速度场 $\boldsymbol{v}$ 的旋度与旋转角速度的这个关系, 可见“旋度”这一名词的由来.

*习 题 10-7

1. 利用斯托克斯公式，计算下列曲线积分：

(1) $\oint_{\Gamma} y\,dx+z\,dy+x\,dz$，其中 Γ 为圆周 $x^2+y^2+z^2=a^2$，$x+y+z=0$，若从 x 轴的正向看去，这圆周是取逆时针的方向；

(2) $\oint_{\Gamma}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$，其中 Γ 为椭圆 $x^2+y^2=a^2$，$\frac{x}{a}+\frac{z}{b}=1(a>0,\ b>0)$，若从 x 轴正向看去，这椭圆是取逆时针方向；

(3) $\oint_{\Gamma} 3y\,dx-xz\,dy+yz^2\,dz$，其中 Γ 是圆周 $x^2+y^2=2z$，$z=2$，若从 z 轴正向看去，这圆周取逆时针的方向；

(4) $\oint_{\Gamma} 2y\,dx+3x\,dy-z^2\,dz$，其中 Γ 是圆周 $x^2+y^2+z^2=9$，$z=0$，若从 z 轴正向看去，取逆时针的方向。

2. 求下列向量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度：

(1) $\boldsymbol{A}=(2z-3y)\boldsymbol{i}+(3x-z)\boldsymbol{j}+(y-2x)\boldsymbol{k}$；

(2) $\boldsymbol{A}=(z+\sin y)\boldsymbol{i}-(z-x\cos y)\boldsymbol{j}$；

(3) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}x^2\sin y+\boldsymbol{j}y^2\sin(xz)+\boldsymbol{k}xy\sin(\cos z)$。

3. 利用斯托克斯公式把曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ 化为曲线积分，并计算积分值，其中 $\boldsymbol{A}$、Σ 及 $\boldsymbol{n}$ 分别如下：

(1) $\boldsymbol{A}=y^2\boldsymbol{i}+xy\boldsymbol{j}+xz\boldsymbol{k}$，$\Sigma$ 为上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧，$\boldsymbol{n}$ 是 Σ 的单位法向量；

(2) $\boldsymbol{A}=(y-z)\boldsymbol{i}+yz\boldsymbol{j}-xz\boldsymbol{k}$，$\Sigma$ 为立方体 $0\leqslant x\leqslant 2$，$0\leqslant y\leqslant 2$，$0\leqslant z\leqslant 2$ 的表面外侧去掉 xOy 面上的那个底面，$\boldsymbol{n}$ 是 Σ 的单位法向量。

4. 证明：在向量场 $\boldsymbol{A}$ 中沿任意一有向闭曲线 Γ 的环流量等于零的充要条件是 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}\equiv\boldsymbol{0}$。

5. 求下列向量场 $\boldsymbol{A}$ 沿闭曲线 Γ（依逆时针方向）的环流量：

(1) $\boldsymbol{A}=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$（$c$ 为常量），Γ 为圆周 $x^2+y^2=1$，$z=0$；

(2) $\boldsymbol{A}=(x-z)\boldsymbol{i}+(x^3+yz)\boldsymbol{j}-3xy^2\boldsymbol{k}$，其中 Γ 为圆周 $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$，$z=0$。

6. 证明 $\mathrm{rot}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}+\mathrm{rot}\,\boldsymbol{b}$。

7. 设 $u=u(x,y,z)$ 具有二阶连续偏导数，求 $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,u)$。

第十一章　无穷级数

无穷级数是高等数学的一个重要组成部分，它是表示函数、研究函数的性质以及进行数值计算的一种工具．本章中先讨论常数项级数，介绍无穷级数的一些基本内容，然后讨论函数项级数，着重讨论如何将函数展开成幂级数与三角级数的问题．

第一节　常数项级数的概念和性质

一、常数项级数的概念

人们认识事物在数量方面的特性，往往有一个由近似到精确的过程．在这种认识过程中，会遇到由有限到无穷多个数量相加的问题．

例如计算半径为 R 的圆面积 A，具体做法如下．作圆的内接正六边形，算出这六边形的面积 a_1，它是圆面积 A 的一个粗糙的近似值．为了比较准确地计算出 A 的值，我们以这个正六边形的每一边为底分别作一个顶点在圆周上的等腰三角形（图 11-1），算出这六个等腰三角形的面积之和 a_2．那末 a_1+a_2（即内接正十二边形的面积）就是 A 的一个较好的近似值．同样地，在这正十二边形的每一边上分别作一个顶点在圆周上的等腰三角形，算出这十二个等腰三角形的面积之和 a_3．那末 $a_1+a_2+a_3$（即内接正二十四边形的面积）是 A 的一个更好的近似值．如此继续下去，内接正

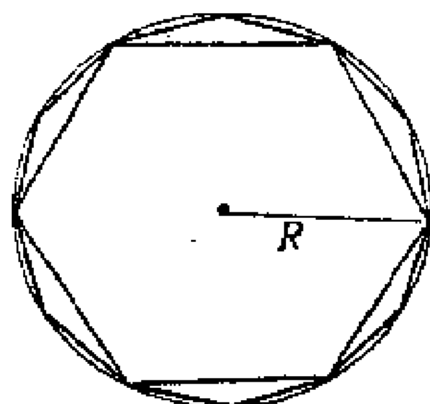


图　11-1

3×2^n 边形的面积就逐步逼近圆面积：

$$A\approx a_1,\ A\approx a_1+a_2,\ A\approx a_1+a_2+a_3,\ \cdots,$$

$$A\approx a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

如果内接正多边形的边数无限增多，即 n 无限增大，则和 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 的极限就是所要求的圆面积 A. 这时和式中的项数无限增多，于是出现了无穷多个数量依次相加的数学式子。

一般地，设给定一个数列

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \cdots,\ u_n,\ \cdots,$$

则式子

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots \tag{1}$$

叫做(常数项)无穷级数，简称(常数项)级数，记为 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots,$$

其中第 n 项 u_n 叫做级数的一般项.

上述级数的定义只是一个形式上的定义，怎样理解无穷级数中无穷多个数量相加呢？联系上面关于计算圆的面积的例子，我们可以从有限项的和出发，观察它们的变化趋势，由此来理解无穷多个数量相加的含义.

作(常数项)级数(1)的前 n 项的和

$$s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n. \tag{2}$$

称 s_n 为级数(1)的部分和. 当 n 依次取 1, 2, 3, … 时，它们构成了一个新的数列：

$$s_1=u_1,\ s_2=u_1+u_2,\ s_3=u_1+u_2+u_3,\ \cdots,$$

$$s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n,\ \cdots.$$

根据这个数列有没有极限，我们引进无穷级数(1)的收敛与发散的概念.

定义 当 n 无限增大时，如果部分和数列 s_n 有极限 s:

$$s=\lim_{n\to\infty}s_n,$$

则称无穷级数(1)收敛，这时极限 s 叫做级数(1)的和，并写成

$$s=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots;$$

如果 s_n 没有极限，则称无穷级数(1)发散。

显然，当级数收敛时，其部分和 s_n 是级数的和 s 的近似值，它们之间的差值

$$r_n=s-s_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots$$

叫做级数的余项. 用近似值 s_n 代替和 s 所产生的误差是这个余项的绝对值，即误差是 $|r_n|$.

例 1 无穷级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}aq^n=a+aq+aq^2+\cdots+aq^n+\cdots \tag{3}$$

叫做等比级数(又称为几何级数)，其中 $a\neq0$，q 叫做级数的公比. 试讨论级数(3)的敛散性.

解 如果 $q\neq1$，则部分和

$$s_n=a+aq+\cdots+aq^{n-1}=\frac{a-aq^n}{1-q}=\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}.$$

当 $|q|<1$ 时，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\dfrac{a}{1-q}$，因此这时级数(3)收敛，其和为 $\dfrac{a}{1-q}$. 当 $|q|>1$ 时，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=\infty$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\infty$，这时级数(3)发散.

如果 $|q|=1$，则当 $q=1$ 时，$s_n=na\to\infty$，因此级数(3)发散；当 $q=-1$ 时，级数(3)成为

$$a-a+a-a+\cdots,$$

显然 s_n 随着 n 为奇数或为偶数而等于 a 或等于零，从而 s_n 的极限不存在，这时级数(3)也发散.

综合上述结果，我们得到：如果等比级数(3)的公比绝对值

$|q|<1$, 则级数收敛；如果 $|q|\geqslant 1$, 则级数发散.

例2 证明

$$1+2+3+\cdots+n+\cdots$$

是发散级数.

证 这级数的部分和为

$$s_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

显然，$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\infty$, 因此所给级数是发散级数.

例3 判别无穷级数

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$

的敛散性.

解 由于

$$u_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

因此

$$\begin{aligned}s_n&=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=1-\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

而
$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1,$$

所以这级数收敛于和1.

二、无穷级数的基本性质

根据无穷级数敛散性的概念，可以得出无穷级数的几个基本性质.

性质1 如果级数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

收敛于和 s，则它的各项同乘以一个常数 k 所得的级数

$$ku_1+ku_2+\cdots+ku_n+\cdots$$

收敛于和 ks.

证 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 的部分和分别为 s_n 与 σ_n，则

$$\sigma_n=ku_1+ku_2+\cdots ku_n=ks_n,$$

于是 $$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\lim_{n\to\infty}ks_n=k\lim_{n\to\infty}s_n=ks.$$

这就表明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 收敛于和 ks.

又由关系式 $\sigma_n=ks_n$ 知道，如果 s_n 没有极限且 $k\neq0$，那末 σ_n 也不可能有极限. 因此我们得到如下结论：**级数的每一项同乘一个不为零的常数后，它的敛散性总是不变的.**

性质2 **设有两个收敛级数：**

$$s=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots,$$

$$\sigma=v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots,$$

则级数 $$(u_1\pm v_1)+(u_2\pm v_2)+\cdots(u_n\pm v_n)+\cdots$$

收敛于和 $s\pm\sigma$.

证 最后一个级数的部分和为

$$\begin{aligned}\tau_n&=(u_1\pm v_1)+(u_2\pm v_2)+\cdots+(u_n\pm v_n)\\&=(u_1+u_2+\cdots+u_n)\pm(v_1+v_2+\cdots+v_n)=s_n\pm\sigma_n,\end{aligned}$$

其中 s_n 与 σ_n 分别为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的部分和. 根据假设有

$$\lim_{n\to\infty}s_n=s,\qquad \lim_{n\to\infty}\sigma_n=\sigma,$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}\tau_n=\lim_{n\to\infty}(s_n\pm\sigma_n)=s\pm\sigma.$$

这就表明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 收敛于和 $s \pm \sigma$。

性质2也说成：收敛级数可以逐项相加与逐项相减。

性质3 **在级数的前面部分去掉或加上有限项，不会影响级数的敛散性，不过在收敛时，一般说来级数的和是要改变的。**

证 设将级数

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_k + u_{k+1} + \cdots + u_{k+n} + \cdots$$

的前 k 项去掉，则得级数

$$u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots + u_{k+n} + \cdots.$$

于是新得的级数的部分和为

$$\sigma_n = u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots + u_{k+n} = s_{k+n} - s_k,$$

其中 s_{k+n} 是原来级数的前 $k+n$ 项的和。因为 s_k 是常数，所以当 $n \to \infty$ 时，σ_n 与 s_{k+n} 或者同时具有极限，或者同时没有极限。在有极限时其关系为

$$\sigma = s - s_k,$$

其中 $\sigma = \lim_{n\to\infty} \sigma_n$, $s = \lim_{n\to\infty} s_{k+n}$.

类似地，可以证明在级数的前面加上有限项，不会影响级数的敛散性。

性质4 **收敛级数加括弧后所成的级数仍然收敛于原来的和。**

证 设有收敛级数

$$s = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots,$$

它按照某一规律加括弧后所成的级数设为

$$(u_1 + u_2) + (u_3 + u_4 + u_5) + \cdots.$$

用 σ_m 表示第二个级数的前 m 项的和，用 s_n 表示相应于 σ_m 的第一个级数的前 n 项的和，于是有

$$\sigma_1 = s_2,\ \sigma_2 = s_5,\ \cdots,\ \sigma_m = s_n,\ \cdots.$$

显然，当 $m\to\infty$ 时，$n\to\infty$，因此

$$\lim_{m\to\infty}\sigma_m=\lim_{n\to\infty}s_n=s.$$

注意，收敛级数去括弧后所成的级数不一定收敛. 例如级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots$$

收敛于零，但级数

$$1-1+1-1+\cdots$$

却是发散的.

根据性质 4 可得如下推论：如果加括弧后所成的级数发散，则原来级数也发散. 事实上，倘若原来级数收敛，则根据性质 4 知道，加括弧后的级数就应该收敛了.

三、级数收敛的必要条件

对于级数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots,$$

它的一般项与部分和有如下关系

$$u_n=s_n-s_{n-1}.$$

假设这级数收敛于和 s，则

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}(s_n-s_{n-1})=\lim_{n\to\infty}s_n-\lim_{n\to\infty}s_{n-1}=s-s=0.$$

于是我们得到级数收敛的必要条件：当 n 无限增大时，它的一般项 u_n 趋于零，即

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0.$$

由此可知，如果级数的一般项不趋于零，则级数发散. 例如级数

$$\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}+\cdots,$$

它的一般项 $u_n=(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}$. 当 $n\to\infty$ 时，u_n 不趋于零，因

此这级数是发散的.

注意，级数的一般项趋于零并不是级数收敛的充分条件．有些级数虽然一般项趋于零，但仍然是发散的．例如调和级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots, \tag{4}$$

它的一般项 $u_n=\frac{1}{n}\to 0\ (n\to\infty)$，我们可以证明它是发散级数.

事实上，顺序把级数(4)的两项、两项、四项、八项、… 2^m 项、…括在一起：

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{2^m+1}+\frac{1}{2^m+2}+\cdots+\frac{1}{2^{m+1}}\right)+\cdots.$$

由于 $1+\frac{1}{2}>\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2},\ \cdots,$$

$$\frac{1}{2^m+1}+\frac{1}{2^m+2}+\cdots+\frac{1}{2^{m+1}}$$
$$>\frac{1}{2^{m+1}}+\frac{1}{2^{m+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{m+1}}=\frac{1}{2},$$

因此这个加括弧的级数前 $(m+1)$ 项的和大于 $(m+1)\frac{1}{2}$，从而这级数发散．根据性质 4 的推论可知调和级数(4)发散.

*四、柯西审敛原理

怎样判别一个级数的收敛性或发散性呢？我们有下述柯西审敛原理.

定理(柯西审敛原理) **级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充分和必要条件为：对于任意给定的正数 ε，总存在自然数 N，使得当 $n>N$ 时，**

对于任意的自然数 $p=1, 2, 3, \cdots$，都有

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon$$

成立。

证 作级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 s_n，因为

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|=|s_{n+p}-s_n|,$$

所以由数列的柯西审敛原理(第一章第七节)，即得本定理结论。

例 4 利用柯西审敛原理判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的敛散性。

解 因为对任何自然数 p，

$$\begin{aligned}
&|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|\\
&=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}\\
&<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}\\
&=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)\\
&=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n},
\end{aligned}$$

于是对于任意给定的正数 ε，取自然数 $N\geqslant\frac{1}{\varepsilon}$，当 $n>N$ 时，对任何 $p=1, 2, \cdots$，都有

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon$$

成立。按柯西审敛原理，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛。

习 题 11-1

1. 写出下列级数的前五项：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot 2n}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{5^n}$；　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$。

2. 写出下列级数的一般项.

(1) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$;

(2) $\frac{2}{1}-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{5}{4}+\frac{6}{5}-\cdots$;

(3) $\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{x}{2\cdot4}+\frac{x\sqrt{x}}{2\cdot4\cdot6}+\frac{x^2}{2\cdot4\cdot6\cdot8}+\cdots$;

(4) $\frac{a^2}{3}-\frac{a^3}{5}+\frac{a^4}{7}-\frac{a^5}{9}+\cdots$.

3. 根据级数收敛与发散的定义判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$;

(2) $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$;

(3) $\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{2\pi}{6}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{6}+\cdots$. [提示:先乘以 $2\sin\frac{\pi}{12}$,再将一般项分解为二个余弦函数之差.]

4. 判别下列级数的敛散性:

(1) $-\frac{8}{9}+\frac{8^2}{9^2}-\frac{8^3}{9^3}+\cdots$;

(2) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{15}+\cdots$;

(3) $\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{\sqrt[4]{3}}+\cdots$;

(4) $\frac{3}{2}+\frac{3^2}{2^2}+\frac{3^3}{2^3}+\cdots$;

(5) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\cdots$;

(6) $\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{10\cdot n}+\cdots$.

5*. 利用柯西审敛原理判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$;

(2) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^n}$;

(4) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}-\frac{1}{3n+3}\right)$.

第二节　常数项级数的审敛法

一、正项级数及其审敛法

第一节所讲的都是一般的常数项级数，即级数中各项可以是正数、负数、或者零．现在我们讨论各项都是正数或零的级数，即正项级数．这种级数特别重要，以后可以看到许多级数的敛散性问题会归结为正项级数的敛散性问题．

设级数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{1}$$

是一个正项级数($u_n\geqslant 0$)，它的部分和为 s_n．显然，数列 s_n 是一个单调增加数列：

$$s_1\leqslant s_2\leqslant\cdots\leqslant s_n\leqslant\cdots,$$

如果数列 s_n 为有界，即 s_n 总不大于某一常数 M，根据单调有界的数列必有极限的准则，级数(1)必收敛于和 s，且 $s_n\leqslant s\leqslant M$．反之，如果正项级数(1)收敛于和 s，即 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s$，根据有极限的数列是有界数列的性质可知，数列 s_n 有界．因此，我们得到如下重要的结论：

正项级数 (1) 收敛的充分必要条件是，它的部分和数列 s_n 为有界．

根据上面的结论，我们取另一个正项级数

$$v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots, \tag{2}$$

把级数 (1) 与它作比较，就可以建立正项级数的一个基本的审敛法．

比较审敛法　**如果级数(2)收敛，并且 $u_n\leqslant v_n(n=1,\ 2,\ \cdots)$，则级数(1)也收敛；如果级数(2)发散，并且 $u_n\geqslant v_n(n=1,\ 2,\ \cdots)$，则级数(1)也发散．**

证 设级数(2)收敛于和 σ，并且 $u_n\leqslant v_n(n=1, 2, \cdots)$，则级数(1)的部分和

$$s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n\leqslant v_1+v_2+\cdots+v_n\leqslant\sigma,$$

即 s_n 总不大于常数 σ，由正项级数收敛的充分必要条件可知级数(1)收敛.

设级数(2)发散，那末它的部分和 $\sigma_n\to+\infty(n\to\infty)$。又设 $u_n\geqslant v_n(n=1, 2, \cdots)$，则

$$s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n\geqslant v_1+v_2+\cdots+v_n=\sigma_n\to+\infty,$$

即数列 s_n 不是有界数列，同样地由上述的充分必要条件可知级数(1)发散.

注意到级数的每一项同乘不为零的常数 k，以及去掉级数前面部分的有限项不会影响级数的敛散性，我们可得如下推论：如果级数(2)收敛，并且从某项起（例如从第 N 项起），$u_n\leqslant kv_n(n\geqslant N)$，则级数(1)也收敛；如果级数(2)发散，并且从某项起，

$$u_n\geqslant kv_n\quad(k>0),$$

则级数(1)也发散.

例1 讨论 p-级数

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots\tag{3}$$

的敛散性，其中常数 $p>0$.

解 设 $p\leqslant1$. 这时级数的各项不小于调和级数的对应项：$\frac{1}{n^p}\geqslant\frac{1}{n}$；但调和级数发散，因此根据比较审敛法可知，当 $p\leqslant1$ 时级数(3)发散.

设 $p>1$. 顺序把级数(3)的一项、两项、四项、八项…括在一起：

$$1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{8^p}+\cdots+\frac{1}{15^p}\right)+\cdots,\tag{4}$$

它的各项显然小于级数

$$1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{8^p}+\cdots+\frac{1}{8^p}\right)+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2^{p-1}}+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3+\cdots$$

的对应项;而后一个级数是等比级数,其公比 $q=\frac{1}{2^{p-1}}<1$, 所以级数收敛.于是,当 $p>1$ 时,级数(4)收敛.因为正项级数的部分和数列构成一个单调增加数列,正项级数加括弧后所成的级数的部分和数列是上述数列的一个子数列①,而单调增加数列的任一子数列必与原来数列同趋于无穷大或者趋于同一个极限,因此,若正项级数加括弧后所成的级数收敛,则原级数收敛.所以,由级数(4)收敛,可知级数(3)也收敛.

综合上述结果,我们得到:p-级数(3)当 $p\leqslant1$ 时发散,当 $p>1$ 时收敛.

例2 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 是发散级数.

证 因为 $n(n+1)<(n+1)^2$, 所以 $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}>\frac{1}{n+1}$. 而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}+\cdots$$

是发散的.根据比较审敛法可知所给级数也是发散级数.

下面给出比较审敛法的极限形式,它在应用时更为方便些.

比较审敛法的极限形式 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 为两个正项级数,如果

① 从数列中任意抽出无穷多个数(前后次序不变)组成的数列称为该数列的子数列或子列.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l \quad (0<l<+\infty),$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同时收敛或同时发散.

证 由极限存在的定义可知，对 $\varepsilon=\frac{l}{2}$，存在自然数 N，当 $n>N$ 时，有不等式

$$l-\frac{l}{2}<\frac{u_n}{v_n}<l+\frac{l}{2},$$

即有不等式

$$\frac{l}{2}v_n<u_n<\frac{3}{2}l v_n,$$

再根据比较审敛法的推论，即得所要证的结论.

例 8 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ 的敛散性.

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1,$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是发散的，由比较审敛法的极限形式知道，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ 也发散.

将所给正项级数与等比级数比较，我们能得到在实用上很方便的比值审敛法和根值审敛法.

比值审敛法（达朗贝尔 (D'Alembert) 判别法） **设正项级数(1)的后项与前项之比值的极限等于 ρ：**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho,$$

则当 $\rho<1$ 时级数收敛；$\rho>1$ $\left(\text{或}\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\infty\right)$ 时级数发散；$\rho=1$ 时级数可能收敛也可能发散.

证 (i) 设 $\rho<1$. 取一个适当小的正数 ε，使得 $\rho+\varepsilon=r<1$，

根据极限定义，存在自然数 m, 当 $n\geqslant m$ 时有不等式

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<\rho+\varepsilon=r.$$

因此

$$u_{m+1}<ru_m,\ u_{m+2}<ru_{m+1}<r^2u_m,\ u_{m+3}<ru_{m+2}<r^3u_m,\ \cdots.$$

这样，级数
$$u_{m+1}+u_{m+2}+u_{m+3}+\cdots$$
的各项就小于收敛的等比级数(公比 $r<1$)

$$ru_m+r^2u_m+r^3u_m+\cdots$$

的对应项，所以它也收敛．由于级数(1)只比它多了前 m 项，因此级数(1)也收敛。

(ii) 设 $\rho>1$. 取一个适当小的正数 ε, 使得 $\rho-\varepsilon>1$. 根据极限定义，当 $n\geqslant m$ 时有不等式

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}>\rho-\varepsilon>1,$$

也就是
$$u_{n+1}>u_n.$$
所以当 $n\geqslant m$ 时，级数的一般项 u_n 是逐渐增大的，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$. 根据级数收敛的必要条件可知级数(1)发散.

类似地，可以证明当 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\infty$ 时，级数(1)发散.

(iii) $\rho=1$ 时级数可能收敛也可能发散．例如 p-级数(3)，不论 p 为何值都有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{(n+1)^p}}{\dfrac{1}{n^p}}=1.$$

但我们知道，当 $p\leqslant1$ 时级数发散，而当 $p>1$ 时级数收敛．因此只根据 $\rho=1$ 不能判别级数的敛散性.

例 4 证明级数

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdots(n-1)}+\cdots$$

收敛 并估计以部分和 s_n 近似代替和 s 所产生的误差.

解 第 n 项为

$$u_n=\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdots(n-1)},$$

于是得 $$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdots n}:\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdots(n-1)}=\frac{1}{n},$$

因此 $$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0<1.$$

根据比值审敛法可知所给级数收敛.

以这级数的部分和 s_n 近似代替和 s 所产生的误差为

$$\begin{aligned}|r_n|&=\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots\\&=\frac{1}{n!}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots\right)\\&<\frac{1}{n!}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\cdots\right)\\&=\frac{1}{n!}\frac{1}{1-\dfrac{1}{n}}=\frac{1}{(n-1)(n-1)!}.\end{aligned}$$

例 5 判别级数

$$\frac{1}{10}+\frac{1\cdot2}{10^2}+\frac{1\cdot2\cdot3}{10^3}+\cdots$$

的敛散性.

解 第 n 项为

$$u_n=\frac{n!}{10^n},$$

于是得 $$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}\cdot\frac{10^n}{n!}=\frac{n+1}{10},$$

因此 $$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{10}=\infty.$$

根据比值审敛法可知所给级数发散.

例 6 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}$ 的敛散性.

解 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)\cdot 2n}{(2n+1)(2n+2)} = 1.$

这时 $\rho=1$, 比值审敛法失效. 必须用其它的方法来判别这级数的敛散性.

因为 $2n>2n-1\geqslant n$, 所以 $\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}<\frac{1}{n^2}$. 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛,因此由比较审敛法可知所给级数收敛.

根值审敛法(柯西判别法)　设正项级数(1)的一般项 u_n 的 n 次根的极限等于 ρ:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho,$$

则当 $\rho<1$ 时级数(1)收敛, $\rho>1$(或 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=+\infty$)时级数(1)发散, $\rho=1$ 时级数(1)可能收敛也可能发散.

这个审敛法的证明与比值审敛法的证明类似, 读者可自行给出.

例 7 证明级数

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots$$

收敛,并估计以部分和 s_n 近似代替和 s 所产生的误差.

解 因为 $\sqrt[n]{u_n}=\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}=\frac{1}{n}\to 0 \quad (n\to\infty)$,

所以根据根值审敛法可知所给级数收敛.

以这级数的部分和 s_n 近似代替和 s 所产生的误差为

$$\begin{aligned}|r_n| &= \frac{1}{(n+1)^{n+1}}+\frac{1}{(n+2)^{n+2}}+\frac{1}{(n+3)^{n+3}}+\cdots \\ &< \frac{1}{(n+1)^{n+1}}+\frac{1}{(n+1)^{n+2}}+\frac{1}{(n+1)^{n+3}}+\cdots \\ &= \frac{1}{n(n+1)^n}.\end{aligned}$$

二、交错级数及其审敛法

所谓交错级数是这样的级数，它的各项是正负交错的，从而可以写成下面的形式：

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots, \tag{5}$$

或

$$-u_1+u_2-u_3+u_4-\cdots,$$

其中 u_1, u_2, $\cdots$ 都是正数．我们来证明关于交错级数的一个审敛法。

交错级数审敛法(莱布尼兹定理) **如果交错级数 (5) 满足条件：**

(i) $u_n \geqslant u_{n+1}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$；

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$,

则级数(5)收敛，且其和 $s\leqslant u_1$，其余项 r_n 的绝对值 $|r_n|\leqslant u_{n+1}$。

证 先证明前 $2n$ 项的和的极限 $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n}$ 存在．为此把 s_{2n} 写成两种形式：

$$s_{2n}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots+(u_{2n-1}-u_{2n})$$

及

$$s_{2n}=u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\cdots-(u_{2n-2}-u_{2n-1})-u_{2n}.$$

根据条件 (i) 知道所有括弧中的差都是非负的．由第一种形式可见 s_{2n} 随 n 增大而增大，由第二种形式可见 $s_{2n}<u_1$．于是，根据单调有界数列必有极限的准则知道，当 n 无限增大时，s_{2n} 趋于一个极限 s，并且 s 不大于 u_1：

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n}=s\leqslant u_1.$$

再证明前 $2n+1$ 项的和的极限 $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n+1}=s$．事实上，我们有

$$s_{2n+1}=s_{2n}+u_{2n+1}.$$

由条件(ii) 知 $\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n+1}=0$，因此

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}(s_{2n}+u_{2n+1})=s.$$

综合以上两个结果：交错级数(5)的部分和数列当 $n\to\infty$ 时具有极限 s. 这就证明了级数(5)收敛于和 s，且 $s\leqslant u_1$.

最后，不难看出余项 r_n 可以写成

$$r_n=\pm(u_{n+1}-u_{n+2}+\cdots),$$

其绝对值
$$|r_n|=u_{n+1}-u_{n+2}+\cdots,$$

右端也是一个交错级数，它也满足收敛的两个条件，所以其和小于级数的第一项，也就是说

$$|r_n|\leqslant u_{n+1}.$$

证明完毕.

例如，交错级数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$$

满足条件

$$\text{(i)}\quad u_n=\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}=u_{n+1}\qquad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

及

$$\text{(ii)}\quad \lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

所以它是收敛的，且其和 $s<1$. 如果取前 n 项的和

$$s_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

作为 s 的近似值，所产生的误差 $|r_n|\leqslant\frac{1}{n+1}\quad(=u_{n+1})$.

三、绝对收敛与条件收敛

设有级数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots. \tag{6}$$

其中 $u_n(n=1, 2, \cdots)$ 为任意实数，则其各项的绝对值组成正项级数

$$|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_n|+\cdots. \tag{7}$$

为了判别级数(6)的敛散性，我们要用到下面的定理.

定理 1　如果级数 (6) 的各项的绝对值所组成的级数 (7) 收敛，则级数(6)收敛.

证　设级数(7)收敛. 令

$$v_n=\frac{1}{2}(u_n+|u_n|) \quad (n=1, 2, 3, \cdots).$$

显然 $v_n \geqslant 0$，并且 $v_n \leqslant |u_n|$，就是说 v_n 都不大于级数 (7) 的对应项. 于是，根据比较审敛法，正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2v_n$ 也收敛. 但是

$$u_n=2v_n-|u_n|,$$

所以级数(6)是由两个收敛级数逐项相减而成的:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n=\sum_{n=1}^{\infty}(2v_n-|u_n|),$$

因此，根据级数的基本性质 2 可知级数(6)收敛. 定理证毕.

这个定理使得许多任意项级数收敛性的判别问题，化为正项级数收敛性的判别问题. 事实上，将一个级数的各项取绝对值，得到一个正项级数. 如果用正项级数的审敛法证明它是收敛的，则原来级数也是收敛的.

一般地，如果级数(6)的各项取绝对值所成的正项级数(7)收敛，则称级数(6)为绝对收敛级数.

例 8　证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^4}$ 是绝对收敛级数.

证　因为 $\left|\frac{\sin n\alpha}{n^4}\right| \leqslant \frac{1}{n^4}$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 是收敛的，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n\alpha}{n^4}\right|$ 也是收敛的. 因此，所给级数是绝对收敛级数.

应该注意，虽然每个绝对收敛级数都是收敛的，但并不是每个收敛级数都是绝对收敛的．例如，级数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$$

是收敛的，但是各项取绝对值所成的级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

却是发散的．

一般地，如果级数(6)收敛，而它的各项取绝对值所成的级数(7)发散，则称级数(6)为条件收敛级数．可见级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 是条件收敛级数．

绝对收敛级数有很多性质是条件收敛级数所没有的，下面给出关于绝对收敛级数的两个性质．

***定理 2　绝对收敛级数不因改变项的位置而改变它的和（绝对收敛级数具有可变换性）．**

证　(1) 先证定理对于收敛的正项级数是正确的．

设级数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

为收敛的正项级数，其部分和为 s_n，和为 s．并设级数

$$u_1^*+u_2^*+\cdots+u_n^*+\cdots$$

为改变项的位置后构成的级数，其部分和为 s_n^*．

对于任何 n，当它固定后，取 m 足够大，使 $u_1^*, u_2^*, \cdots, u_n^*$ 各项都出现在 $s_m=u_1+u_2+\cdots+u_m$ 中，于是得

$$s_n^*\leqslant s_m<s,$$

所以，数列 s_n^* 随 n 增大而增大，但恒小于定数 s，根据单调有界数列必有极限的准则（第一章第七节），便有

$$\lim_{n\to\infty} s_n^* = s^* \leqslant s.$$

另一方面，如果把原来级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 看成是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^*$ 改变项的位置所成的级数，则应用刚才证得的结论，又有

$$s \leqslant s^*.$$

要使得上面两个不等式同时成立，必定有

$$s^* = s.$$

(2) 再证定理对一般的绝对收敛级数是正确的。

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛．在定理 1 的证明中已得

$$u_n = 2v_n - |u_n|,$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是收敛的正项级数．故有

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (2v_n - |u_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} 2v_n - \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|.$$

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 改变项的位置后的级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^*$，则相应地 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 改变为 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^*$，$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 改变为 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n^*|$，由(1)证得的结论可知

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} v_n^*,\quad \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n^*|.$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^* = \sum_{n=1}^{\infty} 2v_n^* - \sum_{n=1}^{\infty} |u_n^*| = \sum_{n=1}^{\infty} 2v_n - \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

在给出绝对收敛级数的另一个性质以前，我们先来讨论级数的乘法运算．

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛，仿照有限项和数乘积的规则，作出这两个级数的项所有可能的乘积 $u_i v_k (i, k=1, 2, 3, \cdots)$，这些乘积也就是：

$$
\begin{array}{l}
u_1v_1,\ u_1v_2,\ u_1v_3,\ \cdots,\ u_1v_i,\ \cdots,\\
u_2v_1,\ u_2v_2,\ u_2v_3,\ \cdots,\ u_2v_i,\ \cdots,\\
u_3v_1,\ u_3v_2,\ u_3v_3,\ \cdots,\ u_3v_i,\ \cdots,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
u_kv_1,\ u_kv_2,\ u_kv_3,\ \cdots,\ u_kv_i,\ \cdots,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.
\end{array}
$$

这些乘积可以用很多的方式将它们排列成一个数列. 例如可以按"对角线法"或按"正方形法"将它们排列成下面形状的数列(图11-2):

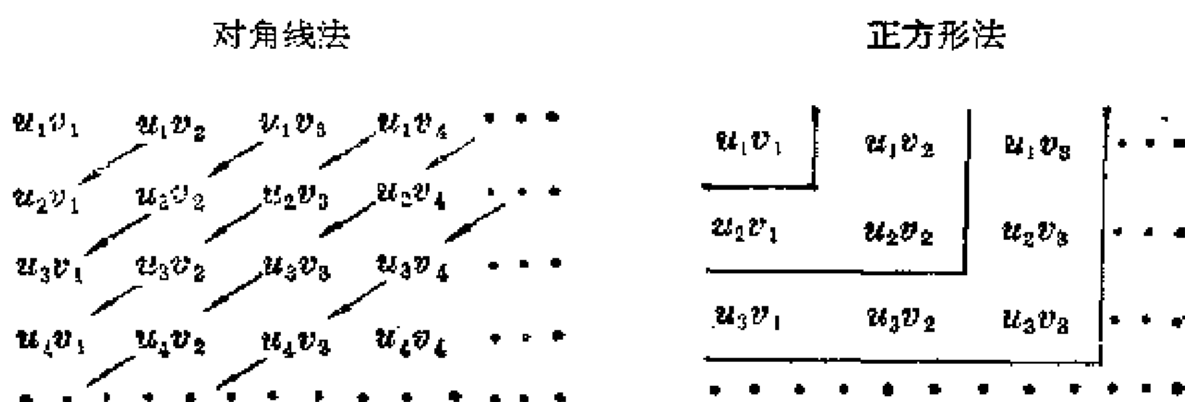


图 11-2

(对角线法) $u_1v_1;\ u_1v_2,\ u_2v_1;\ u_1v_3,\ u_2v_2,\ u_3v_1;\ \cdots.$

(正方形法) $u_1v_1;\ u_1v_2,\ u_2v_2,\ u_2v_1;\ u_1v_3,\ u_2v_3,\ u_3v_3,\ u_3v_2,\ u_3v_1;\ \cdots.$

把上面排列好的数列用加号相联, 就组成无穷级数. 我们称按"对角线法"排列所组成的级数

$$u_1v_1+(u_1v_2+u_2v_1)+\cdots+(u_1v_n+u_2v_{n-1}+\cdots+u_nv_1)+\cdots$$

为两级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 的柯西乘积.

***定理 8 (绝对收敛级数的乘法)** 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都绝对收敛, 其和分别为 s 和 σ, 则它们的柯西乘积

$$u_1v_1+(u_1v_2+u_2v_1)+\cdots$$
$$+(u_1v_n+u_2v_{n-1}+\cdots+u_nv_1)+\cdots \tag{8}$$

也是绝对收敛的，且其和为 $s\cdot\sigma$.

证 考虑把级数(8)的括弧去掉后所成的级数

$$u_1v_1+u_1v_2+u_2v_1+\cdots+u_1v_n+\cdots. \tag{9}$$

如果级数(9)绝对收敛且其和为 w，则由无穷级数的基本性质 4 及比较审敛法可知，级数(8)也绝对收敛且其和为 w. 因此只要证明级数(9)绝对收敛且其和 $w=s\cdot\sigma$ 就行了.

(1) 先证级数(9)绝对收敛.

设 w_m 为级数(9)的前 m 项分别取绝对值后所作成的和，

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|=A,\quad \sum_{n=1}^{\infty}|v_n|=B,$$

显然有
$$w_m\leqslant\sum_{n=1}^{m}|u_n|\cdot\sum_{n=1}^{m}|v_n|\leqslant A\cdot B.$$

由此可见单调增加数列 w_m 恒小于定数 AB. 所以级数(9)绝对收敛，记其和为 w.

(2) 再证 $w=s\cdot\sigma$.

把级数(9)的各项位置从新排列并加上括弧使它成为按"正方形法"排列所组成的级数

$$u_1v_1+(u_1v_2+u_2v_2+u_2v_1)+\cdots$$
$$+(u_1v_n+u_2v_n+\cdots+u_nv_n+u_nv_{n-1}+\cdots+u_nv_1)+\cdots. \tag{10}$$

根据定理 2 及无穷级数的基本性质 4 可知，对于绝对收敛级数(9)这样做法是不会改变其和的. 容易看出，级数(10)的前 n 项的和恰好为

$$(u_1+u_2+\cdots+u_n)\cdot(v_1+v_2+\cdots+v_n)=s_n\cdot\sigma_n,$$

因此，当 n 无限增大时，就有

$$w=\lim_{n\to\infty}(s_n\cdot\sigma_n)=s\cdot\sigma.$$

习 题 11-2

1. 用比较审敛法或其极限形式判别下列级数的敛散性:

(1) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$;

(2) $1+\frac{1+2}{1+2^2}+\frac{1+3}{1+3^2}+\cdots$;

(3) $\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{3\cdot6}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+4)}+\cdots$;

(4) $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2^2}+\sin\frac{\pi}{2^3}+\cdots$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}\ (a>0)$;　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$.

2. 用比值审敛法判别下列级数的敛散性:

(1) $\frac{3}{1\cdot2}+\frac{3^2}{2\cdot2^2}+\frac{3^3}{3\cdot2^3}+\cdots$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

3. 用根值审敛法判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{[\ln(n+1)]^n}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a_n}\right)^n$, 其中 $a_n\to a(n\to\infty)$, a_n, b, a 均为正数.

4. 判别下列级数的敛散性:

(1) $\frac{3}{4}+2\left(\frac{3}{4}\right)^2+3\left(\frac{3}{4}\right)^3+4\left(\frac{3}{4}\right)^4+\cdots$;

(2) $\frac{1^4}{1!}+\frac{2^4}{2!}+\frac{3^4}{3!}+\frac{4^4}{4!}+\cdots$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$;

(5) $\sqrt{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}+\cdots+\sqrt{\frac{n+1}{n}}+\cdots$;

(6) $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{3a+b}+\cdots\quad(a>0,\ b>0)$;

(7) $\frac{(1!)^2}{2\cdot1^2}+\frac{(2!)^2}{2\cdot2^2}+\frac{(3!)^2}{2\cdot3^2}+\cdots$；

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}$.

5. 判别下列级数是否收敛?如果是收敛的,是绝对收敛还是条件收敛?

(1) $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{3^{n-1}}$；

(3) $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^4}+\cdots$；

(4) $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 5}+\cdots$；

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{n^2}}{n!}$；

(6) $\frac{1}{\pi^2}\sin\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\pi^3}\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{\pi^4}\sin\frac{\pi}{4}-\cdots$.

*第三节　广义积分的审敛法　Γ-函数

一、广义积分的审敛法

在第五章中我们已经引进了两种类型的广义积分的概念：积分区间为无穷或被积函数在积分区间上具有无穷间断点。在那里，我们通过求被积函数的原函数，然后按定义取极限，根据极限的存在与否以确定广义积分的敛散性。那末，当原函数不易求出或不能求出时，又怎样来判定广义积分的敛散性呢？现在我们把研究级数所采用的比较原理以及绝对收敛的概念类似地应用到广义积分上去，从而建立了广义积分的审敛法。

先讨论积分区间为无穷的广义积分

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

同正项级数的比较审敛法相似，对于非负函数的广义积分有如下

的比较原理：

设函数 $f(x)$、$g(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 内连续．如果 $0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，并且 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛．如果 $0\leqslant g(x)\leqslant f(x)$，并且 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也发散．

事实上，设 $a<b<+\infty$，则由 $0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$ 及 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛，得

$$\int_a^b f(x)dx\leqslant\int_a^b g(x)dx\leqslant\int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

因为 $\int_a^b f(x)dx$ 是随 b 单调增加的，而上式表明它又是有界的，所以极限 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx=\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 存在①，也就是广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

收敛．

如果 $0\leqslant g(x)\leqslant f(x)$，则

$$\int_a^b f(x)dx\geqslant\int_a^b g(x)dx.$$

由 $g(x)\geqslant 0$ 及 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散可知，$\int_a^b f(x)dx$ 随 b 增大而趋于无穷大，所以极限 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ 不存在，也就是广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

发散．

我们知道，广义积分 $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx\quad(a>0)$ 当 $p>1$ 时收敛；当 $p\leqslant 1$ 时发散．因此，取 $g(x)=\frac{A}{x^p}(A>0)$，立即得到下列广义积

① 这里根据“单调有界变量必有极限”的准则。

分的比较审敛法.

比较审敛法1 设函数 $f(x)$ 在区间 $a\leqslant x<+\infty(a>0)$ 内连续，并且 $f(x)\geqslant 0$. 如果存在常数 $M>0$ 及 $p>1$，使得 $f(x)\leqslant\frac{M}{x^p}$ $(a\leqslant x<+\infty)$，则广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛；如果存在常数 $N>0$，使得 $f(x)\geqslant\frac{N}{x}(a\leqslant x<+\infty)$，则广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散.

例1 判别广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$ 的敛散性.

解 由于

$$0<\frac{1}{\sqrt[3]{x^4+1}}<\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}=\frac{1}{x^{4/3}},$$

根据比较审敛法1，这个广义积分收敛.

以比较审敛法1为基础，我们可以得到在应用上较为方便的极限审敛法.

极限审敛法1 设函数 $f(x)$ 在区间 $a\leqslant x<+\infty(a>0)$ 内连续，并且 $f(x)\geqslant 0$. 如果存在常数 $p>1$，使得 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^pf(x)$ 存在，则广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛；如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=d>0$（或 $\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=+\infty$），则广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散.

证 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^pf(x)=c\ (p>1)$. 根据极限的定义，当 x 充分大时，$x>x_1\geqslant a$，必有

$$|x^pf(x)-c|<1,$$

由此得

$$0\leqslant x^pf(x)<1+c.$$

令 $1+c=M>0$，于是在区间 $x_1<x<+\infty$ 内不等式 $0\leqslant f(x)<\frac{M}{x^p}$ 成立. 由比较审敛法1知 $\int_{x_1}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，即极限 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_{x_1}^{b}f(x)dx$ 存在. 另一方面，根据积分的性质有

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{x_1}f(x)dx+\int_{x_1}^b f(x)dx.$$

令 $b\to+\infty$，可知极限 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ 存在，即广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

收敛。

如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=d>0$（或 $+\infty$），则当 x 充分大时：$x>x_1\geqslant a$，必有

$$|xf(x)-d|<\frac{d}{2},$$

由此得
$$xf(x)>\frac{d}{2},$$

（当 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=+\infty$ 时，可取任意正数作为 d）。令 $\frac{d}{2}=N>0$，于是在区间 $x_1<x<+\infty$ 内不等式 $f(x)\geqslant\frac{N}{x}$ 成立。根据比较审敛法 1 知 $\int_{x_1}^{+\infty} f(x)dx$ 发散。又由等式

$$\int_{x_1}^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^{x_1} f(x)dx$$

看出，极限 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ 不可能存在（否则 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_{x_1}^b f(x)dx$ 也要存在，这与 $\int_{x_1}^{+\infty} f(x)dx$ 发散矛盾），即广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散。证明完毕。

例 2 判别广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ 的敛散性。

解 由于

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\cdot\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}=1,$$

根据极限审敛法 1，所给广义积分收敛。

例 3 判别广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^{3/2}}{1+x^2}dx$ 的敛散性。

解　由于

$$\lim_{x\to+\infty} x\frac{x^{3/2}}{1+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\sqrt{x}}{1+x^2}=+\infty,$$

根据极限审敛法1，所给广义积分发散．

例4　判别广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}dx$ 的敛散性．

解　由于

$$\lim_{x\to+\infty} x\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arc\,tg} x=\frac{\pi}{2},$$

所给广义积分发散．

对于具有无穷间断点的广义积分，也有类似的审敛法．

我们知道广义积分

$$\int_a^b\frac{dx}{(x-a)^q}$$

当 $q<1$ 时收敛，当 $q\geqslant1$ 时发散．于是，同理可得如下两个审敛法：

比较审敛法2　设函数 $f(x)$ 在区间 $a<x\leqslant b$ 内连续，并且 $f(x)\geqslant0$, $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=+\infty$．如果存在常数 $M>0$ 及 $q<1$，使得

$$f(x)\leqslant\frac{M}{(x-a)^q}\quad(a<x\leqslant b),$$

则广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛；如果存在常数 $N>0$ 及 $q\geqslant1$，使得

$$f(x)\geqslant\frac{N}{(x-a)^q}\quad(a<x\leqslant b),$$

则广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散．

极限审敛法2　设函数 $f(x)$ 在区间 $a<x\leqslant b$ 内连续，并且 $f(x)\geqslant0$, $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=+\infty$．如果存在常数 $0<q<1$，使得

$$\lim_{x\to a+0}(x-a)^q f(x)$$

存在，则广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛；如果存在常数 $q\geqslant 1$，使得

$$\lim_{x\to a+0}(x-a)^q f(x)=d>0 \quad (\text{或} \lim_{x\to a+0}(x-a)^q f(x)=+\infty),$$

则广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

例 5 判别广义积分 $\int_1^3 \frac{dx}{\ln x}$ 的敛散性.

解 这里积分下限 $x=1$ 为被积函数的无穷间断点. 由罗必塔法则知

$$\lim_{x\to 1+0}(x-1)\frac{1}{\ln x}=\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{\frac{1}{x}}=1>0,$$

根据极限审敛法 2，所给广义积分发散.

例 6 判别椭圆积分

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad (k^2<1)$$

的敛散性.

解 这里积分上限 $x=1$ 为被积函数的无穷间断点，由于

$$\lim_{x\to 1-0}(1-x)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$=\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-k^2x^2)}}=\frac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}}.$$

根据极限审敛法 2，所给广义积分收敛.

假定广义积分的被积函数在所讨论的范围内可取正值也可取负值. 对于这类广义积分的敛散性，我们有如下的结论：设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 内连续，如果广义积分

$$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$$

收敛，则广义积分

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx$$

收敛．这时我们称 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 为绝对收敛（关于无穷间断点的广义积分也有类似的结论）．

事实上，令 $\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+|f(x)|]$．于是函数 $\varphi(x)\geqslant 0$，并且 $\varphi(x)\leqslant |f(x)|$．由于所设 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛，从而 $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ 也收敛．但 $f(x)=2\varphi(x)-|f(x)|$，因此

$$\int_a^b f(x)dx=2\int_a^b \varphi(x)dx-\int_a^b |f(x)|dx,$$

从而有
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=2\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx-\int_a^{+\infty}|f(x)|dx.$$

可见广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 是两个收敛积分的差，它是收敛的．

例 7　判别广义积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx\,dx$（$a,b$ 都是常数，且 $a>0$）的敛散性．

解　因为 $|e^{-ax}\sin bx|\leqslant e^{-ax}$，而 $\int_0^{+\infty} e^{-ax}dx$ 收敛，根据比较原理，广义积分 $\int_0^{+\infty}|e^{-ax}\sin bx|dx$ 收敛．由上述的结论可知所给广义积分绝对收敛．

二、Γ-函　数

现在我们研究在理论和应用上有重要意义的 Γ-函数．这函数的定义是

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}dx\quad (s>0). \tag{1}$$

首先我们讨论 (1) 式右端积分的敛散性问题．这个积分一方面积分区间为无穷，另一方面当 $s-1<0$ 时被积函数在 $x=0$ 处有无穷间断点．为此，我们分别讨论下列两个积分

$$I_1=\int_0^1 e^{-x}x^{s-1}dx,\qquad I_2=\int_1^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}dx$$

的敛散性.

先讨论 I_1. 当 $s\geqslant1$ 时, I_1 是常义积分; 当 $0<s<1$ 时, 因为

$$e^{-x}\cdot x^{s-1}=\frac{1}{x^{1-s}}\cdot\frac{1}{e^x}<\frac{1}{x^{1-s}},$$

而 $1-s<1$, 根据比较审敛法 2, 广义积分 I_1 收敛.

再讨论 I_2. 因为

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot(e^{-x}x^{s-1})=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{s+1}}{e^x}=0,$$

根据极限审敛法 1, I_2 也收敛.

由以上讨论即得广义积分 $\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{s-1}dx$ 对一切 $s>0$ 均收敛. Γ-函数的图形如图 11-3 所示.

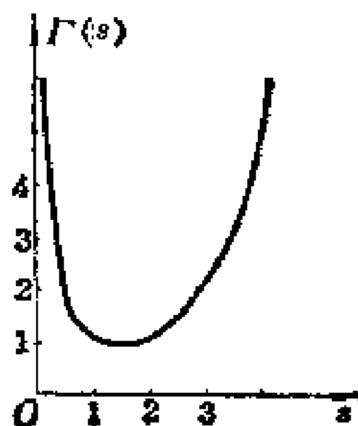


图 11-3

其次我们来导出 Γ-函数的几个重要性质.

1. 递推公式 $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$ $(s>0)$ 成立.

证 因为

$$\Gamma(s+1)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^s dx=\lim_{b\to+\infty}\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^b e^{-x}x^s dx,$$

应用分部积分法,

$$\int_\varepsilon^b e^{-x}x^s\,dx=\left[-e^{-x}x^s\right]_\varepsilon^b+s\int_\varepsilon^b e^{-x}x^{s-1}\,dx,$$

而 $\lim\limits_{b\to+\infty}\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left[e^{-x}x^s\right]_\varepsilon^b=0$, 所以

$$\Gamma(s+1)=\lim_{b\to+\infty}\lim_{\varepsilon\to+0}s\int_\varepsilon^b e^{-x}x^{s-1}\,dx=s\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{s-1}\,dx=s\Gamma(s).$$

显然, $$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=1.$$

反复运用递推公式, 便有

$$\Gamma(2)=1\cdot\Gamma(1)=1,$$

$$\Gamma(3)=2\cdot\Gamma(2)=2!$$
$$\Gamma(4)=3\cdot\Gamma(3)=3!,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

一般地,对任何正整数 n, 有

$$\Gamma(n+1)=n!$$

所以,我们可以把 Γ-函数看成是阶乘的推广.

2. 当 $s\to+0$ 时, $\Gamma(s)\to+\infty$.

证　因为

$$\Gamma(s)=\frac{\Gamma(s+1)}{s},\qquad \Gamma(1)=1,$$

所以当 $s\to+0$ 时, $\Gamma(s)\to+\infty$①.

3. 在 $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{s-1}dx$ 中,作代换 $x=u^2$,就有

$$\Gamma(s)=2\int_0^{+\infty}e^{-u^2}u^{2s-1}du. \tag{2}$$

再令 $2s-1=t$ 或 $s=\frac{1+t}{2}$, 即有

$$\int_0^{+\infty}e^{-u^2}u^t du=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1+t}{2}\right),\quad (t>-1).$$

上式左端是应用上常见的积分,它的值可以通过上式用 Γ-函数计算出来.

在(2)中, 令 $s=\frac{1}{2}$, 利用第九章第二节第二目的结果,便得

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du=\sqrt{\pi}.$$

*习　题　11-3

1. 判别下列广义积分的敛散性:

---

① Γ-函数在 $s>0$ 时连续.

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+x^2+1}\,dx$;　　(2) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$;

(3) $\int_1^{+\infty} \sin\frac{1}{x^2}\,dx$;　　(4) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x|\sin x|}$;

(5) $\int_1^{+\infty} \frac{x \operatorname{arc\,tg} x}{1+x^3}\,dx$;　　(6) $\int_1^2 \frac{dx}{(\ln x)^3}$;

(7) $\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$;　　(8) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$;

(9) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$;　　(10) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\,dx$.

2. 用 Γ-函数表示下列积分,并指出这些积分的收敛范围:

(1) $\int_0^{+\infty} e^{-x^n}\,dx\ (n>0)$;　　(2) $\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^p dx$;

(3) $\int_0^{+\infty} x^m e^{-x^n}\,dx\ (n\neq 0)$.

3. 证明 $\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right)=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2k-1)\sqrt{\pi}}{2^k}$,其中 k 为自然数.

4. 证明以下各式(其中 n 为自然数):

(1) $2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n=2^n\Gamma(n+1)$;　(2) $1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)=\frac{\Gamma(2n)}{2^{n-1}\Gamma(n)}$;

(3) $\sqrt{\pi}\,\Gamma(2n)=2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$,

(勒让德(Legendre)倍量公式).

第四节　幂　级　数

一、函数项级数的一般概念

设给定一个定义在区间 I 上的函数列

$$u_1(x),\ u_2(x),\ u_3(x),\ \cdots,\ u_n(x),\ \cdots,$$

则式子

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots \tag{1}$$

叫做(函数项)无穷级数,简称(函数项)级数.

对于 I 上的每一个值 x_0, 函数项级数(1)成为常数项级数

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+u_3(x_0)+\cdots+u_n(x_0)+\cdots. \tag{2}$$

这个级数(2)可能收敛也可能发散．如果(2)收敛，我们称点 x_0 是函数项级数(1)的收敛点．如果(2)发散，我们称点 x_0 是函数项级数(1)的发散点．函数项级数(1)的所有收敛点的全体称为它的收敛域，所有发散点的全体称为它的发散域．

对应于收敛域内的任意一个数 x，函数项级数成为一收敛的常数项级数，因而有一确定的和 s．这样，在收敛域上，函数项级数的和是 x 的函数 $s(x)$，通常称 $s(x)$ 为函数项级数的和函数，这函数的定义域就是级数的收敛域，并写成

$$s(x)=u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots.$$

把函数项级数(1)的前 n 项的部分和记作 $s_n(x)$，则在收敛域上有

$$\lim_{n\to\infty}s_n(x)=s(x).$$

我们仍把 $r_n(x)=s(x)-s_n(x)$ 叫做函数项级数的余项(当然，只有 x 在收敛域上 $r_n(x)$ 才有意义)，于是有

$$\lim_{n\to\infty}r_n(x)=0.$$

下面我们讨论各项都是幂函数的函数项级数即所谓幂级数．

二、幂级数及其收敛性

函数项级数中简单而常见的一类级数就是所谓幂级数，它的形式是①

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots, \tag{3}$$

其中常数 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 叫做幂级数的系数．例如

① 幂级数的一般形式是 $a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$．只要作代换 $t=x-x_0$，就可以把它化成(3)的形式．所以取(3)式来讨论，并不影响一般性．

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,$$

$$1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

都是幂级数.

现在我们来讨论:对于一个给定的幂级数,它的收敛域与发散域是怎样的? 即 x 取数轴上哪些点时幂级数收敛,取哪些点时幂级数发散? 这就是幂级数的收敛性问题.

先看一个例子,即考察幂级数

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$

的敛散性. 由第一节例 1 知道,当 $|x|<1$ 时,这级数收敛于和 $\frac{1}{1-x}$;当 $|x|\geqslant 1$ 时,这级数发散. 因此,这幂级数的收敛域是开区间 $(-1, 1)$,发散域是 $(-\infty, -1]$ 及 $[1, +\infty)$. 如果 x 在区间 $(-1, 1)$ 内取值,则

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots.$$

在这个例中我们看到,这个幂级数的收敛域是一个区间. 事实上,这个结论对于一般的幂级数也是成立的. 我们有如下定理.

定理 1(阿贝尔(Abel)) **如果级数(3)当 $x=x_0(x_0\neq 0)$ 时收敛,则适合不等式 $|x|<|x_0|$ 的一切 x 使幂级数(3)绝对收敛. 反之,如果当 $x=x_0$ 时级数(3)发散,则适合不等式 $|x|>|x_0|$ 的一切 x 使幂级数(3)发散.**

证 先设 x_0 是幂级数(3)的收敛点,即级数

$$a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\cdots+a_nx_0^n+\cdots$$

收敛. 根据级数收敛的必要条件,这时有

$$\lim_{n\to\infty} a_nx_0^n=0,$$

于是存在一个常数 M,使得

$$|a_n x_0^n| \leqslant M \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots).$$

这样级数(3)的一般项的绝对值可以写成

$$|a_n x^n| = \left| a_n x_0^n \cdot \frac{x^n}{x_0^n} \right| = |a_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leqslant M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n.$$

因为当 $|x|<|x_0|$ 时，等比级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ 收敛$\left(\text{公比}\left|\frac{x}{x_0}\right|<1\right)$，所以级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ 收敛，也就是级数(3)绝对收敛。

定理的第二部分可用反证法证明. 倘若幂级数当 $x=x_0$ 时发散而有一点 x_1 适合 $|x_1|>|x_0|$ 使级数收敛，则根据刚才证明的定理中第一部分，级数当 $x=x_0$ 时应收敛，这与所设矛盾. 定理得证.

定理 1 告诉我们，如果幂级数在 $x=x_0$ 处收敛，则对于开区间 $(-|x_0|,\ |x_0|)$ 内的任何 x，幂级数都收敛；如果幂级数在 $x=x_0$ 处发散，则对于闭区间 $[-|x_0|,\ |x_0|]$ 外的任何 x，幂级数都发散. 因此发散点不可能在原点与收敛点之间.

设已给幂级数在数轴上既有收敛点（不仅是原点）也有发散点. 现在从原点沿数轴向右方走，最初只遇到收敛点，然后就只遇到发散点. 这两部分的界点可能是收敛点也可能是发散点. 从原点沿数轴向左方走情形也是如此. 两个界点 P 与 P' 在原点的两侧，且由定理 1 可以证明它们到原点的距离是一样的(图 11-4).



图 11-4

从上面的几何说明，我们就得到重要的推论：

如果幂级数(3)不是仅在 $x=0$ 一点收敛，也不是在整个数轴上都收敛，则必有一个完全确定的正数 R 存在，它具有下列性质：

当 $|x|<R$ 时，幂级数(3)绝对收敛；

当 $|x|>R$ 时，幂级数(3)发散；

当 $x=R$ 与 $x=-R$ 时，幂级数(3)可能收敛也可能发散.

正数 R 通常叫做幂级数(3)的收敛半径. 由幂级数在 $x=\pm R$ 处的敛散性就可以决定它在区间 $(-R, R)$、$[-R, R)$、$(-R, R]$ 或 $[-R, R]$ 上收敛，这区间叫做幂级数(3)的收敛区间.

如果幂级数(3)只在 $x=0$ 处收敛，则规定收敛半径 $R=0$，这时收敛区间只有一点 $x=0$；如果幂级数(3)对一切 x 都收敛，则规定收敛半径 $R=+\infty$，这时收敛区间是 $(-\infty, +\infty)$.

下面讲幂级数的收敛半径的实际求法.

定理 2 设极限

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho,$$

其中 a_n、a_{n+1} 是幂级数(3)的相邻两项的系数. 如果

(i) $\rho\neq 0$，则 $R=\dfrac{1}{\rho}$；

(ii) $\rho=0$，则 $R=+\infty$；

(iii) $\rho=+\infty$，则 $R=0$.

证 考察幂级数(3)的各项取绝对值所成的级数

$$|a_0|+|a_1x|+|a_2x^2|+\cdots+|a_nx^n|+\cdots. \tag{4}$$

这级数相邻两项之比为

$$\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_nx^n|}=\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x|.$$

(i) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho\ (\rho\neq 0)$ 存在，根据比值审敛法，则当 $\rho|x|<1$ 即 $|x|<\dfrac{1}{\rho}$ 时，级数(4)收敛，从而级数(3)绝对收敛；当 $\rho|x|>1$ 即 $|x|>\dfrac{1}{\rho}$ 时，级数(4)发散并且从某一个 n 开始

$$|a_{n+1}x^{n+1}|>|a_nx^n|,$$

因此一般项 $|a_n x^n|$ 不能趋于零，所以 $a_n x^n$ 也不能趋于零，从而级数(3)发散. 这样，必然是收敛半径为 $R=\frac{1}{\rho}$.

(ii) 如果 $\rho=0$，则对一切 x，$\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|}\to 0\ (n\to\infty)$，所以级数(4)收敛，从而级数(3)绝对收敛. 于是 $R=+\infty$.

(iii) 如果 $\rho=+\infty$，则对于除 $x=0$ 外的其它一切 x 值，级数(4)都不能收敛，这时级数(3)必发散，否则由定理1知道将有点 $x\neq 0$ 使级数(4)收敛. 于是 $R=0$.

例 1 求幂级数

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$$

的收敛半径与收敛区间.

解 因为

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=1,$$

所以收敛半径

$$R=\frac{1}{\rho}=1.$$

对于端点 $x=1$，级数成为交错级数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots,$$

级数收敛；

对于端点 $x=-1$，级数成为

$$-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{n}-\cdots,$$

级数发散. 因此，收敛区间是 $(-1,1]$.

例 2 求幂级数

$$1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

的收敛区间.

解 因为

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0,$$

所以收敛半径 $R=+\infty$, 从而收敛区间是$(-\infty, +\infty)$.

例 3 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ 的收敛半径(记号 $0!=1$).

解 因为

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=+\infty,$$

所以收敛半径 $R=0$, 即级数仅在 $x=0$ 处收敛.

例 4 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$ 的收敛半径.

解 级数缺少奇次幂的项, 定理 2 不能直接应用. 我们根据比值审敛法来求收敛半径:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{[2(n+1)]!}{[(n+1)!]^2}x^{2(n+1)}:\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}\right|=4|x|^2.$$

当 $4|x|^2<1$ 即 $|x|<\frac{1}{2}$ 时级数收敛; 当 $4|x|^2>1$ 即 $|x|>\frac{1}{2}$ 时级数发散. 所以收敛半径 $R=\frac{1}{2}$.

三、幂级数的运算

设幂级数

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

及

$$b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots$$

的收敛区间分别为$(-R, R)$及$(-R', R')$, 其中 $R>0$, $R'>0$. 对

于这两个幂级数，可以进行下列四则运算：

加法：

$$(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots)$$
$$+(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots)$$
$$=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+\cdots$$
$$+(a_n+b_n)x^n+\cdots.$$

减法：

$$(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots)$$
$$-(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots)$$
$$=(a_0-b_0)+(a_1-b_1)x+(a_2-b_2)x^2+\cdots$$
$$+(a_n-b_n)x^n+\cdots.$$

根据无穷级数的基本性质 2，上面两式在 $(-R, R)$ 与 $(-R', R')$ 中较小的区间内成立.

乘法：

$$(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots)$$
$$\cdot(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots)$$
$$=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+\cdots$$
$$+(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0)x^n+\cdots.$$

这是两幂级数的柯西乘积. 可以证明上式在 $(-R, R)$ 与 $(-R', R')$ 中较小的区间内成立.

除法：

$$\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots}$$
$$=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n+\cdots,$$

这里假设 $b_0\neq 0$. 为了决定系数 $c_0, c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$，可以将级数 $\sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n$ 相乘，并令乘积中各项的系数分别等于级数

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 中同次幂的系数，即得：

$$a_0 = b_0 c_0,$$
$$a_1 = b_1 c_0 + b_0 c_1,$$
$$a_2 = b_2 c_0 + b_1 c_1 + b_0 c_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

由这些方程就可以顺序地求出 $c_0, c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$.

相除后所得的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 的收敛区间可能比原来两级数的收敛区间 $(-R, R)$, $(-R', R')$ 小得多①.

关于幂级数的分析运算，我们有下列结论②：

1. 幂级数(3)的和函数 $s(x)$ 在收敛区间 $(-R, R)$ 内是个连续函数.

2. 幂级数(3)的和函数 $s(x)$ 在收敛区间 $(-R, R)$ 内是可导的，并且有逐项求导公式

$$s'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \tag{5}$$

逐项求导后所得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径 R.

反复应用上述结论可得：幂级数(3)的和函数 $s(x)$ 在收敛区间内具有任意阶导数.

3. 幂级数(3)的和函数 $s(x)$ 在收敛区间 $(-R, R)$ 内是可积的，并且有逐项积分公式

$$\int_0^x s(x)\,dx = \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right] dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \tag{6}$$

---

① 例如

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots,$$

这里级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 1 - x$ 在整个数轴上收敛，但级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 仅在区间 $(-1, 1)$ 内收敛.

② 证明见第七节二.

其中 $|x|<R$，逐项积分后所得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径 R.

此外，如果逐项求导或逐项积分后的幂级数在 $x=R$(或 $x=-R$)处收敛，则在 $x=R$(或 $x=-R$)处，等式(5)或(6)仍成立。

例如，已知

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots\quad(-1<x<1),$$

利用结论 2，逐项求导，得

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+\cdots+nx^{n-1}+\cdots\quad(-1<x<1),$$

利用结论 3，从 0 到 x 逐项积分，得

$$-\ln(1-x)=x+\frac{1}{2}x^2+\cdots+\frac{1}{n+1}x^{n+1}+\cdots\quad(-1\leqslant x<1).$$

习　题　11-4

1．求下列幂级数的收敛区间：

(1) $x+2x^2+3x^3+\cdots$;

(2) $1-x+\frac{x^2}{2^2}-\frac{x^3}{3^2}+\cdots$;

(3) $\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2\cdot4}+\frac{x^3}{2\cdot4\cdot6}+\cdots$;

(4) $\frac{x}{1\cdot3}+\frac{x^2}{2\cdot3^2}+\frac{x^3}{3\cdot3^3}+\frac{x^4}{4\cdot3^4}+\cdots$;

(5) $\frac{2}{2}x+\frac{2^2}{5}x^2+\frac{2^3}{10}x^3+\cdots+\frac{2^n}{n^2+1}x^n+\cdots$;

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$;

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$.

2．利用逐项求导或逐项积分，求下列级数在收敛区间内的和函数：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \quad (-1<x<1)$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} \quad (-1<x<1)$;

(3) $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots \quad (-1<x<1)$. 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^n}$ 的和.

第五节　函数展开成幂级数

一、泰 勒 级 数

在第三章第三节中我们已经看到，若函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 的某一邻域内具有直到 $(n+1)$ 阶的导数，则有 n 阶泰勒公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x) \tag{1}$$

成立，其中 $R_n(x)$ 为拉格朗日型余项：

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

ξ 是 x 与 x_0 之间的某个值．这时，$f(x)$ 可以用 n 次多项式

$$p_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{2}$$

来近似表达，并且误差等于余项的绝对值 $|R_n(x)|$．显然，如果 $|R_n(x)|$ 随着 n 的增大而减小，那末我们就可以用增加多项式 (2) 的项数的办法来提高精确度．

现假设在所论邻域内 $f(x)$ 具有各阶导数 $f'(x)$, $f''(x)$, $\cdots$, $f^{(n)}(x)$, $\cdots$, 并且余项 $R_n(x)$ 的极限为零：

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0.$$

这时，我们把泰勒公式(1)写成

$$f(x)-\left[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right]=R_n(x),$$

或
$$f(x)-s_{n+1}(x)=R_n(x),$$

其中 $s_{n+1}(x)$ 表示幂级数

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots \tag{3}$$

的前 $(n+1)$ 项的和．级数(3)叫做函数 $f(x)$ 的泰勒级数．当 n 无限增大时，我们有

$$\lim_{n\to\infty}[f(x)-s_{n+1}(x)]=\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0,$$

即
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}s_{n+1}(x),$$

这说明函数 $f(x)$ 的泰勒级数(3)收敛，且以 $f(x)$ 为和函数．

反之，假设在所论邻域内 $f(x)$ 具有各阶导数，从而可作出 $f(x)$ 的泰勒级数(3)．如果这级数收敛于和 $f(x)$，则

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}[f(x)-s_{n+1}(x)]=f(x)-f(x)=0.$$

这样，综合以上分析，可得如下结论：

函数 $f(x)$ 的泰勒级数在 x_0 的某邻域内收敛于 $f(x)$ 的充分必要条件是，$f(x)$ 的泰勒公式中余项 $R_n(x)$ 当 n 无限增大时它的极限等于零．

可见，在 x_0 的邻域内，当 $R_n(x)\to 0\ (n\to\infty)$ 时，函数 $f(x)$ 的泰勒级数(3)就是函数 $f(x)$ 的精确表达式：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots. \tag{4}$$

这时我们也说函数 $f(x)$ 展开成泰勒级数.

当 $x_0=0$ 时,(4)式成为下列重要的形式:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots. \quad (5)$$

右边的级数叫做函数 $f(x)$ 的麦克劳林级数.

将函数展开成泰勒级数, 就是用幂级数表示函数. 现在我们证明这种展开式是唯一的,也就是可以证明如下结论:

如果函数 $f(x)$ 能够表达为 x 的幂级数,即

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots, \quad (6)$$

那末这个幂级数与函数 $f(x)$ 的麦克劳林级数(5)是一致的.

事实上,因为幂级数(6)在收敛区间内可以逐项求导,所以有

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots,$$

$$f''(x)=2!a_2+3\cdot 2a_3x+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\cdots,$$

$$f'''(x)=3!a_3+\cdots+n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}+\cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$f^{(n)}(x)=n!a_n+(n+1)n(n-1)\cdot\cdots\cdot 2a_{n+1}x+\cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

把 $x=0$ 代入以上各式,得

$$a_0=f(0),\ a_1=f'(0),\ a_2=\frac{f''(0)}{2!},\ \cdots,\ a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!},\ \cdots.$$

这就是所要证明的.

二、函数展开成幂级数

要把函数 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数,可以按照下列步骤进行:

第一步　求出 $f(x)$ 的各阶导数 $f'(x), f''(x), \cdots, f^{(n)}(x), \cdots$. 如果在 $x=0$ 处某阶导数不存在, 就停止进行, 例如在点 $x=0$ 处, $f(x)=x^{7/3}$ 的三阶导数不存在,它就不能展开为 x 的幂级数.

第二步　求函数及其各阶导数在 $x=0$ 处的值:

$$f(0),\ f'(0),\ f''(0),\ \cdots,\ f^{(n)}(0),\cdots.$$

第三步　求出幂级数

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

的收敛半径 R.

第四步　考察当 x 在收敛区间 $(-R,\ R)$ 内时余项 $R_n(x)$ 的极限

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(\xi\text{ 在 }0\text{ 与 }x\text{ 之间})$$

是否为零. 如果为零,第三步求出的幂级数就是函数 $f(x)$ 的幂级数展开式.

例 1　将函数 $f(x)=e^x$ 展开成 x 的幂级数.

解　所给函数的各阶导数为 $f^{(n)}(x)=e^x\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$,因此 $f^{(n)}(0)=1(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$,这里记号 $f^{(0)}(0)=f(0)$. 于是得级数

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,$$

它的收敛半径为 $R=+\infty$.

对于任何有限的数 x、ξ(ξ 在 0 与 x 之间),余项的绝对值为

$$|R_n(x)|=\left|\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|<e^{|x|}\cdot\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

因 $e^{|x|}$ 有限,而 $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ 是收敛级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ 的一般项,所以当 $n\to\infty$ 时, $e^{|x|}\cdot\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\to 0$, 即当 $n\to\infty$ 时,有 $|R_n(x)|\to 0$.

这样我们得展开式

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\quad(-\infty<x<+\infty).\qquad(7)$$

例 2　将函数 $f(x)=\sin x$ 展开成 x 的幂级数.

解 所给函数的各阶导数为

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)\quad(n=1,\ 2,\ \cdots),$$

$f^{(n)}(0)$顺序循环地取 0, 1, 0, -1, $\cdots(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$，于是得级数

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots,$$

它的收敛半径为 $R=+\infty$.

对于任何有限的数 x、ξ(ξ 在 0 与 x 之间)，余项的绝对值当 $n\to\infty$ 时的极限为零：

$$|R_n(x)|=\left|\frac{\sin\left[\xi+\frac{(n+1)\pi}{2}\right]}{(n+1)!}x^{n+1}\right|$$
$$\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\to 0\quad(n\to\infty).$$

因此得展开式

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots$$
$$(-\infty<x<+\infty).\qquad(8)$$

以上将函数展开成幂级数的例子，是直接按公式 $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ 计算幂级数的系数，最后考察余项 $R_n(x)$是否趋于零. 这种直接展开的方法计算量较大，而且研究余项即使在初等函数中也不是一件容易的事. 下面，我们利用一些已知的函数展开式以及幂级数的运算，如四则运算，逐项求导，逐项积分等等，将所给函数展开成幂级数. 这样做不但计算简单，而且常常可以避免直接研究余项. 根据函数展开成幂级数的唯一性，可知这与直接方法所得的结果是一致的.

例 3 将函数 $\cos x$ 展开成 x 的幂级数.

解 本题与例2相仿，当然可以应用直接方法，但如果应用间接方法，则比较简便．事实上，对展开式(8)逐项求导就得

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

$$(-\infty<x<+\infty). \qquad (9)$$

例4 将函数 $\frac{1}{1+x^2}$ 展开成 x 的幂级数．

解 因为

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots \quad (-1<x<1),$$

把 x 换成 $-x^2$，得

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots \quad (-1<x<1).$$

例5 将函数 $f(x)=\ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数．

解 因为

$$f'(x)=\frac{1}{1+x},$$

而 $\frac{1}{1+x}$ 是收敛的等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ $(-1<x<1)$ 的和函数：

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots \quad (-1<x<1),$$

所以将上式从0到 x 逐项积分，得

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

$$+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots \quad (-1<x\leqslant 1). \qquad (10)$$

展开式(10)对于 $x=1$ 也是正确的，于是有

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n+1}+\cdots.$$

例6 将函数 $f(x)=(1+x)^m$ 展开成 x 的幂级数，其中 m 为

任意常数.

解 $f(x)$的各阶导数为

$$f'(x)=m(1+x)^{m-1},$$

$$f''(x)=m(m-1)(1+x)^{m-2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$f^{(n)}(x)=m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)(1+x)^{m-n},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

所以 $f(0)=1,\quad f'(0)=m,\quad f''(0)=m(m-1),\ \cdots,$

$$f^{(n)}(0)=m(m-1)\cdots(m-n+1),$$

$$\cdots\cdots,$$

于是得级数

$$1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots.$$

这级数相邻两项的系数之比的绝对值为

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{m-n}{n+1}\right|\to 1\quad (n\to\infty),$$

因此,对于任意m这级数在开区间$(-1,\ 1)$内收敛.

为了避免直接研究余项,设这级数的和函数为$F(x)$:

$$F(x)=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots$$
$$+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots\quad (-1<x<1),$$

我们来证明$F(x)=(1+x)^m$.

逐项求导,得

$$F'(x)=m\left[1+\frac{m-1}{1}x+\cdots+\frac{(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}+\cdots\right],$$

两边各乘以$(1+x)$,并把含有$x^n(n=1,\ 2,\ \cdots)$的两项合并起来.根据恒等式

$$\frac{(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!}+\frac{(m-1)\cdots(m-n)}{n!}$$

$$=\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}\quad (n=1,\ 2,\ \cdots),$$

我们有

$$(1+x)F'(x)$$

$$=m\Big[1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots$$

$$+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots\Big]=mF(x)$$

$$(-1<x<1).$$

现在令 $$\varphi(x)=\frac{F(x)}{(1+x)^m},$$

于是 $\varphi(0)=F(0)=1$，且

$$\varphi'(x)=\frac{(1+x)^mF'(x)-m(1+x)^{m-1}F(x)}{(1+x)^{2m}}$$

$$=\frac{(1+x)^{m-1}[(1+x)F'(x)-mF(x)]}{(1+x)^{2m}}=0,$$

所以 $\varphi(x)=c$(常数)．但是 $\varphi(0)=1$，从而 $\varphi(x)=1$，即

$$F(x)=(1+x)^m.$$

因此在区间$(-1,\ 1)$内，我们有展开式

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots$$

$$+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots\quad (-1<x<1).\quad (11)$$

在区间的端点，展开式是否正确要看m的数值而定．

公式(11)叫做二项展开式．特殊地，当m为正整数时，级数为x的m次多项式，这就是代数学中的二项式定理．

对应于$m=\frac{1}{2}$、$-\frac{1}{2}$的二项展开式分别为

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot4}x^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}x^3-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}x^4+\cdots$$

$$(-1\leqslant x\leqslant1),$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}x^4-\cdots$$

$$(-1<x\leqslant1).$$

最后再举一个将函数展开成$(x-x_0)$的幂级数的例子。

例 7 将函数 $\sin x$ 展开成 $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的幂级数.

解 因为

$$\begin{aligned}\sin x&=\sin\left[\frac{\pi}{4}+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]\\&=\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\frac{\pi}{4}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right],\end{aligned}$$

并且有(见例 2, 例 3)

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1-\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!}+\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4}{4!}-\cdots$$

$$(-\infty<x<+\infty),$$

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!}+\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^5}{5!}-\cdots$$

$$(-\infty<x<+\infty),$$

所以

$$\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!}-\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!}+\cdots\right]$$

$$(-\infty<x<+\infty).$$

习 题 11-5

1. 求函数 $f(x)=\cos x$ 的泰勒级数，并验证它在整个数轴上收敛于这函数.

2. 将下列函数展开成 x 的幂级数，并求其收敛区间：

(1) $\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$；　　(2) $\ln(a+x)\quad(a>0)$；

(3) a^x；　　(4) $\sin\frac{x}{2}$；

(5) $\sin^2 x$；　　(6) $(1+x)\ln(1+x)$；

(7) $\arcsin x$；　　(8) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

3. 将下列函数展开成 $(x-1)$ 的幂级数，并求其收敛区间：

(1) $\sqrt{x^3}$；　　(2) $\lg x$.

4. 将函数 $f(x)=\cos x$ 展开成 $\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的幂级数.

5. 将函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 展开成 $(x-3)$ 的幂级数.

6. 将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数.

第六节　函数的幂级数展开式的应用

一、近 似 计 算

有了函数的幂级数展开式，就可用它来进行近似计算，即在展开式有效的区间上，函数值可以近似地利用这个级数按精确度要求计算出来.

例1　计算 $\sqrt[5]{240}$ 的近似值，精确到小数四位①.

解　因为

$$\sqrt[5]{240}=\sqrt[5]{243-3}=3\left(1-\frac{1}{3^4}\right)^{1/5},$$

① 精确到小数 k 位也说成精确到 $\underbrace{0.00\cdots01}_{k个}$，它是指误差不超过 10^{-k}.

所以在二项展开式(第五节(11)式)中取 $m=\frac{1}{5}$, $x=-\frac{1}{3^4}$, 即得

$$\sqrt[5]{240}=3\left(1-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^4}-\frac{1\cdot 4}{5^2\cdot 2!}\cdot\frac{1}{3^8}-\frac{1\cdot 4\cdot 9}{5^3\cdot 3!}\frac{1}{3^{12}}-\cdots\right).$$

这个级数收敛很快. 取前两项的和作为 $\sqrt[5]{240}$ 的近似值, 其误差(也叫做截断误差)为

$$\begin{aligned}|r_2|&=3\left(\frac{1\cdot 4}{5^2\cdot 2!}\cdot\frac{1}{3^8}+\frac{1\cdot 4\cdot 9}{5^3\cdot 3!}\cdot\frac{1}{3^{12}}+\frac{1\cdot 4\cdot 9\cdot 14}{5^4\cdot 4!}\cdot\frac{1}{3^{16}}+\cdots\right)\\&<3\cdot\frac{1\cdot 4}{5^2\cdot 2!}\cdot\frac{1}{3^8}\left[1+\frac{1}{81}+\left(\frac{1}{81}\right)^2+\cdots\right]\\&=\frac{6}{25}\cdot\frac{1}{3^8}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{81}}=\frac{1}{25\cdot 27\cdot 40}<\frac{1}{20000}\end{aligned}$$

于是取近似式为

$$\sqrt[5]{240}\approx 3\left(1-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^4}\right).$$

为了使"四舍五入"引起的误差(叫做舍入误差)与截断误差之和不超过 10^{-4}, 计算时应取五位小数. 因此最后得

$$\sqrt[5]{240}\approx 2.9926.$$

例 2 计算 $\ln 2$ 的近似值, 要求误差不超过 0.0001.

解 在上节我们已经得到

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots.$$

如果取这级数前 n 项的和作为 $\ln 2$ 的近似值, 其误差为

$$|r_n|\leqslant\frac{1}{n+1}$$

(见第二节第二目). 为了保证误差不超过 10^{-4}, 就需要取级数的前 10000 项进行计算. 这样做计算量太大了, 我们必需用收敛较快的级数来代替它.

把展开式

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots \quad (-1<x\leqslant 1)$$

中 x 换成 $-x$, 得

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots \quad (-1\leqslant x<1),$$

两式相减, 得到不含有偶次幂的展开式:

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)$$

$$=2\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots\right) \quad (-1<x<1).$$

令 $\frac{1+x}{1-x}=2$, 解出 $x=\frac{1}{3}$. 以 $x=\frac{1}{3}$ 代入最后一个展开式, 得

$$\ln 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}+\cdots\right).$$

如果取前四项作为 $\ln 2$ 的近似值, 则误差为

$$|r_4|=2\left(\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3^9}+\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{3^{11}}+\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{3^{13}}+\cdots\right)$$

$$<\frac{2}{3^{11}}\left[1+\frac{1}{9}+\left(\frac{1}{9}\right)^2+\cdots\right]$$

$$=\frac{2}{3^{11}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{1}{4\cdot 3^9}<\frac{1}{70000}.$$

于是取 $$\ln 2\approx 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}\right);$$

同样地, 考虑到舍入误差, 计算时应取五位小数:

$$\frac{1}{3}\approx 0.33333,\ \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}\approx 0.01235,$$

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}\approx 0.00082,\ \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}\approx 0.00007.$$

因此得 $$\ln 2 \approx 0.6931.$$

例 3 利用 $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$ 求 $\sin 9°$ 的近似值，并估计误差.

解 首先把角度化成弧度，

$$9° = \frac{\pi}{180} \times 9(\text{弧度}) = \frac{\pi}{20}(\text{弧度}),$$

从而 $$\sin\frac{\pi}{20} \approx \frac{\pi}{20} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^3.$$

其次估计这个近似值的精确度. 在 $\sin x$ 的幂级数展开式(第五节(8)式)中令 $x = \frac{\pi}{20}$，得

$$\sin\frac{\pi}{20} = \frac{\pi}{20} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^5 - \frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^7 + \cdots.$$

等式右端是一个收敛的交错级数，且各项的绝对值单调减少. 取它的前两项之和作为 $\sin\frac{\pi}{20}$ 的近似值，其误差为

$$|r_2| \leqslant \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^5 < \frac{1}{120}\cdot(0.2)^5 < \frac{1}{300000}.$$

因此取 $$\frac{\pi}{20} \approx 0.157080, \qquad \left(\frac{\pi}{20}\right)^3 \approx 0.003876.$$

于是得 $$\sin 9° \approx 0.15643.$$

这时误差不超过 10^{-5}.

利用幂级数不仅可计算一些函数的近似值，而且可计算一些定积分的近似值. 具体地说，如果被积函数在积分区间上能展开成幂级数，则把这个幂级数逐项积分，用积分后的级数就可算出定积分的近似值.

例 4 计算定积分

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}dx$$

的近似值，精确到 0.0001 $\left(\text{取} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\approx 0.56419\right)$.

解 将 e^x 的幂级数展开式(第五节(7)式)中的 x 换成 $-x^2$，就得到被积函数的幂级数展开式

$$e^{-x^2}=1+\frac{(-x^2)}{1!}+\frac{(-x^2)^2}{2!}+\frac{(-x^2)^3}{3!}+\cdots$$

$$(-\infty<x<+\infty).$$

于是

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}dx=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\cdots\right)dx$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5\cdot 2!}-\frac{x^7}{7\cdot 3!}+\cdots\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1-\frac{1}{2^2\cdot 3}+\frac{1}{2^4\cdot 5\cdot 2!}-\frac{1}{2^6\cdot 7\cdot 3!}+\cdots\right).$$

取前四项的和作为近似值，其误差为

$$|r_4|\leqslant\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{2^8\cdot 9\cdot 4!}<\frac{1}{90000},$$

所以

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}dx\approx\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1-\frac{1}{2^2\cdot 3}+\frac{1}{2^4\cdot 5\cdot 2!}-\frac{1}{2^6\cdot 7\cdot 3!}\right),$$

或

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}dx\approx 0.5205.$$

例 5 计算积分

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x}\,dx$$

的近似值，精确到 0.0001.

解 由于 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，因此所给积分不是广义积分．如果定义函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $x=0$ 处的值为 1，则它在积分区间 [0, 1] 上连续．

展开被积函数，有

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots\quad(-\infty<x<+\infty).$$

在区间[0, 1]上逐项积分，得

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x}\,dx=1-\frac{1}{3\cdot3!}+\frac{1}{5\cdot5!}-\frac{1}{7\cdot7!}+\cdots.$$

因为第四项

$$\frac{1}{7\cdot7!}<\frac{1}{30000},$$

所以取前三项的和作为积分的近似值：

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x}\,dx\approx1-\frac{1}{3\cdot3!}+\frac{1}{5\cdot5!},$$

或

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x}\,dx\approx0.9461.$$

二、欧 拉 公 式

设有复数项级数为

$$(u_1+iv_1)+(u_2+iv_2)+\cdots+(u_n+iv_n)+\cdots,\tag{1}$$

其中 u_n, v_n $(n=1, 2, 3, \cdots)$ 为实常数或实函数．如果实部所成的级数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots\tag{2}$$

收敛于和 u，并且虚部所成的级数

$$v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots\tag{3}$$

收敛于和 v，就说级数(1)收敛且其和为 $u+iv$．

如果级数(1)各项的模所构成的级数

$$\sqrt{u_1^2+v_1^2}+\sqrt{u_2^2+v_2^2}+\cdots+\sqrt{u_n^2+v_n^2}+\cdots \tag{4}$$

收敛，由于

$$|u_n|\leqslant\sqrt{u_n^2+v_n^2},\quad |v_n|\leqslant\sqrt{u_n^2+v_n^2}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots),$$

那末级数(2)，(3)绝对收敛，从而级数(1)收敛．这时就说级数(1)绝对收敛．

考察复数项级数

$$1+z+\frac{1}{2!}z^2+\cdots+\frac{1}{n!}z^n+\cdots\quad (z=x+iy). \tag{5}$$

可以证明级数(5)在整个复平面上是收敛的．在 x 轴上 $(z=x)$ 它表示指数函数 e^x，在整个复平面上我们用它来定义复变量指数函数，记作 e^z．于是 e^z 定义为

$$e^z=1+z+\frac{1}{2!}z^2+\cdots+\frac{1}{n!}z^n+\cdots\quad (|z|<\infty). \tag{6}$$

当 $x=0$ 时，z 为纯虚数 iy，(6)式成为

$$\begin{aligned}e^{iy}&=1+iy+\frac{1}{2!}(iy)^2+\frac{1}{3!}(iy)^3+\cdots+\frac{1}{n!}(iy)^n+\cdots\\&=1+iy-\frac{1}{2!}y^2-i\frac{1}{3!}y^3+\frac{1}{4!}y^4+i\frac{1}{5!}y^5-\cdots\\&=\left(1-\frac{1}{2!}y^2+\frac{1}{4!}y^4-\cdots\right)+i\left(y-\frac{1}{3!}y^3+\frac{1}{5!}y^5-\cdots\right)\\&=\cos y+i\sin y.\end{aligned}$$

把 y 换写为 x，上式变为

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x, \tag{7}$$

这就是欧拉(Euler)公式．

应用公式(7)，复数 z 可以表示为指数形式：

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}, \tag{8}$$

其中 $r=|z|$ 是 z 的模，$\theta=\arg z$ 是 z 的辐角(图 11-5)．

在(7)式中把 x 换为 $-x$, 又有

$$e^{-ix}=\cos x-i\sin x.$$

与(7)相加、相减,得

$$\begin{cases}\cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},\\ \sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.\end{cases} \tag{9}$$

这也叫做欧拉公式. (7)式或(9)式揭示了三角函数与复变量指数函数的一种联系.

最后, 根据定义(6), 并利用幂级数的乘法,我们不难验证

$$e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}.$$

特殊地, 取 z_1 为实数 x, z_2 为纯虚数 iy, 则有

$$e^{x+iy}=e^x\cdot e^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y).$$

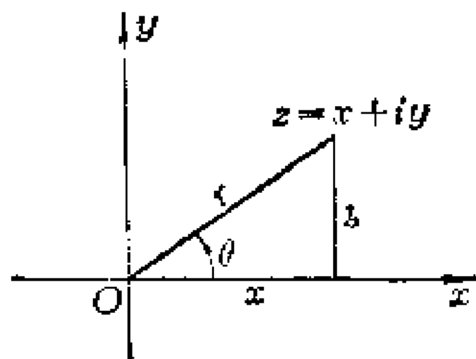


图 11-5

这就是说, 复变量指数函数 e^z 在 $z=x+iy$ 处的值是模为 e^x、辐角为 y 的复数.

习 题 11-6

1. 利用函数的幂级数展开式求下列各数的近似值:

(1) $\ln 3$(精确到 0.0001);

(2) $\sqrt{e}$ (精确到 0.001);

(3) $\sqrt[9]{522}$(精确到 0.00001);

(4) $\cos 2°$(精确到 0.0001).

2. 利用被积函数的幂级数展开式求下列定积分的近似值:

(1) $\int_0^{0.5}\frac{1}{1-x^4}dx$ (精确到 0.0001);

(2) $\int_0^{0.5}\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}dx$ (精确到 0.001).

*第七节　函数项级数的一致收敛性及一致收敛级数的基本性质

一、函数项级数的一致收敛性

我们知道，有限个连续函数的和仍然是连续函数，有限个函数的和的导数及积分也分别等于它们的导数及积分的和．但是对于无穷多个函数的和是否也具有这些性质呢？换句话说，无穷多个连续函数的和$s(x)$是否仍然是连续函数？无穷多个函数的导数及积分的和是否仍然分别等于它们的和函数的导数及积分呢？我们已经知道，对于幂级数来说，回答是肯定的．但是，对于一般的函数项级数是否都是如此呢？下面来看一个例子．

例 1　函数项级数

$$x+(x^2-x)+(x^3-x^2)+\cdots+(x^n-x^{n-1})+\cdots$$

的每一项都在$[0,\ 1]$上连续，其前n项之和为$s_n(x)=x^n$，因此和函数为

$$s(x)=\lim_{n\to\infty}s_n(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x=1,\end{cases}$$

这和函数$s(x)$在$x=1$处间断．由此可见，函数项级数的每一项在$[a,\ b]$上连续，并且级数在$[a,\ b]$上收敛，其和函数不一定在$[a,\ b]$上连续．也可以举出这样的例子，函数项级数的每一项的导数及积分所成的级数的和并不等于它们的和函数的导数及积分．这就提出了这样一个问题：对什么级数，能够从级数每一项的连续性得出它的和函数的连续性，从级数的每一项的导数及积分所成的级数之和得出原来级数的和函数的导数及积分呢？要回答这个问题，就需要引入下面的函数项级数的一致收敛性概念．

设函数项级数

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$$

在区间 I 上收敛于和 $s(x)$. 也就是对于区间 I 上的每一个值 x_0, 数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛于 $s(x_0)$, 即部分和数列

$$s_n(x_0)=\sum_{i=1}^{n} u_i(x_0) \to s(x_0) \quad (n\to\infty).$$

按数列极限的定义,对于任意给定的正数 ε, 以及区间 I 上的每一个值 x_0, 都存在着一个自然数 N, 使得当 $n>N$ 时,有不等式

$$|s(x_0)-s_n(x_0)|<\varepsilon,$$

即
$$|r_n(x_0)|=\left|\sum_{i=n+1}^{\infty} u_i(x_0)\right|<\varepsilon.$$

这个数 N 一般说来不仅依赖于 ε, 而且也依赖于 x_0, 我们记它为 $N(x_0, \varepsilon)$. 如果对于某一函数项级数能够找到这样一个自然数 N, 它只依赖于 ε 而不依赖于 x_0, 也就是对区间 I 上的每一个 x_0 值都适用的 $N(\varepsilon)$, 对这类级数我们给一个特殊的名称以区别于一般的收敛级数,这就是下面的一致收敛的定义.

定义 设有函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. 如果对于任意给定的正数 ε, 都存在着一个只依赖于 ε 的自然数 N, 使得当 $n>N$ 时, 对区间 I 上的一切 x, 都有不等式

$$|r_n(x)|=|s(x)-s_n(x)|<\varepsilon$$

成立, 则称函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛于和 $s(x)$, 也称函数序列 $s_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛于 $s(x)$.

以上函数项级数一致收敛的定义在几何上可解释为: 只要 n 充分大($n>N$), 在区间 I 上所有曲线 $y=s_n(x)$ 将位于曲线

$$y=s(x)+\varepsilon$$

和
$$y=s(x)-\varepsilon$$

之间(图 11-6).

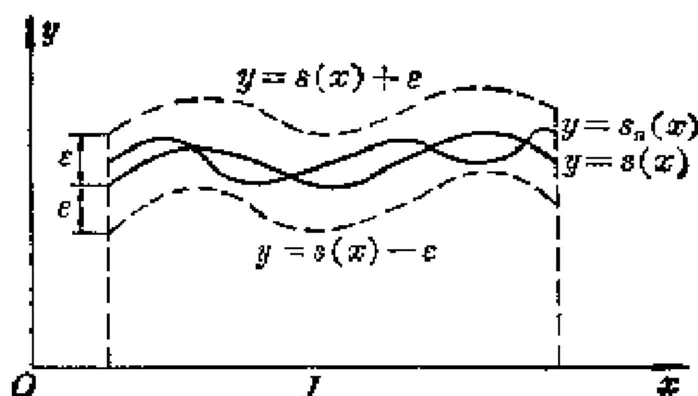


图 11-6

例 2 研究级数

$$\frac{1}{x+1}+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{x+n}-\frac{1}{x+n-1}\right)+\cdots$$

在区间$[0, +\infty)$上的一致收敛性.

解 级数的前 n 项和为 $s_n(x)=\frac{1}{x+n}$,因此级数的和为

$$s(x)=\lim_{n\to\infty}s_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x+n}=0 \quad (0\leqslant x<+\infty).$$

于是,余项的绝对值

$$|r_n(x)|=|s(x)-s_n(x)|=\frac{1}{x+n}\leqslant\frac{1}{n} \quad (0\leqslant x<+\infty).$$

对于任给 $\varepsilon>0$, 取自然数 $N\geqslant\frac{1}{\varepsilon}$, 则当 $n>N$ 时, 对于区间$[0, +\infty)$上的一切 x, 有

$$|r_n(x)|<\varepsilon.$$

根据定义,所给级数在区间$[0, +\infty)$上一致收敛于 $s(x)\equiv 0$.

例 3 研究例 1 中的级数

$$x+(x^2-x)+\cdots+(x^n-x^{n-1})+\cdots$$

在区间$(0, 1)$上的一致收敛性.

解 这级数在区间$(0, 1)$上处处收敛于和 $s(x)\equiv 0$, 但并不一致收敛. 事实上,这个级数的部分和为 $s_n(x)=x^n$, 对于任意一个

自然数 n，取 $x_n=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$，于是

$$s_n(x_n)=x_n^n=\frac{1}{2},$$

但 $s(x_n)=0$，从而

$$|r_n(x_n)|=|s(x_n)-s_n(x_n)|=\frac{1}{2}.$$

所以，只要取 $\varepsilon<\frac{1}{2}$，不论 n 多么大，在 $(0, 1)$ 上总存在这样的点 x_n，使得 $|r_n(x_n)|>\varepsilon$，因此所给级数在 $(0, 1)$ 上不一致收敛. 这表明虽然函数序列 $s_n(x)=x^n$ 在 $(0, 1)$ 上处处收敛于 $s(x)\equiv0$，但 $s_n(x)$ 在 $(0, 1)$ 上各点处收敛于零的"快慢"程度是不一致的，从图 11-7 中我们也可以看出这一情形.

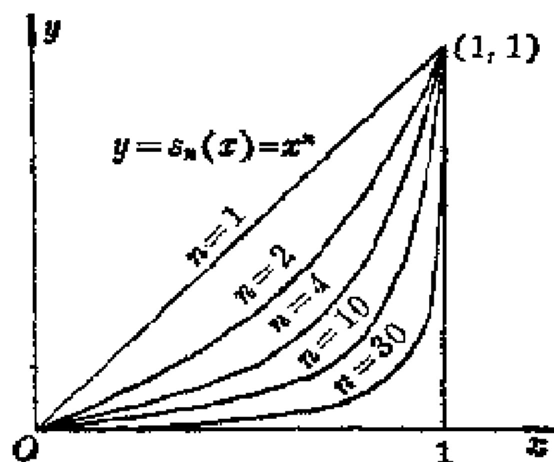


图 11-7

可是对于任意正数 $r<1$，级数在 $[0, r]$ 上一致收敛. 这是因为当 $x=0$ 时，显然

$$|r_n(x)|=x^n<\varepsilon;$$

当 $0<x\leqslant r$ 时，要使 $x^n<\varepsilon$（不妨设 $\varepsilon<1$），只要 $n\ln x<\ln\varepsilon$ 或 $n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln x}$，而 $\frac{\ln\varepsilon}{\ln x}$ 在 $(0, r]$ 上的最大值为 $\frac{\ln\varepsilon}{\ln r}$，故取自然数 $N\geqslant\frac{\ln\varepsilon}{\ln r}$，则当 $n>N$ 时，对 $[0, r]$ 上的一切 x 都有 $x^n<\varepsilon$.

上述例子也说明了一致收敛性与所讨论的区间有关. 以上二例都是直接根据定义来判定级数的一致收敛性的，现在讲一个在实用上较方便的判别法.

维尔斯脱拉斯（Weierstrass）判别法 如果函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 I 上满足条件：

(i) $|u_n(x)| \leqslant a_n \qquad (n=1, 2, 3, \cdots)$;

(ii) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,

则函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛且绝对收敛.

证 由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性,对任给的 $\varepsilon>0$, 可得 $N(\varepsilon)$, 当 $n>N(\varepsilon)$ 时,有

$$a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots<\varepsilon,$$

但对 I 上的一切 x, 按假设有

$$\begin{aligned}|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots| &\leqslant |u_{n+1}(x)|+|u_{n+2}(x)|+\cdots \\ &\leqslant a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots<\varepsilon,\end{aligned}$$

因此函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛且绝对收敛.

例 4 证明级数

$$\frac{\sin x}{1^2}+\frac{\sin 2^2 x}{2^2}+\cdots+\frac{\sin n^2 x}{n^2}+\cdots$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

证 因为在 $(-\infty, +\infty)$ 上

$$\left|\frac{\sin n^2 x}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2} \quad (n=1, 2, 3, \cdots),$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛,故由维尔斯脱拉斯判别法,所给级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

二、一致收敛级数的基本性质

一致收敛级数有如下基本性质.

定理 1 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的各项 $u_n(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上都连续,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上一致收敛于 $s(x)$, 则 $s(x)$ 在

$[a, b]$上也连续。

证 设x_0, x为$[a, b]$上任意二点. 由等式

$$s(x)=s_n(x)+r_n(x),\ s(x_0)=s_n(x_0)+r_n(x_0)$$

得

$$\begin{aligned}|s(x)-s(x_0)|&=|s_n(x)-s_n(x_0)+r_n(x)-r_n(x_0)|\\&\leqslant|s_n(x)-s_n(x_0)|+|r_n(x)|+|r_n(x_0)|.\end{aligned}\tag{1}$$

因为级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$一致收敛于$s(x)$, 所以对任意给定的正数$\varepsilon$, 必有自然数$N=N(\varepsilon)$, 使得当$n>N$时, 对$[a, b]$上的一切$x$, 都有

$$|r_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3}.\tag{2}$$

当然, 也有$|r_n(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}$. 选定满足大于$N$的$n$之后, $s_n(x)$是有限项连续函数之和, 故$s_n(x)$在点x_0连续, 从而必有一个$\delta>0$存在, 当$|x-x_0|<\delta$时, 总有

$$|s_n(x)-s_n(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}.\tag{3}$$

由(1)、(2)、(3)可见, 对任给$\varepsilon>0$, 必有$\delta>0$, 当$|x-x_0|<\delta$时, 有

$$|s(x)-s(x_0)|<\varepsilon.$$

所以$s(x)$在x_0处连续, 而x_0在$[a, b]$上是任意的, 因此$s(x)$在$[a, b]$上连续.

定理2 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的各项$u_n(x)$在区间$[a, b]$上连续, 且$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a, b]$上一致收敛于$s(x)$, 则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a, b]$上可以逐项积分, 即

$$\int_{x_0}^{x}s(x)dx=\int_{x_0}^{x}u_1(x)dx+\int_{x_0}^{x}u_2(x)dx+\cdots+\int_{x_0}^{x}u_n(x)dx+\cdots,\tag{4}$$

其中 $a\leqslant x_0<x\leqslant b$，并且上式右端的级数在$[a, b]$上也一致收敛。

证 因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在$[a, b]$上一致收敛，由定理 1，$s(x)$，$r_n(x)$都在$[a, b]$上连续，所以积分 $\int_{x_0}^{x} s(x)\,dx$，$\int_{x_0}^{x} r_n(x)\,dx$ 存在，从而有

$$\left|\int_{x_0}^{x} s(x)\,dx-\int_{x_0}^{x} s_n(x)\,dx\right|=\left|\int_{x_0}^{x} r_n(x)\,dx\right|\leqslant\int_{x_0}^{x} |r_n(x)|\,dx.$$

又由级数的一致收敛性，对任给正数 ε，必有 $N=N(\varepsilon)$，使得当 $n>N$ 时，对$[a, b]$上的一切 x，都有

$$|r_n(x)|<\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

于是，当 $n>N$ 时有

$$\left|\int_{x_0}^{x} s(x)\,dx-\int_{x_0}^{x} s_n(x)\,dx\right|\leqslant\int_{x_0}^{x} |r_n(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(x-x_0)\leqslant\varepsilon.$$

根据极限的定义，有

$$\int_{x_0}^{x} s(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} s_n(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\int_{x_0}^{x} u_i(x)\,dx,$$

即
$$\int_{x_0}^{x} s(x)\,dx=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x} u_i(x)\,dx.$$

由于 N 只依赖于 ε 而与 x_0，x 无关，所以级数 $\sum_{i=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x} u_i(x)\,dx$ 在$[a, b]$上一致收敛。

定理 3 **如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间$[a, b]$上收敛于和 $s(x)$，它的各项 $u_n(x)$ 都具有连续导数 $u_n'(x)$，并且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$在$[a, b]$上一致收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在$[a, b]$上也一致收敛，且可逐项求导，即**

$$s'(x)=u_1'(x)+u_2'(x)+\cdots+u_n'(x)+\cdots. \tag{5}$$

证 先证等式(5)。由于 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 在$[a, b]$上一致收敛，设其

和为 $\varphi(x)$，即 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)=\varphi(x)$，欲证 (5) 只需证 $\varphi(x)=s'(x)$ 就可以了.

根据定理 1 知，$\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，根据定理 2，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 可逐项积分，故有

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_n'(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}[u_n(x)-u_n(x_0)],$$

而
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)=s(x), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)=s(x_0),$$

故
$$\sum_{n=1}^{\infty}[u_n(x)-u_n(x_0)]=s(x)-s(x_0),$$

从而有
$$\int_{x_0}^{x} \varphi(x)dx=s(x)-s(x_0),$$

其中 $a\leqslant x_0<x\leqslant b$. 上式两端求导，即得关系式

$$\varphi(x)=s'(x).$$

再证级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上也一致收敛.

根据定理 2，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_n'(x)dx$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛，而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_n'(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)-\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0),$$

所以
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_n'(x)dx+\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0),$$

由此即得所要证的结论.

必须注意，级数一致收敛并不保证可以逐项求导. 例如，在例4中我们已证明了级数

$$\frac{\sin x}{1^2}+\frac{\sin 2^2 x}{2^2}+\cdots+\frac{\sin n^2 x}{n^2}+\cdots$$

在任何区间 $[a, b]$ 上都是一致收敛的，但逐项求导后的级数

$$\cos x+\cos 2^2x+\cdots+\cos n^2x+\cdots,$$

其一般项不趋近于零，所以对任意 x 的数值是发散的，因此原级数

不可以逐项求导.

下面我们来讨论幂级数的一致收敛性.

定理 4　如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R, 则此级数在 $(-R, R)$ 内的任一闭区间 $[a, b]$ 上一致收敛.

证　记 $r=\max\{|a|, |b|\}$, 则对 $[a, b]$ 上的一切 x, 都有

$$|a_n x^n| \leqslant |a_n r^n| \quad (n=1, 2, \cdots),$$

而 $0<r<R$, 根据第四节定理 1 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n$ 绝对收敛, 由维尔斯脱拉斯判别法即得所要证的结论.

进一步还可证明, 如果幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在收敛区间的端点收敛, 则一致收敛的区间可扩大到包含端点.

利用定理 4 及一致收敛级数的基本性质, 就可证明在第四节中指出的关于幂级数在其收敛区间内的和函数的连续性、逐项可导、逐项可积的结论.

关于和函数的连续性及逐项可积的结论, 由定理 4 和定理 1、2 立即可得. 关于逐项可导的结论, 我们重新叙述成如下定理并给出证明.

定理 5　如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R, 则其和函数 $s(x)$ 在 $(-R, R)$ 内可导, 且有逐项求导公式

$$s'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

逐项求导后所得到的幂级数与原级数有相同的收敛半径.

证　先证级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 在 $(-R, R)$ 内收敛.

在 $(-R, R)$ 内任意取定 x, 再选定 x_1, 使得 $|x|<x_1<R$. 记 $q=\frac{|x|}{x_1}<1$, 则

$$|na_nx^{n-1}|=n\left|\frac{x}{x_1}\right|^{n-1}\cdot\frac{1}{x_1}|a_nx_1^n|=nq^{n-1}\cdot\frac{1}{x_1}|a_nx_1^n|,$$

由比值审敛法可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nq^{n-1}$ 收敛，于是

$$nq^{n-1}\to 0\quad(n\to\infty),$$

故数列 nq^{n-1} 有界，必有 $M>0$，使得

$$nq^{n-1}\cdot\frac{1}{x_1}\leqslant M\quad(n=1,\ 2,\ \cdots).$$

又 $0<x_1<R$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_nx_1^n|$ 收敛，由比较审敛法即得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ 收敛.

由定理 4，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ 在 $(-R,\ R)$ 内的任一闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛，故幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 在 $[a,\ b]$ 上适合定理 3 条件，从而可逐项求导. 再由 $[a,\ b]$ 在 $(-R,\ R)$ 内的任意性，即得幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-R,\ R)$ 内可逐项求导.

设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ 的收敛半径为 R'. 上面已证得 $R\leqslant R'$. 将此幂级数在 $[0,\ x]$ $(|x|<R')$ 上逐项积分即得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$，因逐项积分所得级数的收敛半径不会缩小，所以 $R'\leqslant R$，于是 $R'=R$. 定理 5 证毕.

*习 题 11-7

1. 已知函数序列 $s_n(x)=\sin\frac{x}{n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 在 $(-\infty,\ +\infty)$ 上收敛于 0，

(1) 问 $N(\varepsilon,\ x)$ 取多大，能使当 $n>N$ 时，$s_n(x)$ 与其极限之差的绝对值小于正数 ε；

(2) 证明 $s_n(x)$ 在任一有限区间 $[a,\ b]$ 上一致收敛.

2. 已知级数 $x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\cdots$ 在 $(-\infty,\ +\infty)$ 上收敛，

(1) 求出该级数的和;

(2) 问 $N(\varepsilon, x)$ 取多大，能使当 $n>N$ 时，级数的余项 r_n 的绝对值小于正数 ε.

(3) 分别讨论级数在区间 $[0, 1]$, $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上的一致收敛性.

3. 按定义讨论下列级数在所给区间上的一致收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, $-\infty<x<+\infty$;

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$, $0<x<1$.

4. 利用维尔斯脱拉斯判别法证明下列级数在所给区间上的一致收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{2^n}$, $-\infty<x<+\infty$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$, $-\infty<x<+\infty$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx}$, $0\leqslant x<+\infty$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{n!}$, $|x|<10$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(1-e^{-nx})}{n^2+x^2}$, $0\leqslant x<+\infty$.

第八节 傅立叶级数

从本节开始，我们讨论由三角函数组成的函数项级数，即所谓三角级数，着重研究如何把函数展开成三角级数.

一、三角级数 三角函数系的正交性

在第一章中，我们介绍过周期函数的概念，按那里的定义，函数 $f(x)$ 如果满足条件 $f(x+l)=f(x)$，则称为周期函数，使等式成立的数 l 称为周期. 周期函数反映了客观世界中的周期运动.

正弦函数是一种常见而简单的周期函数. 例如描述简谐振动

的函数

$$y = A\sin(\omega t + \varphi)$$

就是一个以 $\frac{2\pi}{\omega}$ 为周期的正弦函数. 其中 y 表示动点的位置，t 表示时间，A 为振幅，ω 为角频率，φ 为初相。

在实际问题中，除了正弦函数外，还会遇到非正弦的周期函数，它们反映了较复杂的周期运动. 如电子技术中常用的周期为 T 的矩形波(图 11-8)，就是一个非正弦周期函数的例子.

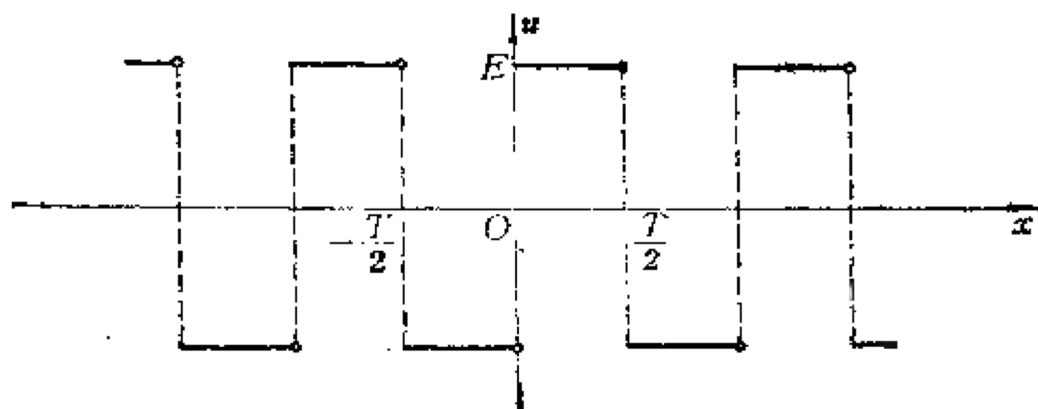


图 11-8

如何深入研究非正弦周期函数呢？联系到前面介绍过的用函数的幂级数展开式表示与讨论函数，我们也想将周期函数展开成由简单的周期函数例如三角函数组成的级数. 具体地说，将周期为 $T\left(=\frac{2\pi}{\omega}\right)$ 的周期函数用一系列三角函数 $A_n\sin(n\omega t+\varphi_n)$ 之和来表示，记为

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n), \tag{1}$$

其中 A_0, A_n, $\varphi_n (n=1, 2, 3, \cdots)$ 都是常数.

将周期函数按上述方式展开，它的物理意义是很明确的，这就是把一个比较复杂的周期运动看成是许多不同频率的简谐振动的叠加. 在电工学上，这种展开称为谐波分析. 其中常数项 A_0 称为 $f(t)$ 的直流分量；$A_1\sin(\omega t+\varphi_1)$ 称为一次谐波(又叫做基波)；而

$A_2\sin(2\omega t+\varphi_2)$, $A_3\sin(3\omega t+\varphi_3)$, $\cdots$ 依次称为二次谐波，三次谐波，等等.

为了以后讨论方便起见，我们将正弦函数 $A_n\sin(n\omega t+\varphi_n)$ 按三角公式变形，得

$$A_n\sin(n\omega t+\varphi_n)=A_n\sin\varphi_n\cos n\omega t+A_n\cos\varphi_n\sin n\omega t,$$

并且令 $\frac{a_0}{2}=A_0$, $a_n=A_n\sin\varphi_n$, $b_n=A_n\cos\varphi_n$, $\omega t=x$, 则 (1) 式右端的级数就可以改写为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \tag{2}$$

一般地，形如(2)的级数叫做三角级数，其中 a_0, a_n, $b_n(n=1, 2, 3, \cdots)$都是常数.

如同讨论幂级数时一样，我们必须讨论三角级数(2)的收敛问题，以及给定周期为 2π 的周期函数如何把它展开成三角级数(2). 为此，我们首先介绍三角函数系的正交性.

所谓三角函数系

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \cdots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \cdots \tag{3}$$

在区间$[-\pi, \pi]$上正交，就是指(3)中任何不同的两个函数的乘积在区间$[-\pi, \pi]$上的积分等于零，即

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx=0 \qquad (n=1, 2, 3, \cdots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx=0 \qquad (n=1, 2, 3, \cdots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nx\,dx=0 \quad (k,\ n=1, 2, 3, \cdots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\,dx=0 \quad (k,\ n=1, 2, 3, \cdots;\ k\neq n),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin nx\,dx=0 \quad (k,\ n=1, 2, 3, \cdots;\ k\neq n).$$

以上等式，都可以通过计算定积分来验证，现将第四式验证如下。

利用三角学中积化和差的公式

$$\cos kx\cos nx=\frac{1}{2}[\cos(k+n)x+\cos(k-n)x],$$

当 $k\neq n$ 时，有

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\,dx&=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(k+n)x+\cos(k-n)x]dx\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(k+n)x}{k+n}+\frac{\sin(k-n)x}{k-n}\right]_{-\pi}^{\pi}\\&=0\quad(k,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots;\ k\neq n).\end{aligned}$$

其余等式请读者自行验证。

二、函数展开成傅立叶级数

设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，且能展开成三角级数：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).\tag{4}$$

我们自然要问：系数 $a_0,\ a_1,\ b_1,\ \cdots$ 与函数 $f(x)$ 之间存在着怎样的关系？ 换句话说，如何利用 $f(x)$ 把 $a_0,\ a_1,\ b_1,\ \cdots$ 表达出来？ 为此，我们进一步假设级数(4)可以逐项积分。

先求 a_0. 对(4)式从 $-\pi$ 到 π 逐项积分：

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\,dx+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx+b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,dx\right].$$

根据三角函数系(3)的正交性，等式右端除第一项外，其余各项均为零，所以

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{a_0}{2}\cdot 2\pi,$$

于是得 $$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx.$$

其次求 a_n，用 $\cos nx$ 乘(4)式两端，再从 $-\pi$ 到 π 逐项积分，我们得到

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\,dx+b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nx\,dx\right].$$

根据三角函数系(3)的正交性，等式右端除 $k=n$ 的一项外，其余各项均为零，所以

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx$$
$$=\frac{a_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2nx)dx=\frac{a_n}{2}\cdot 2\pi,$$

于是得 $$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).$$

类似地，用 $\sin nx$ 乘(4)式的两端，再从 $-\pi$ 到 π 逐项积分，可得

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).$$

由于当 $n=0$ 时，a_n 的表达式正好给出 a_0，因此，已得结果可以合并写成

$$\left.\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots),\\ b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

如果公式(5)中的积分都存在，这时它们定出的系数 a_0, a_1, b_1, $\cdots$ 叫做函数 $f(x)$ 的傅立叶(Fourier)系数，将这些系数代入(4)式右端，所得的三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{6}$$

叫做函数 $f(x)$ 的傅立叶级数.

我们面临着一个基本问题：函数 $f(x)$ 在怎样的条件下，它的傅立叶级数收敛于 $f(x)$？简单地说，函数 $f(x)$ 满足什么条件就可以展开成傅立叶级数.

下面，我们叙述一个收敛定理(不加证明)，它给出关于上述问题的一个重要结论.

收敛定理(狄利克雷(Dirichlet)充分条件) 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，如果它满足条件：在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点，并且至多只有有限个极值点，则 $f(x)$ 的傅立叶级数收敛，并且

(1) 当 x 是 $f(x)$ 的连续点时，级数收敛于 $f(x)$；

(2) 当 x 是 $f(x)$ 的间断点时，级数收敛于

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.$$

收敛定理告诉我们：只要函数在 $[-\pi, \pi]$ 上至多有有限个第一类间断点，并且不作无限次振动，那末函数的傅立叶级数在连续点处收敛于该点的函数值，在间断点处收敛于该点左极限与右极限的算术平均值. 可见，函数展开成傅立叶级数的条件比展开成幂级数的条件低得多.

例1 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数，它在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x<\pi.\end{cases}$$

将 $f(x)$ 展开成傅立叶级数.

解 所给函数满足收敛定理的条件，它在点 $x=k\pi(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 处不连续，在其它点处连续，从而由收敛定理知道对

应的傅立叶级数收敛，并且当 $x=k\pi$ 时级数收敛于

$$\frac{-1+1}{2}=\frac{1+(-1)}{2}=0,$$

当 $x\neq k\pi$ 时级数收敛于 $f(x)$. 和函数的图形如图 11-9 所示.

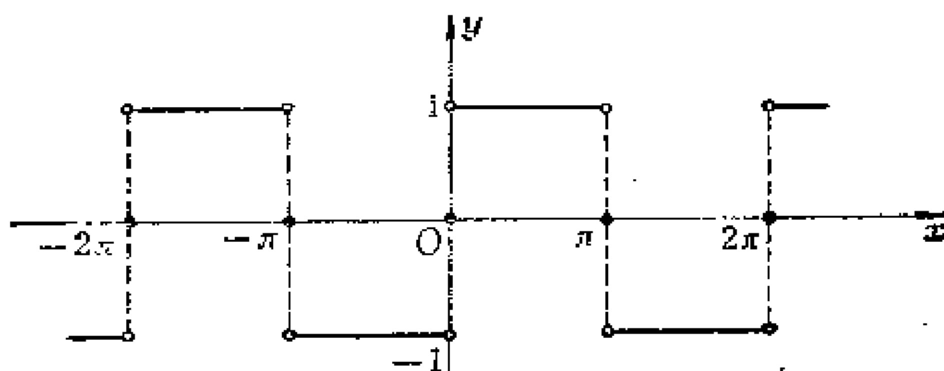


图 11-9

计算傅立叶系数如下:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}1\cdot\cos nx\,dx$$

$$=0\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots);$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}1\cdot\sin nx\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_{0}^{\pi}$$

$$=\frac{1}{n\pi}[1-\cos n\pi-\cos n\pi+1]$$

$$=\frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n]$$

$$=\begin{cases}\dfrac{4}{n\pi}, & \text{当 } n=1,\ 3,\ 5,\ \cdots \text{时},\\ 0, & \text{当 } n=2,\ 4,\ 6,\ \cdots \text{时}.\end{cases}$$

将求得的系数代入(6)式，就得到 $f(x)$ 的傅立叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left[\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\cdots+\frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x+\cdots\right]$$

$$(-\infty<x<+\infty;\ x\neq 0,\ \pm\pi,\ \pm 2\pi,\ \cdots).$$

如果把例1中的函数理解为矩形波的波形函数(周期 $T=2\pi$，幅值 $E=1$，自变量 x 表示时间)，那末上面所得到的展开式表明：矩形波是由一系列不同频率的正弦波叠加而成的，这些正弦波的频率依次为基波频率的奇数倍.

例2 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}x, & -\pi\leqslant x<0,\\ 0, & 0\leqslant x<\pi.\end{cases}$$

将 $f(x)$ 展开成傅立叶级数.

解 所给函数满足收敛定理的条件，它在点 $x=(2k+1)\pi$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$ 处不连续. 因此，对应的傅立叶级数在 $x=(2k+1)\pi$ 处收敛于

$$\frac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2}=\frac{0-\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}.$$

在连续点 x $(x\neq(2k+1)\pi)$ 处收敛于 $f(x)$. 和函数的图形如图 11-10 所示.

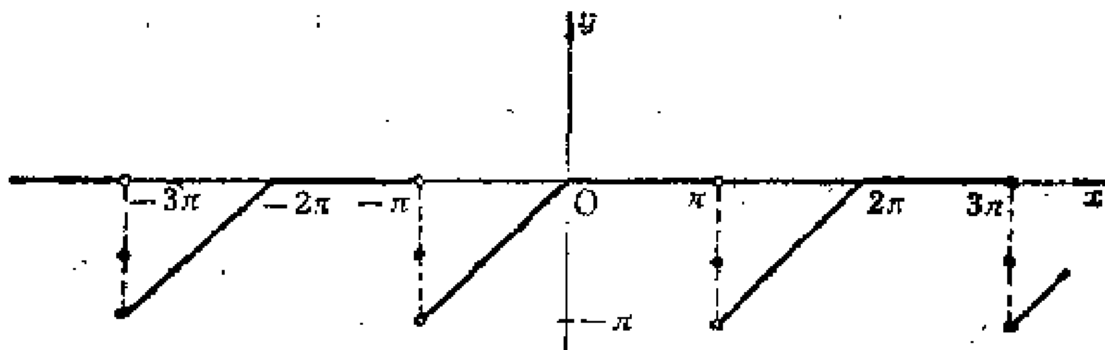


图 11-10

计算傅立叶系数如下：

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{0}=-\frac{\pi}{2};$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\cos nx\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{0}$$

$$=\frac{1}{n^2\pi}(1-\cos n\pi)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2}{n^2\pi}, & \text{当 } n=1,\ 3,\ 5,\ \cdots \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } n=2,\ 4,\ 6,\ \cdots \text{ 时};\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\sin nx\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{0}$$

$$=-\frac{\cos n\pi}{n}=\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

将求得的系数代入(6)式,得到 $f(x)$ 的傅立叶级数展开式为

$$f(x)=-\frac{\pi}{4}+\left(\frac{2}{\pi}\cos x+\sin x\right)$$

$$-\frac{1}{2}\sin 2x+\left(\frac{2}{3^2\pi}\cos 3x+\frac{1}{3}\sin 3x\right)$$

$$-\frac{1}{4}\sin 4x+\left(\frac{2}{5^2\pi}\cos 5x+\frac{1}{5}\sin 5x\right)-\cdots$$

$$(-\infty<x<+\infty;\ x\neq\pm\pi,\ \pm3\pi,\ \cdots).$$

应该注意,如果函数 $f(x)$ 只在区间 $[-\pi,\ \pi]$ 上有定义,并且满足收敛定理的条件,那末 $f(x)$ 也可以展开成傅立叶级数. 事实上,我们可以在 $[-\pi,\ \pi)$ 或 $(-\pi,\ \pi]$ 外补充函数 $f(x)$ 的定义,使它拓广成周期为 2π 的周期函数 $F(x)$. 按这种方式拓广函数的定义域的过程称为周期延拓. 再将 $F(x)$ 展开成傅立叶级数. 最

后限制 x 在 $(-\pi, \pi)$ 内，此时 $F(x)=f(x)$，这样便得到 $f(x)$ 的傅立叶级数展开式．根据收敛定理，这级数在区间端点 $x=\pm\pi$ 处收敛于 $\frac{1}{2}[f(\pi-0)+f(-\pi+0)]$．

例 3 将函数

$$f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi\leqslant x<0,\\ x, & 0\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$$

展开成傅立叶级数．

解 所给函数在区间 $[-\pi, \pi]$ 上满足收敛定理的条件，并且在 $[-\pi, \pi)$ 外作为拓广的周期函数时，它在每一点 x 处都连续（图 11-11），因此对应的傅立叶级数在 $[-\pi, \pi]$ 上收敛于 $f(x)$．

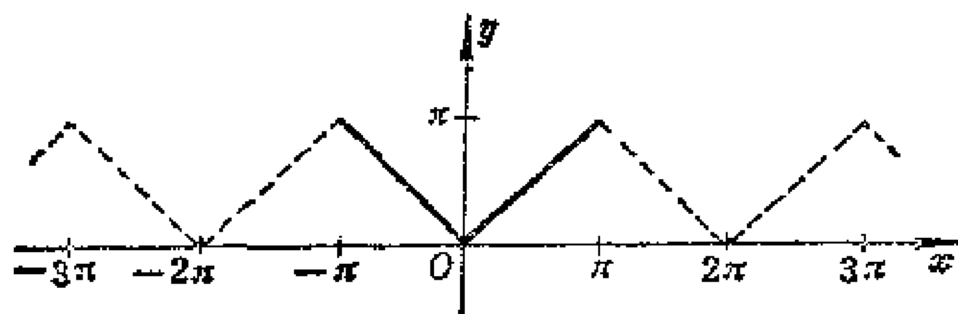


图 11-11

计算傅立叶系数如下：

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{\pi}=\pi;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\cos nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx\,dx$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_{0}^{\pi}$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{4}{n^2\pi}, & 当\ n=1,\ 3,\ 5,\ \cdots 时,\\ 0, & 当\ n=2,\ 4,\ 6,\ \cdots 时;\end{cases}$$

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\sin nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin nx\,dx\\&=-\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{0}\\&\quad+\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right]_{0}^{\pi}\\&=0\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).\end{aligned}$$

将求得的系数代入(6)式，得到 $f(x)$ 的傅立叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right)$$
$$(-\pi\leqslant x\leqslant\pi).$$

利用这个展开式，我们可以求出几个特殊级数的和．当 $x=0$ 时，$f(0)=0$，于是由这个展开式得出

$$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots.$$

设
$$\sigma=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots,$$

$$\sigma_1=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\left(=\frac{\pi^2}{8}\right),$$

$$\sigma_2=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots,$$

$$\sigma_3=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots.$$

因为
$$\sigma_2=\frac{\sigma}{4}=\frac{\sigma_1+\sigma_2}{4},$$

所以 $$\sigma_2=\frac{\sigma_1}{3}=\frac{\pi^2}{24},$$

$$\sigma=\sigma_1+\sigma_2=\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi^2}{24}=\frac{\pi^2}{6},$$

又 $$\sigma_3=2\sigma_1-\sigma=\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{12}.$$

习 题 11-8

1. 下列函数 $f(x)$ 的周期为 2π，试将各函数展开成傅立叶级数，其中 $f(x)$ 在 $[-\pi,\ \pi)$ 上的表达式为：

(1) $f(x)=3x^2+1\quad(-\pi\leqslant x<\pi)$；

(2) $f(x)=e^{2x}\quad(-\pi\leqslant x<\pi)$；

(3) $f(x)=\begin{cases}bx, & -\pi\leqslant x<0,\\ ax, & 0\leqslant x<\pi\end{cases}\quad$ (a, b 为常数)。

2. 将下列函数展开成傅立叶级数：

(1) $f(x)=2\sin\dfrac{x}{3}\quad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$；

(2) $f(x)=\begin{cases}e^x, & -\pi\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases}$

3. 设函数 $f(x)$ 的周期为 2π，证明 $f(x)$ 的傅立叶系数为

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,dx\quad(n=0,\ 1,\ 2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,dx\quad(n=1,\ 2,\ \cdots).$$

第九节　正弦级数和余弦级数

一、奇函数和偶函数的傅立叶级数

一般说来，一个函数的傅立叶级数既含有正弦项，又含有余弦项(见第八节例 2)。但是，也有一些函数的傅立叶级数只含有正弦项(见第八节例 1)或者只含有常数项和余弦项(见第八节例 3)。

这是什么原因呢？实际上，这些情况是与所给函数 $f(x)$ 的奇偶性有密切关系的．下面我们介绍一个定理．

定理　当周期为 2π 的奇函数 $f(x)$ 展开成傅立叶级数时，它的傅立叶系数为

$$\left.\begin{aligned}&a_n=0\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots),\\&b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

而当周期为 2π 的偶函数 $f(x)$ 展开成傅立叶级数时，它的傅立叶系数为

$$\left.\begin{aligned}&a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots),\\&b_n=0\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

证　这个定理的正确性在几何上是很明显的．我们现在对第一部分加以证明，关于第二部分可以同样处理．

设 $f(x)$ 为奇函数，即 $f(-x)=-f(x)$．按傅立叶系数公式有

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx.\end{aligned}$$

在右边的第一个积分中以 $-x$ 代 x，然后对调积分的上下限同时更换它的符号，得

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0}f(-x)\cos(-nx)(-dx)+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\\&=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\\&=0\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots).\end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(-x)\sin(-nx)(-dx) + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n=1, 2, 3, \cdots).
\end{aligned}$$

这个定理说明了：如果 $f(x)$ 为奇函数，那末它的傅立叶级数是只含有正弦项而没有常数项和余弦项的正弦级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx; \tag{3}$$

如果 $f(x)$ 为偶函数，那末它的傅立叶级数是只含有常数项和余弦项而没有正弦项的余弦级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx. \tag{4}$$

可见，在把奇函数或偶函数展开成傅立叶级数时，我们可以减轻计算系数的工作量。

例 1 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数，它在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为 $f(x)=x$. 将 $f(x)$ 展开成傅立叶级数.

解 首先，所给函数满足收敛定理的条件，它在点

$$x=(2k+1)\pi \quad (k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$$

处不连续，因此对应的傅立叶级数在点 $x=(2k+1)\pi$ 收敛于

$$\frac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2} = \frac{\pi+(-\pi)}{2} = 0,$$

在连续点 $x(x\neq(2k+1)\pi)$ 处收敛于 $f(x)$. 和函数的图形如图 11-12 所示.

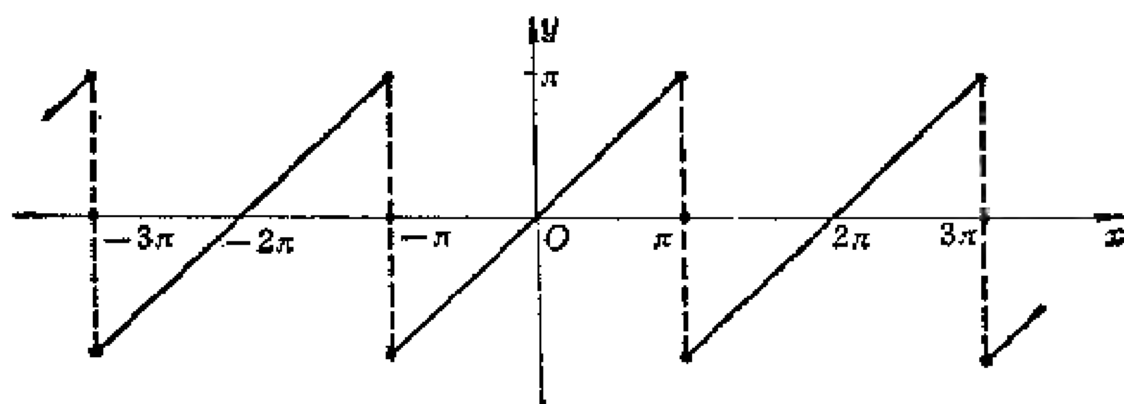


图 11-12

其次，所给函数为奇函数①，因此按公式 (1) 有 $a_n=0$ ($n=0, 1, 2, \cdots$)，而

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin nx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^\pi$$

$$=-\frac{2}{n}\cos n\pi=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).$$

将求得的 b_n 代入正弦级数(3)，得 $f(x)$ 的傅立叶级数展开式为

$$f(x)=2\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\cdots\right)$$

$$(-\infty<x<+\infty;\ x\neq\pm\pi,\ \pm3\pi,\ \cdots).$$

例 2 将周期函数

$$u(t)=|E\sin t|$$

展开成傅立叶级数，其中 E 是正的常数.

解 所给函数满足收敛定理的条件，它在整个数轴上连续(图 11-13)，因此对应的傅立叶级数处处收敛于 $u(t)$.

因为 $u(t)$ 为偶函数，所以按公式(2)有 $b_n=0$，而

---

① 当 $x\neq(2k+1)\pi$ ($k=0, \pm1, \pm2, \cdots$)时，$f(x)$是周期为 2π 的奇函数. 显然，此时 (1) 式仍成立.

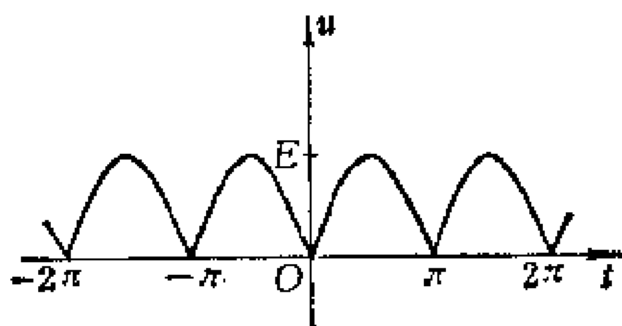


图 11-13

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}u(t)\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}E\sin t\,dt$$

$$=\frac{2E}{\pi}\left[-\cos t\right]_0^{\pi}=\frac{4E}{\pi};$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}u(t)\cos nt\,dt$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}E\sin t\cos nt\,dt$$

$$=\frac{E}{\pi}\int_0^{\pi}[\sin(n+1)t-\sin(n-1)t]dt$$

$$=\frac{E}{\pi}\left[-\frac{\cos(n+1)t}{n+1}+\frac{\cos(n-1)t}{n-1}\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{E}{\pi}\left[\frac{1-\cos(n+1)\pi}{n+1}+\frac{\cos(n-1)\pi-1}{n-1}\right]$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{4E}{(n^2-1)\pi}, & \text{当 } n=2,\ 4,\ 6,\ \cdots \text{ 时},\\ \quad 0\quad , & \text{当 } n=3,\ 5,\ 7,\ \cdots \text{ 时}.\end{cases}$$

当 $n=1$ 时，上述计算方法不适用，所以 a_1 必须另行计算. 我们有

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}u(t)\cos t\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}E\sin t\cos t\,dt$$

$$=\frac{2E}{\pi}\left[\frac{\sin^2 t}{2}\right]_0^{\pi}=0.$$

将求得的 a_n 代入余弦级数(4)，得 $u(t)$ 的傅立叶级数展开式为

$$u(t)=\frac{4E}{\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cos 2t-\frac{1}{15}\cos 4t-\frac{1}{35}\cos 6t-\cdots\right)$$

$$(-\infty<t<+\infty).$$

二、函数展开成正弦级数或余弦级数

在实际应用(如研究某种波动问题，热的传导、扩散问题)中，有时还需要把定义在区间$[0, \pi]$上的函数$f(x)$展开成正弦级数或余弦级数.

根据前面讨论的结果，这类展开问题可以按如下的方法解决：设函数$f(x)$定义在区间$[0, \pi]$上并且满足收敛定理的条件，我们在开区间$(-\pi, 0)$内补充函数$f(x)$的定义，得到定义在$(-\pi, \pi]$上的函数$F(x)$，使它在$(-\pi, \pi)$上成为奇函数[①](偶函数). 按这种方式拓广函数定义域的过程称为奇延拓(偶延拓). 然后将奇延拓(偶延拓)后的函数展开成傅立叶级数，这个级数必定是正弦级数(余弦级数). 再限制x在$(0, \pi]$上，此时$F(x)\equiv f(x)$，这样便得到$f(x)$的正弦级数(余弦级数)展开式.

例 3 将函数$f(x)=x+1\ (0\leqslant x\leqslant\pi)$分别展开成正弦级数和余弦级数.

解 先求正弦级数. 为此对函数$f(x)$进行奇延拓(图 11-14). 按公式(1)有

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\sin nx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{n\pi}(1-\pi\cos n\pi-\cos n\pi)$$

---

① 补充$f(x)$的定义使它在$(-\pi, \pi)$上成为奇函数时，若$f(0)\neq 0$，规定$F(0)=0$.

$$
=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\pi+2}{n}, & \text{当 } n=1,\ 3,\ 5,\ \cdots \text{ 时},\\[2mm] -\dfrac{2}{n}, & \text{当 } n=2,\ 4,\ 6,\ \cdots \text{ 时}.\end{cases}
$$

将求得的 b_n 代入正弦级数(3)，得

$$
x+1=\frac{2}{\pi}\Big[(\pi+2)\sin x-\frac{\pi}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}(\pi+2)\sin 3x
$$

$$
-\frac{\pi}{4}\sin 4x+\cdots\Big]\quad (0<x<\pi).
$$

在端点 $x=0$ 及 $x=\pi$ 处，级数的和显然为零，它不代表原来函数 $f(x)$ 的值.

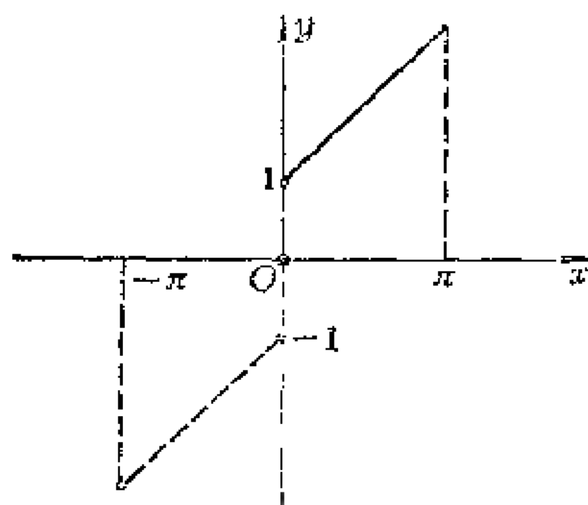


图 11-14

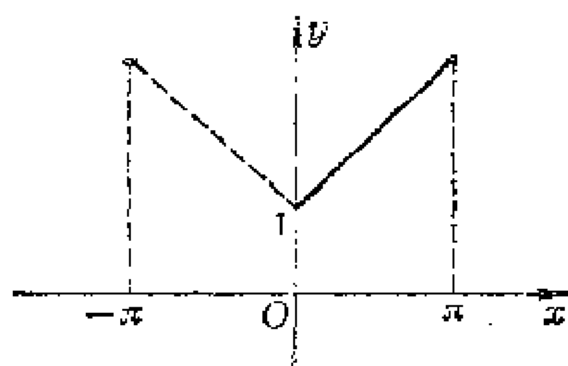


图 11-15

再求余弦级数. 为此对 $f(x)$ 进行偶延拓(图 11-15). 按公式(2)有

$$
a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)dx=\frac{2}{\pi}\Big[\frac{x^2}{2}+x\Big]_0^{\pi}=\pi+2;
$$

$$
a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\cos nx\,dx
$$

$$
=\frac{2}{\pi}\Big[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}+\frac{\sin nx}{n}\Big]_0^{\pi}
$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)$$

$$=\begin{cases}0, & \text{当 } n=2,\ 4,\ 6,\ \cdots \text{ 时}, \\ -\frac{4}{n^2\pi}, & \text{当 } n=1,\ 3,\ 5,\ \cdots \text{ 时}.\end{cases}$$

将求得的 a_n 代入余弦级数 (4), 得

$$x+1=\frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right)$$

$$(0\leqslant x\leqslant\pi).$$

习　题　11-9

1. 将函数 $f(x)=\cos\frac{x}{2}(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$展开成傅立叶级数.

2. 设 $f(x)$是周期为 2π 的函数, 它在$[-\pi, \pi)$上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{\pi}{2}, & -\pi\leqslant x<-\frac{\pi}{2}, \\ x, & -\frac{\pi}{2}\leqslant x<\frac{\pi}{2}, \\ \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2}\leqslant x<\pi,\end{cases}$$

将 $f(x)$ 展开成傅立叶级数.

3. 将函数 $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$展开成正弦级数.

4. 将函数 $f(x)=2x^2$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$分别展开成正弦级数和余弦级数.

5. 设函数 $f(x)$的周期为 2π. 证明:

(1) 如果 $f(x-\pi)=-f(x)$, 则$f(x)$ 的傅立叶系数 $a_0=0$, $a_{2k}=0$, $b_{2k}=0(k=1, 2, \cdots)$;

(2) 如果 $f(x-\pi)=f(x)$, 则 $f(x)$ 的傅立叶系数 $a_{2k+1}=0$, $b_{2k+1}=0$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$.

第十节　周期为 $2l$ 的周期函数的傅立叶级数

到现在为止, 我们所讨论的周期函数都是以 2π 为周期的. 但是实际问题中所遇到的周期函数, 它的周期不一定是 2π. 例如第

八节中我们所指出的矩形波，它的周期是$T=\frac{2\pi}{\omega}$. 因此，下面我们讨论周期为$2l$的函数的傅立叶级数. 根据前面讨论的结果，经过自变量的变量代换，可得下面的定理.

定理 设周期为$2l$的周期函数$f(x)$满足收敛定理的条件，则它的傅立叶级数的展开式为①

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{1}$$

其中系数a_n, b_n为

$$\left.\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots),\\ b_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

如果$f(x)$为奇函数，则有

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{3}$$

其中系数b_n为

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots). \tag{4}$$

如果$f(x)$为偶函数，则有

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}, \tag{5}$$

其中系数a_n为

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots). \tag{6}$$

证 作变量代换$z=\frac{\pi x}{l}$，于是区间$-l\leqslant x\leqslant l$就变换成

① 在等式(1)，(3)和(5)中，如果x为函数的间断点，应以算术平均值

$$\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$$

代替等式左边的$f(x)$.

$-\pi\leqslant z\leqslant\pi$. 设函数 $f(x)=f\left(\frac{lz}{\pi}\right)=F(z)$，从而 $F(z)$ 是周期为 2π 的函数，并且它满足收敛定理的条件，将 $F(z)$ 展开成傅立叶级数：

$$F(z)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nz+b_n\sin nz),$$

其中 $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(z)\cos nz\,dz,\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(z)\sin nz\,dz.$

在以上式子中令 $z=\frac{\pi x}{l}$，并注意到 $F(z)=f(x)$，于是有

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

而且

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx,\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

类似地，可以证明定理的其余部分.

例 1 设 $f(x)$ 是周期为 4 的函数，它在 $[-2,2)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}0, & -2\leqslant x<0,\\ k, & 0\leqslant x<2\end{cases}\qquad (\text{常数 } k\neq 0).$$

将 $f(x)$ 展开成傅立叶级数.

解 这时 $l=2$，按公式(2)有

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}0\,dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{2}k\,dx=k;$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{0}^{2}k\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx=\left[\frac{k}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2=0;$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_{0}^{2}k\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx=\left[-\frac{k}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2$$

$$=\frac{k}{n\pi}(1-\cos n\pi)=\begin{cases}\frac{2k}{n\pi}, & \text{当 } n=1,3,5,\cdots\text{ 时},\\ 0, & \text{当 } n=2,4,6,\cdots\text{ 时}.\end{cases}$$

将求得的系数 a_n, b_n 代入(1)式，得

$$f(x)=\frac{k}{2}+\frac{2k}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{2}+\cdots\right)$$

$$(-\infty<x<+\infty;\ x\neq 0,\ \pm 2,\ \pm 4,\ \cdots).$$

$f(x)$的傅立叶级数的和函数的图形如图 11-16 所示.

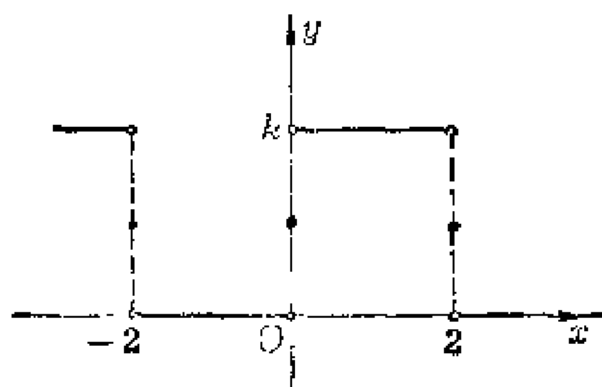


图 11-16

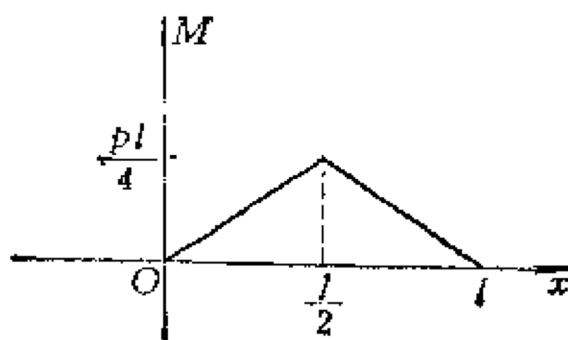


图 11-17

例 2 将如图 11-17 所示的函数

$$M(x)=\begin{cases}\dfrac{px}{2}, & 0\leqslant x<\dfrac{l}{2},\\[2mm] \dfrac{p(l-x)}{2}, & \dfrac{l}{2}\leqslant x\leqslant l\end{cases}$$

展开成正弦级数.

解 $M(x)$是定义在$[0,\ l]$上的函数,要将它展开成正弦级数,必须对 $M(x)$ 进行奇延拓. 按公式 (4) 计算延拓后的函数的傅立叶系数:

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l M(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

$$=\frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{px}{2}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx+\int_{\frac{l}{2}}^{l}\frac{p(l-x)}{2}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx\right].$$

对上式右端的第二项,令 $t=l-x$, 则

$$b_n=\frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{px}{2}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx+\int_{\frac{l}{2}}^{0}\frac{pt}{2}\sin\frac{n\pi(l-t)}{l}(-dt)\right]$$

$$=\frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{px}{2}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx+(-1)^{n+1}\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{pt}{2}\sin\frac{n\pi t}{l}\,dt\right].$$

当 $n=2, 4, 6, \cdots$ 时，$b_n=0$；当 $n=1, 3, 5, \cdots$ 时，

$$b_n=\frac{4p}{2l}\int_0^{\frac{l}{2}}x\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx=\frac{2pl}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

将求得的 b_n 代入(3)式，得

$$M(x)=\frac{2pl}{\pi^2}\left(\sin\frac{\pi x}{l}-\frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi x}{l}+\frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi x}{l}-\cdots\right)$$

$$(0\leqslant x\leqslant l).$$

习　题　11-10

1．将下列各周期函数展开成傅立叶级数(下面给出函数在一个周期内的表达式)

(1) $f(x)=1-x^2\quad\left(-\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{1}{2}\right)$;

(2) $f(x)=\begin{cases}x, & -1\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x<\frac{1}{2},\\ -1, & \frac{1}{2}\leqslant x<1;\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}2x+1, & -3\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x<3.\end{cases}$

2．将下列函数分别展开成正弦级数和余弦级数

(1) $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<\frac{l}{2},\\ l-x, & \frac{l}{2}\leqslant x\leqslant l;\end{cases}$

(2) $f(x)=x^2\quad(0\leqslant x\leqslant 2)$.

*第十一节　傅立叶级数的复数形式

傅立叶级数还可以用复数形式表示．在电子技术中，经常应用这种形式．

设周期为 $2l$ 的函数 $f(x)$ 的傅立叶级数为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{1}$$

其中系数 a_n, b_n 为

$$\left.\begin{aligned} a_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=0,1,2,\cdots),\\ b_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=1,2,3,\cdots).\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

利用欧拉公式

$$\cos t=\frac{e^{it}+e^{-it}}{2},\ \sin t=\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i},$$

于是(1)式化为

$$\begin{aligned}&\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n}{2}\left(e^{i\frac{n\pi x}{l}}+e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\right)-\frac{ib_n}{2}\left(e^{i\frac{n\pi x}{l}}-e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\right)\right]\\ &=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n-ib_n}{2}e^{i\frac{n\pi x}{l}}+\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\right].\end{aligned} \tag{3}$$

记

$$\frac{a_0}{2}=c_0,\qquad \frac{a_n-ib_n}{2}=c_n,\qquad \frac{a_n+ib_n}{2}=c_{-n}$$

$$(n=1,2,3,\cdots), \tag{4}$$

则(3)式就表示为

$$\begin{aligned}&c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_ne^{i\frac{n\pi x}{l}}+c_{-n}e^{i\frac{-n\pi x}{l}}\right)\\ &=\left(c_ne^{i\frac{n\pi x}{l}}\right)_{n=0}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_ne^{i\frac{n\pi x}{l}}+c_{-n}e^{i\frac{-n\pi x}{l}}\right).\end{aligned}$$

即得傅立叶级数的复数形式为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{i\frac{n\pi x}{l}}. \tag{5}$$

为得出系数 c_n 的表达式，把(2)式代入(4)式，得

$$c_0=\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)dx;$$

$$c_n=\frac{a_n-ib_n}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx-\frac{i}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right]$$

$$=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)\left(\cos\frac{n\pi x}{l}-i\sin\frac{n\pi x}{l}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{l}}dx\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots);$$

$$c_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2}$$

$$=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)e^{i\frac{n\pi x}{l}}dx\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).$$

将已得的结果合并写为

$$c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{l}}dx\quad(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots).\tag{6}$$

这就是傅立叶系数的复数形式.

傅立叶级数的两种形式，本质上是一样的. 但复数形式比较简洁，且只用一个算式计算系数.

例　把宽为 τ、高为 h、周期为 T 的矩形波(图 11-18)展开成复数形式的傅立叶级数.

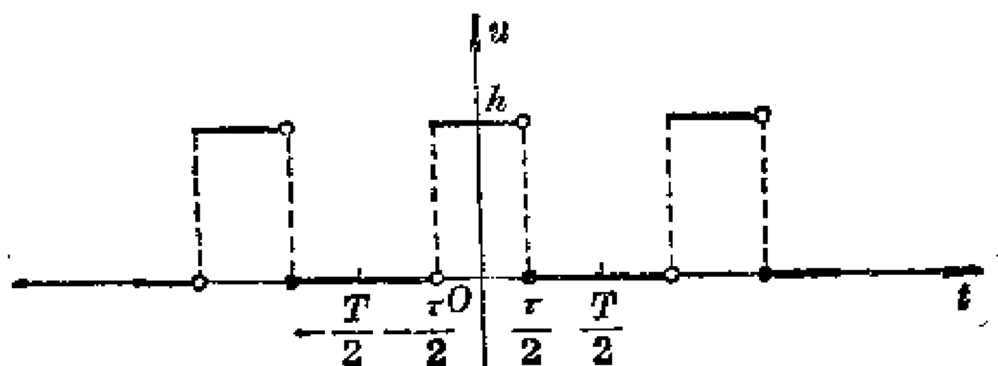


图　11-18

解　在一个周期$\left[-\frac{T}{2},\ \frac{T}{2}\right)$内矩形波的函数表达式为

$$u(t)=\begin{cases}0, & -\frac{T}{2}\leqslant t<-\frac{\tau}{2},\\ h, & -\frac{\tau}{2}\leqslant t<\frac{\tau}{2},\\ 0, & \frac{\tau}{2}\leqslant t<\frac{T}{2}.\end{cases}$$

按公式(6)有①

$$c_0=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}u(t)\,dt=\frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}h\,dt=\frac{h\tau}{T},$$

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}u(t)\,e^{-i\frac{2n\pi t}{T}}\,dt=\frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}h\,e^{-i\frac{2n\pi t}{T}}\,dt$$

$$=\frac{h}{T}\left[\frac{-T}{2n\pi i}\,e^{-i\frac{2n\pi t}{T}}\right]_{-\tau/2}^{\tau/2}$$

$$=\frac{h}{n\pi}\sin\frac{n\pi\tau}{T}\quad(n=\pm1,\ \pm2,\ \cdots).$$

将求得的 c_n 代入级数(5)，得

$$u(t)=\frac{h\tau}{T}+\frac{h}{\pi}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq0}}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi\tau}{T}\,e^{i\frac{2n\pi t}{T}}$$

$$\left(-\infty<t<+\infty;\ t\neq\pm\frac{\tau}{2},\ \pm\frac{\tau}{2}\pm T,\ \cdots\right).$$

*习　题　11-11

1．设 $f(x)$ 是周期为 2 的函数，它在 $[-1,\ 1)$ 上的表达式为 $f(x)=e^{-x}$。试将 $f(x)$ 展开成复数形式的傅立叶级数．

2．设 $u(t)$ 是周期为 T 的函数．已知它的傅立叶级数的复数形式为(参

---

① 根据欧拉公式 $e^{-i\alpha x}=\cos\alpha x-i\sin\alpha x$，当 $\alpha\neq0$ 时，有

$$\int e^{-i\alpha x}\,dx=\int(\cos\alpha x-i\sin\alpha x)\,dx$$

$$=\int\cos\alpha x\,dx-i\int\sin\alpha x\,dx$$

$$=\frac{\sin\alpha x}{\alpha}+i\frac{\cos\alpha x}{\alpha}+C$$

$$=-\frac{1}{i\alpha}(\cos\alpha x-i\sin\alpha x)+C=\frac{1}{-i\alpha}\,e^{-i\alpha x}+C.$$

阅本节例题)

$$u(t)=\frac{h\tau}{T}+\frac{h}{\pi}\sum_{\substack{n=-\infty\\n\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi\tau}{T}e^{i\frac{2n\pi t}{T}}$$

$$(-\infty<t<+\infty),$$

试写出 $u(t)$ 的傅立叶级数的实数形式(即三角形式).

第十二章 微 分 方 程

函数是客观事物的内部联系在数量方面的反映，利用函数关系又可以对客观事物的规律性进行研究．因此如何寻求函数关系，在实践中具有重要意义．在许多问题中，往往不能直接找出所需要的函数关系，但是根据问题所提供的情况，有时可以列出含有要找的函数及其导数的关系式．这样的关系式就是所谓微分方程．微分方程建立以后，对它进行研究，找出未知函数来，这就是解微分方程．本章主要介绍微分方程的一些基本概念和几种常用的微分方程的解法．

第一节 微分方程的基本概念

下面我们通过几何、力学及物理学中的几个具体例题来说明微分方程的基本概念。

例 1 一曲线通过点(1, 2)，且在该曲线上任意点 $M(x, y)$处的切线的斜率为 $2x$，求这曲线的方程．

解 根据导数的几何意义，可知所求曲线 $y=y(x)$ 应满足方程

$$\frac{dy}{dx}=2x. \tag{1}$$

此外，未知函数 $y=y(x)$还应满足下列条件：

$$x=1 \text{ 时}, y=2. \tag{2}$$

把方程(1)两端积分，得

$$y=\int 2x\,dx \quad \text{即} \quad y=x^2+C, \tag{3}$$

其中C是任意常数.

把条件"$x=1$时,$y=2$"代入(3)式,得

$$2=1^2+C,$$

由此定出$C=1$. 把$C=1$代入(3)式,即得所求曲线方程:

$$y=x^2+1. \tag{4}$$

例2 列车在平直线路上以20米/秒(相当于72公里/小时)的速度行驶;当制动时列车获得加速度-0.4米/秒^2. 问开始制动后多少时间列车才能停住,以及列车在这段时间里行驶了多少路程?

解 设列车开始制动后t秒钟内行驶了s米. 根据题意,反映制动阶段列车运动规律的函数$s=s(t)$应满足方程

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-0.4. \tag{5}$$

此外,未知函数$s=s(t)$还应满足下列条件:

$$t=0\text{时},\ s=0,\ v=\frac{ds}{dt}=20. \tag{6}$$

把方程(5)两端积分一次,得

$$v=\frac{ds}{dt}=-0.4t+C_1; \tag{7}$$

再积分一次,得

$$s=-0.2t^2+C_1t+C_2, \tag{8}$$

这里C_1, C_2都是任意常数.

把条件"$t=0$时,$v=20$"代入(7)式,得

$$20=C_1;$$

把条件"$t=0$时,$s=0$"代入(8)式,得

$$0=C_2.$$

把C_1, C_2的值代入(7)及(8)式,得

$$v=-0.4t+20, \tag{9}$$

$$s = -0.2t^2 + 20t. \tag{10}$$

在(9)式中令 $v=0$，得到列车从开始制动到完全停住所需的时间

$$t = \frac{20}{0.4} = 50(\text{秒}).$$

再把 $t=50$ 代入(10)式，得到列车在制动阶段行驶的路程

$$s = -0.2 \times 50^2 + 20 \times 50 = 500(\text{米}).$$

上述两个例子中的方程(1)和(5)都含有未知函数的导数，它们都是微分方程。一般地，凡表示未知函数、未知函数的导数与自变量之间的关系的方程，叫做微分方程。这里必须指出，在微分方程中，未知函数及自变量可以不出现，但未知函数的导数则必须出现。

微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数，叫做微分方程的阶。例如，方程(1)是一阶微分方程；方程(5)是二阶微分方程。又如，方程

$$x^3y''' + x^2y'' - 4xy' = 3x^2$$

是三阶微分方程；方程

$$y^{(4)} - 4y''' + 10y'' - 12y' + 5y = \sin 2x$$

是四阶微分方程。

由前面的例子我们看到，在研究某些实际问题时，首先要建立微分方程，然后找出满足微分方程的函数(解微分方程)，就是说，找出这样的函数，把这函数代入微分方程能使该方程成为恒等式。这个函数就叫做该微分方程的解。

例如，函数(3)和(4)都是方程(1)的解；函数(8)和(10)都是方程(5)的解。

如果微分方程的解中含有任意常数，且任意常数的个数与微分方程的阶数相同，这样的解叫做微分方程的通解。例如，函数

(3)是方程(1)的解，它含有一个任意常数，而方程(1)是一阶的，所以函数(3)是方程(1)的通解. 又如，函数(8)是方程(5)的解，它含有两个任意常数，而方程(5)是二阶的，所以函数(8)是方程(5)的通解.

一阶微分方程的通解的几何意义是以常数C为参数的曲线族(其中每一条曲线都叫做微分方程的积分曲线). 例如函数(3)是以常数C为参数的抛物线族. 二阶微分方程的通解的几何意义是以常数C_1, C_2为参数的曲线族. 例如，函数(8)是以常数C_1和C_2为参数的抛物线族.

由于通解中含有任意常数，所以它还不能完全确定地反映某一客观事物的规律性. 要完全确定地反映客观事物的规律性，必须确定这些常数的值. 为此，要根据问题的实际情况，提出确定这些常数的条件. 例如，例1中的条件(2)，例2中的条件(6)便是这样的条件.

设微分方程中的未知函数为$y=y(x)$，如果微分方程是一阶的，通常用来确定任意常数的条件是

$$x=x_0\text{ 时}, \quad y=y_0,$$

或写成
$$y\big|_{x=x_0}=y_0,$$

其中x_0、y_0都是给定的值；如果微分方程是二阶的，通常用来确定任意常数的条件是：

$$x=x_0\text{ 时}, \quad y=y_0, \quad y'=y'_0,$$

或写成
$$y\big|_{x=x_0}=y_0, \quad y'\big|_{x=x_0}=y'_0,$$

其中x_0、y_0和y'_0都是给定的值. 上述这种条件叫做初始条件.

确定了通解中的任意常数后，就得到微分方程的特解. 例如，(4)式是方程(1)的特解，这个特解满足初始条件(2)；(10)式是方程(5)的特解，这个特解满足初始条件(6).

一阶微分方程满足初始条件$y\big|_{x=x_0}=y_0$的特解的几何意义是

经过点(x_0, y_0)的那条积分曲线. 例如，抛物线$y=x^2+1$就是微分方程(1)的一切积分曲线中经过点(1, 2)的那一条. 二阶微分方程满足初始条件$y|_{x=x_0}=y_0$, $y'|_{x=x_0}=y'_0$的特解的几何意义是通过点(x_0, y_0)且曲线在该点处的切线具有斜率为y'_0的那条积分曲线.

例3 验证：函数

$$x=C_1\cos kt+C_2\sin kt \tag{11}$$

是微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=0 \tag{12}$$

的解.

解 求出所给函数(11)的导数：

$$\frac{dx}{dt}=-kC_1\sin kt+kC_2\cos kt, \tag{13}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-k^2C_1\cos kt-k^2C_2\sin kt$$

$$=-k^2(C_1\cos kt+C_2\sin kt).$$

把$\frac{d^2x}{dt^2}$及x的表达式代入方程(12)，得

$$-k^2(C_1\cos kt+C_2\sin kt)+k^2(C_1\cos kt+C_2\sin kt)\equiv 0.$$

函数(11)及其导数代入方程(12)后成为一个恒等式，因此函数(11)是方程(12)的解.

例4 已知函数(11)是微分方程(12)的通解，求满足初始条件

$$x|_{t=0}=A,\quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=0$$

的特解.

解 将条件“$t=0$时，$x=A$”代入(11)式得

$$C_1=A.$$

将条件"$t=0$ 时，$\frac{dx}{dt}=0$"代入(13)式，得

$$C_2=0.$$

把 C_1、C_2 的值代入(11)式，就得所求的特解为

$$x=A\cos kt.$$

习 题 12-1

1．试说出下列各微分方程的阶数：

(1) $x(y')^2-2yy'+x=0$; (2) $x^2y''-xy'+y=0$;

(3) $xy'''+2y''+x^2y=0$; (4) $(7x-6y)dx+(x+y)dy=0$;

(5) $L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=0$; (6) $\frac{d\rho}{d\theta}+\rho=\sin^2\theta$.

2．指出下列各题中的函数是否为所给微分方程的解：

(1) $xy'=2y$, $y=5x^2$;

(2) $y''+y=0$, $y=3\sin x-4\cos x$;

(3) $y''-2y'+y=0$, $y=x^2e^x$;

(4) $y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2y=0$, $y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$.

3．在下列各题中，验证所给二元方程所确定的函数为所给微分方程的解：

(1) $(x-2y)y'=2x-y$, $x^2-xy+y^2=C$;

(2) $(xy-x)y''+xy'^2+yy'-2y'=0$, $y=\ln(xy)$.

4．从下列各题中的曲线族里，找出满足所给的初始条件的曲线．

(1) $x^2-y^2=C$, $y|_{x=0}=5$;

(2) $y=(C_1+C_2x)e^{2x}$, $y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=1$;

(3) $y=C_1\sin(x-C_2)$, $y|_{x=\pi}=1$, $y'|_{x=\pi}=0$.

5．写出由下列条件确定的曲线所能满足的微分方程：

(1) 曲线在点(x, y)处的切线的斜率等于该点横坐标的平方；

(2) 曲线上点 $P(x, y)$ 处的法线与 x 轴的交点为 Q，且线段 PQ 被 y 轴平分．

6．用微分方程表示一物理命题：某种气体的气压 P 对于温度 T 的变化率与气压成正比，与温度的平方成反比．

第二节　可分离变量的微分方程

一阶微分方程的一般形式是

$$F(x,\ y,\ y')=0.$$

如果由这方程可以解出 y'，那末我们有

$$y'=f(x,\ y).$$

以后我们就对这种形式的方程进行讨论.

在第一节的例 1 中，我们遇到一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx}=2x,$$

或
$$dy=2x\,dx,$$

把上式两端积分就得到这个方程的通解：

$$y=x^2+C.$$

但是并不是所有的一阶微分方程都能这样求解.

例如，对于一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx}=2xy^2 \tag{1}$$

我们就不能象上面那样直接对两端取积分的方法求出它的通解. 这是什么缘故呢？原因是方程(1)的右端含有未知函数 y，积分

$$\int 2xy^2\,dx$$

就求不出来，这是困难所在. 为了解决这个困难，在方程(1)的两端同时乘以 $\frac{dx}{y^2}$，使方程(1)变为

$$\frac{dy}{y^2}=2x\,dx.$$

这样，变量 x 与 y 已分离在等式的两端，然后两端积分得

$$-\frac{1}{y}=x^2+C$$

或
$$y=-\frac{1}{x^2+C},\tag{2}$$
其中C是任意常数。

可以验证，函数(2)确实满足一阶微分方程(1)，且含有一个任意常数，所以它是方程(1)的通解。

一般地，如果一个一阶微分方程能化成
$$g(y)dy=f(x)dx\tag{3}$$
的形式，就是说，把微分方程化成一端只含y的函数和dy，另一端只含x的函数和dx，那末原方程就称为可分离变量的微分方程。

假定方程(3)中的函数$g(y)$和$f(x)$是连续的。设$y=\varphi(x)$是方程(3)的解，将它代入(3)中得到恒等式
$$g[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=f(x)dx.$$
将上式两端积分，并由$y=\varphi(x)$引进变量y，得
$$\int g(y)\,dy=\int f(x)dx.\tag{4}$$
因此，方程(3)的解$y=\varphi(x)$满足等式(4)。反之，如果$y=\varphi(x)$满足等式(4)，那末在$g(y)\neq 0$的条件下，$y=\varphi(x)$也是(3)的解。事实上，把(4)式写成
$$\int g(y)dy-\int f(x)dx=0,$$
记
$$F(x,\ y)=\int g(y)dy-\int f(x)dx,$$
则上式成为$F(x,\ y)=0$。由隐函数的求导法则可知，当$g(y)\neq 0$时，
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x(x,\ y)}{F_y(x,\ y)}=\frac{f(x)}{g(y)}.$$
这就表示$y=\varphi(x)$满足方程(3)。所以，如果已分离变量的方程(3)中$g(y)$和$f(x)$是连续的，且$g(y)\neq 0$，那末(3)式两端积分后得到的等式(4)，就用隐式给出了方程(3)的解。因为不定积分中

含有任意常数，所以这样得出的解是方程(3)的通解。

例 1 求微分方程

$$\frac{dy}{dx}=2xy \tag{5}$$

的通解。

解 方程(5)是可分离变量的，分离变量后得

$$\frac{dy}{y}=2x\,dx,$$

两端积分
$$\int\frac{dy}{y}=\int 2x\,dx,$$

得

$$\ln|y|=x^2+C_1, \tag{6}$$

从而
$$|y|=e^{x^2+C_1}=e^{C_1}e^{x^2},$$

即
$$y=\pm e^{C_1}e^{x^2}.$$

因 $\pm e^{C_1}$ 仍是任意常数，把它记作 C，便得方程(5)的通解

$$y=Ce^{x^2}.$$

以后为了运算方便起见，可把 $\ln|y|$ 写成 $\ln y$，只要记住最后得到的任意常数 C 可正可负就行了。

例 2 放射性元素铀由于不断地有原子放射出微粒子而变成其它元素，铀的含量就不断减少，这种现象叫做衰变。由原子物理学知道，铀的衰变速度与当时未衰变的原子的含量 M 成正比。已知 $t=0$ 时铀的含量为 M_0，求在衰变过程中铀含量 $M(t)$ 随时间 t 变化的规律。

解 铀的衰变速度就是 $M(t)$ 对时间 t 的导数 $\frac{dM}{dt}$。由于铀的衰变速度与其含量成正比，故得微分方程

$$\frac{dM}{dt}=-\lambda M, \tag{7}$$

其中 $\lambda(\lambda>0)$ 是常数，叫做衰变常数。λ 前置负号是由于当 t 增加

时 M 单调减少，即 $\frac{dM}{dt}<0$ 的缘故。

按题意，初始条件为

$$M\big|_{t=0}=M_0.$$

方程(7)是可分离变量的．分离变量后得

$$\frac{dM}{M}=-\lambda dt.$$

两端积分 $$\int\frac{dM}{M}=\int(-\lambda)dt,$$

得 $$\ln M=-\lambda t+C_1,$$

即 $$M=e^{-\lambda t+C_1}=e^{C_1}e^{-\lambda t}.$$

记 $C=e^{C_1}$，便得方程(7)的通解为

$$M=Ce^{-\lambda t}. \tag{8}$$

把初始条件代入(8)式，得

$$M_0=Ce^0=C,$$

所以 $$M=M_0e^{-\lambda t},$$

这就是所求铀的衰变规律．由此可见，铀的含量随时间的增加而按指数规律衰减(图 12-1)．

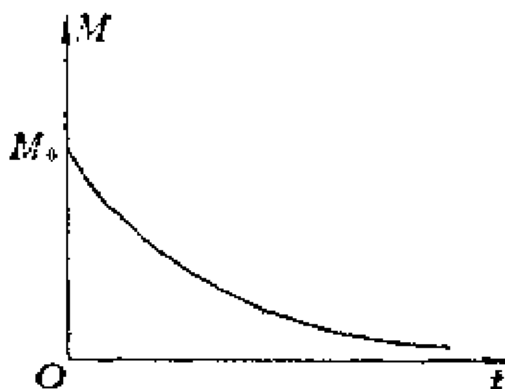


图 12-1

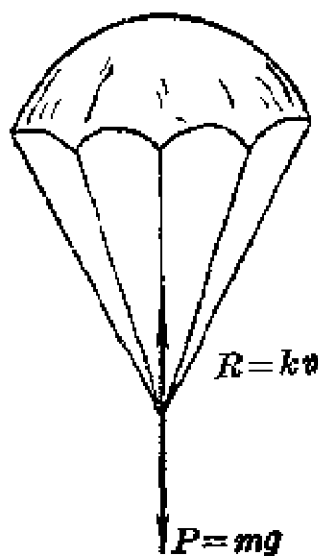


图 12-2

例 3 设降落伞从跳伞塔下落后，所受空气阻力与速度成正比，并设降落伞离开跳伞塔时($t=0$)速度为零．求降落伞下落速

度与时间的函数关系.

解 设降落伞下落速度为 $v(t)$. 降落伞在空中下落时，同时受到重力 P 与阻力 R 的作用(图 12-2). 重力大小为 mg，方向与 v 一致；阻力大小为 kv(k 为比例系数)，方向与 v 相反，从而降落伞所受外力为

$$F=mg-kv.$$

根据牛顿第二运动定律

$$F=ma$$

(其中 a 为加速度)，得函数 $v(t)$ 应满足的方程为

$$m\frac{dv}{dt}=mg-kv. \tag{9}$$

按题意，初始条件为

$$v|_{t=0}=0.$$

方程(9)是可分离变量的. 分离变量后得

$$\frac{dv}{mg-kv}=\frac{dt}{m},$$

两端积分 $$\int\frac{dv}{mg-kv}=\int\frac{dt}{m},$$

得 $$-\frac{1}{k}\ln(mg-kv)=\frac{t}{m}+C_1,$$

即 $$mg-kv=e^{-\frac{k}{m}t-kC_1},$$

或

$$v=\frac{mg}{k}+Ce^{-\frac{k}{m}t}\quad\left(C=-\frac{e^{-kC_1}}{k}\right), \tag{10}$$

这就是方程(9)的通解.

将初始条件 $v|_{t=0}=0$ 代入(10)式，得

$$C=-\frac{mg}{k}.$$

于是所求的特解为

$$v=\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right). \tag{11}$$

由(11)可以看出，随着时间 t 的增大，速度 v 逐渐接近于常数 $\frac{mg}{k}$，且不会超过 $\frac{mg}{k}$，也就是说，跳伞后开始阶段是加速运动，但以后逐渐接近于等速运动.

例 4 有高为 1 米的半球形容器，水从它的底部小孔流出，小孔横截面面积为 1 平方厘米(图 12-3). 开始时容器内盛满了水，求水从小孔流出过程中容器里水面的高度 h(水面与孔口中心间的距离)随时间 t 变化的规律.

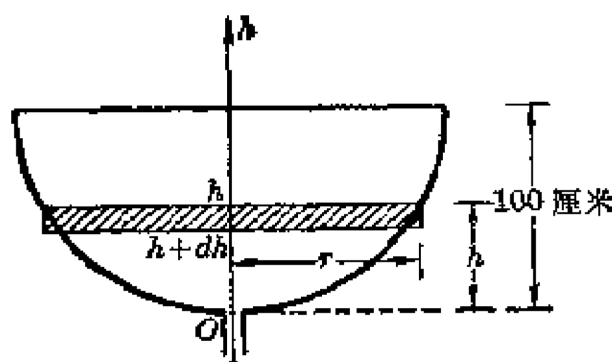


图 12-3

解 由水力学知道，水从孔口流出的流量(即通过孔口横截面的水的体积 V 对时间 t 的变化率) Q 可用下列公式计算：

$$Q=\frac{dV}{dt}=0.62\,S\sqrt{2gh},$$

其中 0.62 为流量系数，S 为孔口横截面面积，g 为重力加速度. 现在孔口横截面面积为 $S=1$ 厘米^2，故

$$\frac{dV}{dt}=0.62\sqrt{2gh},$$

或

$$dV=0.62\sqrt{2gh}\,dt. \tag{12}$$

另一方面，设在微小时间间隔 $[t,\ t+dt]$ 内，水面高度由 h 降至 $h+dh\,(dh<0)$，则又可得到

$$dV=-\pi r^2dh, \tag{13}$$

其中 r 是时刻 t 的水面半径(图 12-3)，右端置负号是由于 $dh<0$ 而 $dV>0$ 的缘故. 又因

$$r=\sqrt{100^2-(100-h)^2}=\sqrt{200h-h^2},$$

所以(13)式变成

$$dV=-\pi(200h-h^2)dh. \tag{14}$$

比较(12)和(14)两式，得

$$0.62\sqrt{2gh}\,dt=-\pi(200h-h^2)dh, \tag{15}$$

这就是未知函数 $h=h(t)$ 应满足的微分方程.

此外，开始时容器内的水是满的，所以未知函数 $h=h(t)$ 还应满足下列初始条件：

$$h|_{t=0}=100. \tag{16}$$

方程(15)是可分离变量的. 分离变量后得

$$dt=-\frac{\pi}{0.62\sqrt{2g}}(200h^{\frac{1}{2}}-h^{\frac{3}{2}})dh.$$

两端积分，得

$$t=-\frac{\pi}{0.62\sqrt{2g}}\int(200h^{\frac{1}{2}}-h^{\frac{3}{2}})dh,$$

即

$$t=-\frac{\pi}{0.62\sqrt{2g}}\left(\frac{400}{3}h^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}h^{\frac{5}{2}}\right)+C, \tag{17}$$

其中 C 是任意常数.

把初始条件(16)代入(17)式，得

$$0=-\frac{\pi}{0.62\sqrt{2g}}\left(\frac{400}{3}\times100^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}\times100^{\frac{5}{2}}\right)+C,$$

由此

$$C=\frac{\pi}{0.62\sqrt{2g}}\left(\frac{400000}{3}-\frac{200000}{5}\right)$$

$$=\frac{\pi}{0.62\sqrt{2g}}\times\frac{14}{15}\times10^5.$$

把所得的 C 值代入(17)式并化简，就得

$$t=\frac{\pi}{4.65\sqrt{2g}}(7\times10^5-10^3h^{\frac{3}{2}}+3h^{\frac{5}{2}}).$$

上式表达了水从小孔流出的过程中容器内水面高度 h 与时间 t 之间的函数关系，这就是水从小孔流出的规律。

这里还要指出，在例 4 中我们是通过对微小量 dV 的分析得到微分方程(15)的，这种微小量分析的方法，也是建立微分方程的一种常用方法。

习 题 12-2

1．求下列微分方程的通解：

(1) $xy'-y\ln y=0$; (2) $3x^2+5x-5y'=0$;

(3) $y'=\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$; (4) $y'-xy'=a(y^2+y')$;

(5) $\sec^2x\,\mathrm{tg}\,y\,dx+\sec^2y\,\mathrm{tg}\,x\,dy=0$; (6) $\frac{dy}{dx}=10^{x-y}$;

(7) $(e^{x+y}-e^x)dx+(e^{x+y}+e^y)dy=0$;

(8) $\cos x\sin y\,dx+\sin x\cos y\,dy=0$;

(9) $(y+1)^2\frac{dy}{dx}+x^3=0$; (10) $y\,dx+(x^2-4x)dy=0$.

2．求下列微分方程满足所给初始条件的特解：

(1) $y'=e^{2x-y}$, $y|_{x=0}=0$;

(2) $\cos x\sin y\,dy=\cos y\sin x\,dx$, $y|_{x=0}=\frac{\pi}{4}$;

(3) $y'\sin x=y\ln y$, $y|_{x=\frac{\pi}{2}}=e$;

(4) $\cos y\,dx+(1+e^{-x})\sin y\,dy=0$, $y|_{x=0}=\frac{\pi}{4}$;

(5) $x\,dy+2y\,dx=0$, $y|_{x=2}=1$.

3．有一盛满了水的圆锥形漏斗，高为 10 厘米，顶角为 60°，漏斗下面有面积为 0.5 平方厘米的孔，求水从小孔流出的规律及流完所需的时间。

4．质量为 1 克的质点受外力作用作直线运动，这外力和时间成正比，和质点运动的速度成反比。在 $t=10$ 秒时，速度等于 50 厘米/秒，外力为 4 达因。问从运动开始经过了一分钟后的速度是多少？

5．镭的衰变有如下的规律：镭的衰变速度与它的现存量 R 成正比。由

经验材料得知，镭经过1600年后，只余原始量 R_0 的一半．试求镭的量 R 与时间 t 的函数关系．

6．一曲线通过点(2, 3)，它在两坐标轴间的任意切线线段均被切点所平分，求这曲线方程．

第三节　齐 次 方 程

一、齐 次 方 程

如果一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y)$$

中的函数 $f(x, y)$ 可写成 $\frac{y}{x}$ 的函数，即 $f(x, y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$，则称这方程为齐次方程．例如

$$(xy-y^2)dx-(x^2-2xy)dy=0$$

是齐次方程，因为

$$f(x, y)=\frac{xy-y^2}{x^2-2xy}=\frac{\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1-2\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

在齐次方程

$$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1}$$

中，引进新的未知函数

$$u=\frac{y}{x}, \tag{2}$$

就可化为可分离变量的方程．因为由(2)有

$$y=ux, \qquad \frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx},$$

代入方程(1)，便得方程

$$u+x\frac{du}{dx}=\varphi(u),$$

即
$$x\frac{du}{dx}=\varphi(u)-u.$$

分离变量后，得

$$\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x}.$$

两端积分，得

$$\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\int\frac{dx}{x}.$$

求出积分后，再用 $\frac{y}{x}$ 代替 u，便得所给齐次方程的通解。

例1 解方程

$$y^2+x^2\frac{dy}{dx}=xy\frac{dy}{dx}.$$

解 原方程可写成

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{xy-x^2}=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}-1},$$

因此是齐次方程。令 $\frac{y}{x}=u$，则

$$y=ux,\qquad \frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx},$$

于是原方程变为

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{u^2}{u-1},$$

即
$$x\frac{du}{dx}=\frac{u}{u-1}.$$

分离变量后，得

$$\left(1-\frac{1}{u}\right)du=\frac{dx}{x}.$$

两端积分，得 $$u-\ln u+C_1=\ln x,$$

或写为 $$\ln(xu)=u+C_1.$$

以 $\frac{y}{x}$ 代上式中的 u，便得

$$\ln y=\frac{y}{x}+C_1,$$

因此所给方程的通解为

$$y=Ce^{\frac{y}{x}}\quad (C=e^{C_1}).$$

例 2 有旋转曲面形状的凹镜，假设由旋转轴上一点 O 发出的一切光线经此凹镜反射后都与旋转轴平行．求这旋转曲面的方程（汽车灯和探照灯内的凹镜就是这样的）．

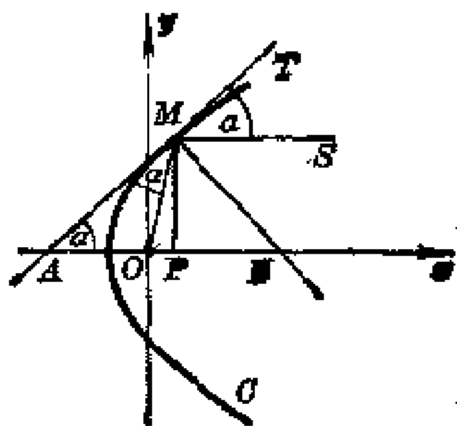


图 12-4

解 取旋转轴为 x 轴，光源所在之处取作原点 O（图 12-4）．取通过旋转轴的任意平面为 xOy 坐标面，这平面截此旋转面得曲线 C．设 O 点发出的某条光线经 C 上一点 $M(x, y)$ 反射后是一条与 x 轴平行的直线 MS．又设过点 M 的切线 AT 与 x 轴的倾角是 α．根据题意，$\angle SMT=\alpha$．另一方面，$\angle OMA$ 是入射角的余角，$\angle SMT$ 是反射角的余角，于是由光学中的反射定律有 $\angle OMA=\angle SMT=\alpha$．从而 $AO=OM$．但 $AO=AP-OP=PM\operatorname{ctg}\alpha-OP=\frac{y}{y'}-x$，而 $OM=\sqrt{x^2+y^2}$．于是得微分方程

$$\frac{y}{y'}-x=\sqrt{x^2+y^2},$$

或 $$ydx=(x+\sqrt{x^2+y^2})dy.$$

这是齐次方程．令 $\frac{x}{y}=v$，则 $x=yv$，$dx=vdy+ydv$．代入上式得

$$y(vdy+ydv)=y(v+\sqrt{v^2+1})dy^{①},$$

因为 $y\neq 0$，故可化简得

$$ydv=\sqrt{v^2+1}\,dy,$$

从而
$$\frac{dv}{\sqrt{v^2+1}}=\frac{dy}{y}.$$

积分后，得
$$\ln(v+\sqrt{v^2+1})=\ln y-\ln C,$$

或
$$v+\sqrt{v^2+1}=\frac{y}{C}.$$

由
$$\left(\frac{y}{C}-v\right)^2=v^2+1,$$

得到
$$\frac{y^2}{C^2}-\frac{2yv}{C}=1,$$

或
$$y^2=2C\left(x+\frac{C}{2}\right).$$

这是以 x 轴为轴，焦点在原点的一族抛物线。这族抛物线绕 x 轴旋转所得旋转抛物面的方程为

$$y^2+z^2=2C\left(x+\frac{C}{2}\right).$$

这就是所要求的旋转曲面方程。

如果凹镜底面的直径是 d，从顶点到底面的距离是 h，则以 $x+\frac{C}{2}=h$ 及 $y=\frac{d}{2}$ 代入 $y^2=2C\left(x+\frac{C}{2}\right)$，得 $C=\frac{d^2}{8h}$。于是得到一个作为特解的旋转抛物面

$$y^2+z^2=\frac{d^2}{4h}\left(x+\frac{d^2}{16h}\right).$$

① 因 $\sqrt{x^2+y^2}=|y|\sqrt{v^2+1}$，此式本应写作 $y(vdy+ydv)=(yv+|y|\sqrt{v^2+1})dy$，这里去掉了绝对值记号，实际是假定 $y>0$。若 $y<0$，则下面的推导应作相应改变，但最后得出的结果不变。

*二、可化为齐次的方程

方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\tag{3}$$

当 $c=c_1=0$ 时是齐次的，否则不是齐次的．在非齐次的情形，可用下列变换把它化为齐次方程：令

$$x=X+h,\quad y=Y+k,$$

其中 h 及 k 是待定的常数．于是

$$dx=dX,\quad dy=dY,$$

从而方程(3)成为

$$\frac{dY}{dX}=\frac{aX+bY+ah+bk+c}{a_1X+b_1Y+a_1h+b_1k+c_1}.$$

如果方程组

$$\begin{cases}ah+bk+c=0,\\ a_1h+b_1k+c_1=0\end{cases}$$

的系数行列式 $\begin{vmatrix}a & b\\ a_1 & b_1\end{vmatrix}\neq 0$，即 $\frac{a_1}{a}\neq\frac{b_1}{b}$，那末可以定出 h 及 k 使它们满足上述方程组．这样，方程(3)便化为齐次方程

$$\frac{dY}{dX}=\frac{aX+bY}{a_1X+b_1Y}.$$

求出这齐次方程的通解后，在通解中以 $x-h$ 代 X，$y-k$ 代 Y，便得方程(3)的通解．

当 $\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}$ 时，h 及 k 无法求得，因此上述方法不能应用．但这时令 $\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\lambda$，从而方程(3)可写成

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+c}{\lambda(ax+by)+c_1}.$$

引入新变量 $v=ax+by$，则

$$\frac{dv}{dx}=a+b\frac{dy}{dx}, \quad 或 \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{b}\left(\frac{dv}{dx}-a\right).$$

于是方程(3)成为

$$\frac{1}{b}\left(\frac{dv}{dx}-a\right)=\frac{v+c}{\lambda v+c_1},$$

这是可分离变量的方程.

以上所介绍的方法可以应用于更一般的方程

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right).$$

例 3 解方程

$$(2x+y-4)dx+(x+y-1)dy=0.$$

解 所给方程属方程(3)的类型. 令 $x=X+h$, $y=Y+k$, 则 $dx=dX$, $dy=dY$, 代入原方程得

$$(2X+Y+2h+k-4)dX+(X+Y+h+k-1)dY=0.$$

解方程组

$$\begin{cases}2h+k-4=0,\\ h+k-1=0\end{cases}$$

得 $h=3$, $k=-2$. 令 $x=X+3$, $y=Y-2$, 原方程成为

$$(2X+Y)dX+(X+Y)dY=0,$$

或

$$\frac{dY}{dX}=-\frac{2X+Y}{X+Y}=-\frac{2+\dfrac{Y}{X}}{1+\dfrac{Y}{X}},$$

这是齐次方程.

令 $\frac{Y}{X}=u$, 则 $Y=uX$, $\frac{dY}{dX}=u+X\frac{du}{dX}$, 于是方程变为

$$u+X\frac{du}{dX}=-\frac{2+u}{1+u},$$

或

$$X\frac{du}{dX}=-\frac{2+2u+u^2}{1+u}.$$

分离变量得 $$-\frac{u+1}{u^2+2u+2}\,du=\frac{dX}{X}.$$

积分得 $$\ln C_1-\frac{1}{2}\ln(u^2+2u+2)=\ln X,$$

于是 $$\frac{C_1}{\sqrt{u^2+2u+2}}=X,$$

$$C_2=X^2(u^2+2u+2)\quad (C_2=C_1^2),$$

即 $$Y^2+2XY+2X^2=C_2.$$

以 $X=x-3$, $Y=y+2$ 代入上式并化简，得

$$2x^2+2xy+y^2-8x-2y=C\quad (C=C_2-10).$$

习 题 12-3

1．求下列齐次方程的通解：

(1) $xy'-y-\sqrt{y^2-x^2}=0$；(2) $x\frac{dy}{dx}=y\ln\frac{y}{x}$；

(3) $(x^2+y^2)dx-xy\,dy=0$；(4) $(x^3+y^3)dx-3xy^2\,dy=0$；

(5) $\left(2x\,\mathrm{sh}\,\frac{y}{x}+3y\,\mathrm{ch}\,\frac{y}{x}\right)dx-3x\,\mathrm{ch}\,\frac{y}{x}\,dy=0$；

(6) $(1+2e^{\frac{x}{y}})\,dx+2e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$.

2．求下列齐次方程满足所给初始条件的特解：

(1) $(y^2-3x^2)dy+2xy\,dx=0$, $y|_{x=0}=1$；

(2) $y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$, $y|_{x=1}=2$；

(3) $(x^2+2xy-y^2)dx+(y^2+2xy-x^2)dy=0$, $y|_{x=1}=1$.

3*. 化下列方程为齐次方程，并求出通解：

(1) $(2x-5y+3)dx-(2x+4y-6)dy=0$；

(2) $(x-y-1)dx+(4y+x-1)dy=0$；

(3) $(3y-7x+7)dx+(7y-3x+3)dy=0$；

(4) $(x+y)dx+(3x+3y-4)dy=0$.

4．验证形如 $yf(xy)dx+xg(xy)dy=0$ 的微分方程，可经变量代换 $v=xy$ 化为可分离变量的方程，并求其通解.

5. 用适当的变量代换将下列方程化为可分离变量的方程，然后求出通解：

(1) $\frac{dy}{dx}=(x+y)^2$；　(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x-y}+1$；

(3) $xy'+y=y(\ln x+\ln y)$；

(4) $y'=y^2+2(\sin x-1)y+\sin^2 x-2\sin x-\cos x+1$；

(5) $y(xy+1)dx+x(1+xy+x^2y^2)dy=0$.

第四节　一阶线性微分方程

一、线性方程

方程

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x) \tag{1}$$

叫做一阶线性微分方程，因为它对于未知函数 y 及其导数是一次方程. 如果 $Q(x)\equiv 0$, 则方程(1)称为齐次的；如果 $Q(x)$不恒等于零，则方程(1)称为非齐次的.

设 (1) 为非齐次线性方程. 为了求出非齐次线性方程 (1) 的解，我们先把 $Q(x)$ 换成零而写出

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0. \tag{2}$$

方程(2)叫做对应于原来方程(1)的齐次线性方程. 方程 (2) 是可分离变量的，分离变量后得

$$\frac{dy}{y}=-P(x)dx,$$

两端积分，得

$$\ln y=-\int P(x)dx+\ln C,$$

或
$$y=Ce^{-\int P(x)dx},$$

这是对应的齐次线性方程(2)的通解.

现在我们使用所谓常数变易法来求非齐次线性方程(1)的通解．这方法是把(2)的通解中的C看作x的未知函数$C(x)$，即令

$$y=C(x)e^{-\int P(x)dx}, \tag{3}$$

并以(3)满足方程(1)作为条件来定出$C(x)$，然后将定出来的$C(x)$代入(3)，这样便得到方程(1)的解．下面使用常数变易法来求方程(1)的解．

由(3)有

$$\frac{dy}{dx}=C'(x)\,e^{-\int P(x)dx}-P(x)C(x)\,e^{-\int P(x)dx}. \tag{4}$$

将(3)和(4)代入方程(1)得

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx}-P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx}+P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x),$$

即

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x).$$

由此定出

$$C(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C.$$

把定出来的$C(x)$代入(3)，便得非齐次线性方程(1)的通解

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right). \tag{5}$$

将(5)式改写成两项之和

$$y=Ce^{-\int P(x)dx}+e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx.$$

上式右端第一项是对应的齐次线性方程(2)的通解，第二项是原非齐次线性方程(1)的一个特解(在(1)的通解(5)中取$C=0$便得到这个特解)．由此可知，一阶非齐次线性方程的通解等于对应的齐次方程的通解与非齐次方程的一个特解之和．

例 1　求方程

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$$

的通解．

解 这是一个非齐次线性方程. 先求对应的齐次方程的通解:

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x+1}y=0,$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{2dx}{x+1},$$

$$\ln y=2\ln(x+1)+C_1,$$

$$y=C(x+1)^2 \qquad (C=e^{C_1}).$$

用常数变易法. 把 C 换成 $C(x)$, 即

$$y=C(x)(x+1)^2, \tag{6}$$

那末 $$\frac{dy}{dx}=C'(x)(x+1)^2+2C(x)(x+1),$$

代入所给非齐次方程, 得

$$C'(x)=(x+1)^{\frac{1}{2}}.$$

积分, 得 $$C(x)=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C.$$

再把上式代入(6)式, 即得所求方程的通解为

$$y=(x+1)^2\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C\right].$$

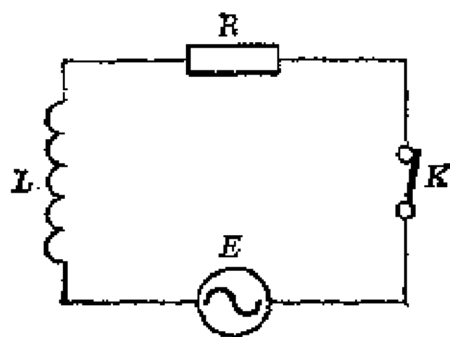


图 12-5

例 2 有一个电路如图 12-5 所示, 其中电源电动势为 $E=E_m\sin\omega t$(E_m、ω 都是常量), 电阻 R 和电感 L 都是常量. 求电流 $i(t)$.

解 (i) 列方程 由电学知道, 当电流变化时, L 上有感应电动势 $-L\frac{di}{dt}$. 由回路电压定律得出

$$E-L\frac{di}{dt}-iR=0,$$

即 $$\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=\frac{E}{L}.$$

把 $E=E_m\sin\omega t$ 代入上式，得

$$\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=\frac{E_m}{L}\sin\omega t. \tag{7}$$

未知函数 $i(t)$ 应满足方程(7)．此外，开关 K 闭合的时刻 $t=0$，这时 $i(t)$ 还应该满足初始条件

$$i\big|_{t=0}=0. \tag{8}$$

(ii) 解方程

方程(7)是一个非齐次线性方程．可以先求出对应的齐次方程的通解，然后用常数变易法求非齐次方程的通解．但是，也可以直接应用通解公式(5)来求解．这里 $P(t)=\frac{R}{L}$，$Q(t)=\frac{E_m}{L}\sin\omega t$，代入公式(5)，得

$$i(t)=e^{-\frac{R}{L}t}\left(\int\frac{E_m}{L}e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t\,dt+C\right).$$

应用分部积分法，得

$$\int e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t\,dt=\frac{e^{\frac{R}{L}t}}{R^2+\omega^2L^2}(RL\sin\omega t-\omega L^2\cos\omega t).$$

将上式代入前式并化简，得方程(7)的通解

$$i(t)=\frac{E_m}{R^2+\omega^2L^2}(R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t)+Ce^{-\frac{R}{L}t},$$

其中 C 为任意常数．

将初始条件(8)代入上式，得

$$C=\frac{\omega LE_m}{R^2+\omega^2L^2},$$

因此，所求函数 $i(t)$ 为

$$i(t)=\frac{\omega LE_m}{R^2+\omega^2L^2}e^{-\frac{R}{L}t}+\frac{E_m}{R^2+\omega^2L^2}(R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t). \tag{9}$$

为了便于说明(9)式所反映的物理现象，下面把 $i(t)$ 中第二项的形式稍加改变．

令 $\cos\varphi=\dfrac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}$, $\sin\varphi=\dfrac{\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}$,

于是(9)式可写成

$$i(t)=\frac{\omega LE_m}{R^2+\omega^2L^2}e^{-\frac{R}{L}t}+\frac{E_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(\omega t-\varphi),$$

其中
$$\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{\omega L}{R}.$$

当 t 增大时，上式右端第一项(叫做暂态电流)逐渐衰减而趋于零；第二项(叫做稳态电流)是正弦函数，它的周期和电动势的周期相同、而相角落后 φ.

二、贝努利方程

方程

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n \quad (n\neq 0,\ 1) \tag{10}$$

叫做贝努利(Bernoulli)方程．当 $n=0$ 或 $n=1$ 时，这是线性微分方程．当 $n\neq 0$, $n\neq 1$ 时，这方程不是线性的，但是通过变量的代换，便可把它化为线性的．事实上，以 y^n 除方程(10)的两端，得

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x). \tag{11}$$

容易看出，上式左端第一项与 $\dfrac{d}{dx}(y^{1-n})$ 只差一个常数因子 $1-n$，因此我们引入新的未知函数

$$z=y^{1-n},$$

那末
$$\frac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}.$$

用 $(1-n)$ 乘方程(11)的两端，再通过上述代换便得线性方程

$$\frac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x).$$

求出这方程的通解后，以 y^{1-n} 代 z，便得到贝努利方程的通解.

例 3 求方程

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=a(\ln x)y^2$$

的通解.

解 以 y^2 除方程的两端，得

$$y^{-2}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y^{-1}=a\ln x,$$

即

$$-\frac{d(y^{-1})}{dx}+\frac{1}{x}y^{-1}=a\ln x.$$

令 $z=y^{-1}$，则上述方程成为

$$\frac{dz}{dx}-\frac{1}{x}z=-a\ln x.$$

这是一个线性方程，它的通解为

$$z=x\left[C-\frac{a}{2}(\ln x)^2\right].$$

以 y^{-1} 代 z，得所求方程的通解为

$$yx\left[C-\frac{a}{2}(\ln x)^2\right]=1.$$

习 题 12-4

1. 求下列微分方程的通解：

(1) $\frac{dy}{dx}+y=e^{-x}$； (2) $xy'+y=x^2+3x+2$；

(3) $y'+y\cos x=e^{-\sin x}$； (4) $y'+y\operatorname{tg}x=\sin 2x$；

(5) $(x^2-1)y'+2xy-\cos x=0$； (6) $(y^2-6x)y'+2y=0$；

(7) $\frac{dy}{dx}+2xy=4x$； (8) $y\ln y dx+(x-\ln y)dy=0$；

(9) $(x-2)\frac{dy}{dx}=y+2(x-2)^3$； (10) $\frac{d\rho}{d\theta}+3\rho=2$.

2. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解：

(1) $\frac{dy}{dx}-y\operatorname{tg}x=\sec x$, $y|_{x=0}=0$；

(2) $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=\frac{\sin x}{x}$, $\quad y|_{x=\pi}=1$;

(3) $\frac{dy}{dx}+y\operatorname{ctg}x=5e^{\cos x}$, $\quad y|_{x=\frac{\pi}{2}}=-4$;

(4) $\frac{dy}{dx}+3y=8$, $\quad y|_{x=0}=2$;

(5) $\frac{dy}{dx}+\frac{2-3x^2}{x^3}y=1$, $\quad y|_{x=1}=0$.

3. 求一曲线的方程，这曲线通过原点，并且它在点(x, y)处的切线斜率等于$2x+y$.

4. 设有一质量为m的质点作直线运动. 从速度等于零的时刻起，有一个与运动方向一致、大小与时间成正比(比例系数为k_1)的力作用于它，此外还受一与速度成正比(比例系数为k_2)的阻力作用. 求质点运动的速度与时间的函数关系.

5. 设有一个由电阻$R=10$欧、电感$L=2$亨和电源电压$E=20\sin 5t$伏串联组成的电路. 开关K合上后，电路中有电流通过. 求电流i与时间t的函数关系.

6. 求下列贝努利方程的通解:

(1) $\frac{dy}{dx}+y=y^2(\cos x-\sin x)$;

(2) $y'+\frac{1}{x}y=2x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$;

(3) $\frac{dy}{dx}-3xy=xy^2$;

(4) $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{3}y=\frac{1}{3}(1-2x)y^4$;

(5) $\frac{dy}{dx}-y=xy^5$;

(6) $xdy-[y+xy^3(1+\ln x)]dx=0$.

第五节　全微分方程

一个一阶微分方程写成

$$P(x, y)dx+Q(x, y)dy=0 \tag{1}$$

形式后，如果它的左端恰好是某一个函数$u=u(x, y)$的全微分:

$$du(x, y)=P(x, y)dx+Q(x, y)dy,$$

那末方程(1)就叫做全微分方程. 这里

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}=Q(x, y),$$

而方程(1)就是

$$du(x, y)=0. \tag{1'}$$

如果 $y=\varphi(x)$ 是方程(1)的解，那末这解满足方程(1')，故有

$$du[x, \varphi(x)]\equiv 0,$$

因此

$$u[x, \varphi(x)]=C.$$

这表示，方程(1)的解 $y=\varphi(x)$ 是由方程 $u(x, y)=C$ 所确定的隐函数。

另一方面，如果方程 $u(x, y)=C$ 确定一个可微的隐函数 $y=\varphi(x)$，则

$$u[x, \varphi(x)]\equiv C,$$

上式两端对 x 求导，得

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0,$$

或

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=0,$$

即

$$P(x, y)dx+Q(x, y)dy=0.$$

这表示，由方程 $u(x, y)=C$ 所确定的隐函数是方程(1)的解。

因此，如果方程(1)的左端是函数 $u(x, y)$ 的全微分，那末全微分方程(1)的通解就是方程

$$u(x, y)=C$$

所确定的隐函数，其中 C 是任意常数。

由第十章第三节的讨论可知，当 $P(x, y)$、$Q(x, y)$ 在单连通域 G 内具有一阶连续偏导数时，要使方程(1)是全微分方程，其充要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \tag{2}$$

在区域 G 内恒成立，且当此条件满足时，全微分方程(1)的通解为

$$u(x, y)\equiv\int_{x_0}^{x} P(x, y)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy=C, \tag{3}$$

其中 x_0, y_0 是在区域 D 内适当选定的点 $M_0(x_0, y_0)$ 的坐标.

例 求解 $(5x^4+3xy^2-y^3)dx+(3x^2y-3xy^2+y^2)dy=0$.

解 这里

$$\frac{\partial P}{\partial y}=6xy-3y^2=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以这是全微分方程. 可取 $x_0=0, y_0=0$, 根据公式(3), 有

$$u(x, y)=\int_0^x(5x^4+3xy^2-y^3)dx+\int_0^y y^2 dy$$

$$=x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\frac{1}{3}y^3.$$

于是, 方程的通解为

$$x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\frac{1}{3}y^3=C.$$

如果条件(2)不能满足, 方程(1)就不是全微分方程. 这时如果有一个适当的函数 $\mu=\mu(x, y)$, 使方程(1)在乘上 $\mu(x, y)$ 后成为全微分方程

$$\mu P\,dx+\mu Q\,dy=0,$$

则函数 $\mu(x, y)$ 叫做方程(1)的积分因子.

积分因子的求法, 一般说来, 不是一件容易的事; 不过在比较简单的情形下, 可以凭观察得到.

例如, 方程

$$ydx-xdy=0$$

不是全微分方程. 但由于 $d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{ydx-xdy}{y^2}$, 可知 $\frac{1}{y^2}$ 是一个积分因子. 不难验证, $\frac{1}{xy}$ 和 $\frac{1}{x^2}$ 也都是积分因子. 乘上其中任何一个并积分, 便能得到所求方程的通解

$$\frac{x}{y}=C.$$

又如, 方程

$$(1+xy)ydx+(1-xy)xdy=0$$

也不是全微分方程. 但将它的各项重新合并,得

$$(ydx+xdy)+xy(ydx-xdy)=0,$$

再把它改写成

$$d(xy)+x^2y^2\left(\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}\right)=0,$$

这时容易看出 $\frac{1}{x^2y^2}$ 为积分因子,乘上该积分因子后,方程就变为

$$\frac{d(xy)}{x^2y^2}+\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}=0.$$

积分之,得通解为

$$-\frac{1}{xy}+\ln\frac{x}{y}=C'$$

即

$$\frac{x}{y}=Ce^{\frac{1}{xy}}\quad(C=e^{C'}).$$

习 题 12-5

1. 判别下列方程中哪些是全微分方程,并求全微分方程的通解:

(1) $(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^2)dy=0$;

(2) $(a^2-2xy-y^2)dx-(x+y)^2dy=0$;

(3) $e^ydx+(xe^y-2y)dy=0$;

(4) $(x\cos y+\cos x)y'-y\sin x+\sin y=0$;

(5) $(x^2-y)dx-x\,dy=0$;

(6) $y(x-2y)dx-x^2dy=0$;

(7) $(1+e^{2\theta})d\rho+2\rho e^{2\theta}d\theta=0$;

(8) $(x^2+y^2)dx+xy\,dy=0$.

2. 利用观察法求出下列方程的积分因子,并求其通解:

(1) $(x+y)(dx-dy)=dx+dy$;

(2) $y\,dx-x\,dy+y^2x\,dx=0$;

(3) $y^2(x-3y)dx+(1-3y^2x)dy=0$;

(4) $x\,dx+y\,dy=(x^2+y^2)dx$;

(5) $(x-y^2)dx+2xy\,dy=0$;

(6) $2y\,dx-3xy^2dx-x\,dy=0$.

3. 验证 $\frac{1}{xy[f(xy)-g(xy)]}$ 是微分方程 $yf(xy)dx+xg(xy)dy=0$ 的积分因子，并求下列方程的通解：

(1) $y(x^2y^2+2)dx+x(2-2x^2y^2)dy=0$;

(2) $y(2xy+1)dx+x(1+2xy-x^3y^3)dy=0$.

4. 证明 $\frac{1}{x^2}f\left(\frac{y}{x}\right)$ 是微分方程 $x\,dy-y\,dx=0$ 的一个积分因子。

*第六节　欧拉-柯西近似法

当一阶微分方程

$$y'=f(x,\ y) \tag{1}$$

不能或不易用前几节所讲的初等积分法求出它的解时，可以采用下面介绍的一种近似积分法——欧拉-柯西近似法．这是图形与分析相结合的方法．实际上，形式如(1)的方程能用初等积分法求解的为数不多，所以近似积分法在实用上具有一定价值．

假设方程(1)右端的函数 $f(x,\ y)$ 在闭区域 D 上连续，并且具有连续的偏导数 $\frac{\partial f}{\partial y}$．在这样的条件下可以证明，通过 D 的每一个内点 $(x_0,\ y_0)$，存在着方程(1)的唯一的一条积分曲线．下面我们总假定方程(1)中的函数 $f(x,\ y)$ 满足上述条件，且讨论限制在区域 D 内部．

由方程(1)可知，通过点 $M(x,\ y)$ 的积分曲线在该点的切线的斜率，等于函数 $f(x,\ y)$ 在该点的值．如此，过 D 上的每一个点 $(x,\ y)$，方程(1)都定出一个方向① 与之对应，即积分曲线在该点的切线的方向．这样，方程(1)在 D 上就定出一个方向场．

方向场中具有同一方向的点的轨迹 $(y'=C)$ 叫做方程(1)的

① 我们不区别一条线段的两个方向。

等斜线．它的方程是

$$f(x,\ y)=C.$$

在同一条等斜线上各点处，积分曲线的切线具有同一方向．

从上述方向场的概念可以看出，方程(1)的积分问题在几何上可解释为：求出曲线，使这曲线上各点处的切线的方向与方向场在该点的方向一致．

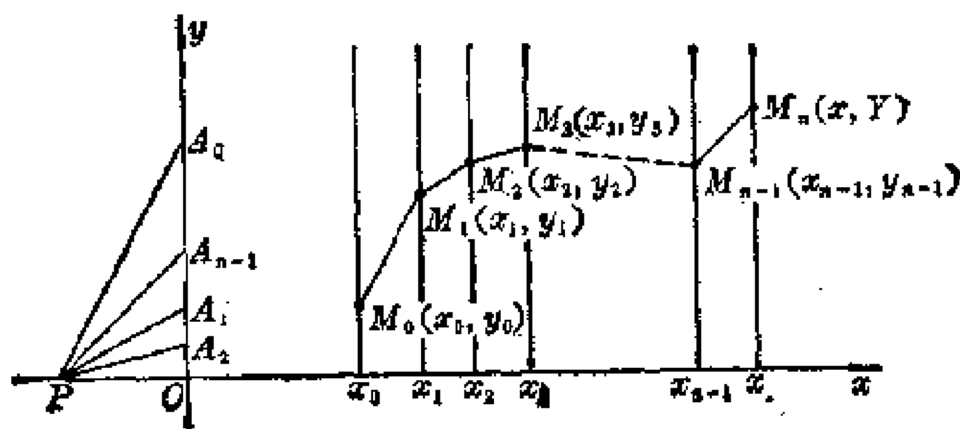


图 12-6

设已给初始条件为 $y|_{x=x_0}=y_0$，希望在区间 $[x_0, x]$ 上（假定 $x>x_0$）作出方程(1)的近似积分曲线，并求出这段曲线在端点 x 所对应的纵坐标的数值．为此目的，在 x 轴上取 $PO=1$．把区间 $[x_0, x]$ 分为 n 个小区间(图 12–6)：

$$x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x.$$

经过各分点作纵线平行于 y 轴．首先算出在起点 $M_0(x_0, y_0)$ 处的函数值 $f(x_0, y_0)$．在 y 轴上取 $OA_0=f(x_0, y_0)$，则线段 PA_0 的斜率就等于 $f(x_0, y_0)$，也就是它平行于积分曲线在点 M_0 处的切线．于是，过点 M_0 向右引半直线平行于 PA_0 而遇次一纵线 $x=x_1$ 于点 $M_1(x_1, y_1)$．由解析几何不难看出 M_1 的纵坐标 y_1 是由关系式

$$y_1-y_0=f(x_0,\ y_0)(x_1-x_0)$$

所确定的．

再算出在点 $M_1(x_1, y_1)$ 处的函数值 $f(x_1, y_1)$．在 y 轴上取

$OA_1=f(x_1, y_1)$，则线段 PA_1 的斜率就等于 $f(x_1, y_1)$，也就是它平行于积分曲线在点 M_1 处的切线．于是，过点 M_1 向右引半直线平行于 PA_1 而遇次一纵线 $x=x_2$ 于点 $M_2(x_2, y_2)$．而 M_2 的纵坐标 y_2 是由关系式

$$y_2-y_1=f(x_1, y_1)(x_2-x_1)$$

所确定的．

同样，由点 M_2 再作出点 $M_3(x_3, y_3)$．如此继续下去，直至最后作出点 $M_n(x, Y)$，而 M_n 的纵坐标 Y 是由关系式

$$Y-y_{n-1}=f(x_{n-1}, y_{n-1})(x-x_{n-1})$$

所确定的．

这样作出的折线 $M_0M_1\cdots M_n$ 就是方程(1)的一条近似积分曲线．把所求出的关系式

$$\begin{cases} y_1-y_0=f(x_0, y_0)(x_1-x_0), \\ y_2-y_1=f(x_1, y_1)(x_2-x_1), \\ y_3-y_2=f(x_2, y_2)(x_3-x_2), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{n-1}-y_{n-2}=f(x_{n-2}, y_{n-2})(x_{n-1}-x_{n-2}), \\ Y-y_{n-1}=f(x_{n-1}, y_{n-1})(x-x_{n-1}) \end{cases}$$

两端分别相加，再把 $-y_0$ 移到等号右端，就得到方程(1)的解在点 x 的一个近似值的表达式

$$\begin{aligned} y(x) &\approx Y \\ &=y_0+f(x_0, y_0)(x_1-x_0)+f(x_1, y_1)(x_2-x_1)+\cdots \\ &\quad+f(x_{n-1}, y_{n-1})(x-x_{n-1}). \end{aligned} \tag{2}$$

在实际应用时，往往把区间 $[x_0, x]$ 分成长度相等的 n 个小区间，每个小区间的长度 $h=\dfrac{x-x_0}{n}$．于是(2)式成为

$$y(x)\approx Y=y_0+\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k, y_k)h,$$

在 $x<x_0$ 的情形，步骤也是一样的．当 x 愈接近于 x_0 或分点愈多时，近似程度就愈好．

例 求方程 $\frac{dy}{dx}=2x+y$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=1$ 的解当 $x=0.5$ 时的近似数值（取 $h=0.1$）．

解 利用欧拉–柯西近似法①，求 $y|_{x=0.5}$ 时，可列表进行如下：

k	x_k	y_k	$y'_k=2x_k+y_k$
0	0.0	1.0000	1.0000
1	0.1	1.1000	1.3000
2	0.2	1.2300	1.6300
3	0.3	1.3930	1.9930
4	0.4	1.5923	2.3923
5	0.5	1.8315	

说明：表中第一行数值是 $x_0=0$，$y_0=1.0000$，于是 $y'_0=2x_0+y_0=1.0000$；第二行数值是 $x_1=x_0+h=0.1$，$y_1=y_0+y'_0h=1.1000$，$y'_1=2x_1+y_1=1.3000$；如此继续下去，最后得到方程的近似数值解 $y|_{x=0.5}\approx1.8315$．

*习 题 12-6

1．按给出的初始条件，在区间 $[x_0, x]$ 上作出下列方程的近似积分曲线：

(1) $\frac{dy}{dx}=y$，$y|_{x=0}=\frac{1}{2}$；　　(2) $\frac{dy}{dx}=x-y$，$y|_{x=0}=1$；

① 所给方程为一阶线性方程，本来不需要采用欧拉–柯西近似法．这里作为例子，只是用来说明欧拉–柯西近似法的计算步骤．

(3) $\frac{dy}{dx}=\sqrt{x+y}$, $y|_{x=0.5}=1$.

2. 利用欧拉-柯西近似法，求下列方程满足所给初始条件的解在指定处的值：

(1) $\frac{dy}{dx}=x+y$, $y|_{x=0}=1$, 求 $y|_{x=0.5}$, （取 $h=0.1$）；

(2) $\frac{dy}{dx}=3x-y$, $y|_{x=1}=0$, 求 $y|_{x=0.5}$, （取 $h=-0.1$）；

(3) $\frac{dy}{dx}=3x+y^2$, $y|_{x=0}=1$, 求 $y|_{x=0.1}$, （取 $h=0.02$）；

(4) $\frac{dy}{dx}=\sqrt{x+2y}$, $y|_{x=0.2}=0.17$, 求 $y|_{x=0.5}$, （取 $h=0.05$）.

第七节　可降阶的高阶微分方程

从这一节起我们将讨论二阶及二阶以上的微分方程，即所谓高阶微分方程．对于有些高阶微分方程，我们可以通过代换将它化成较低阶的方程来求解．以二阶微分方程

$$y''=f(x, y, y') \tag{1}$$

而论，如果我们能设法作代换把它从二阶降至一阶，那末就有可能应用前面几节中所讲的方法来求出它的解了．

下面介绍三种容易降阶的高阶微分方程的求解方法．

一、$y^{(n)}=f(x)$型的微分方程

微分方程

$$y^{(n)}=f(x) \tag{2}$$

的右端仅含有自变量 x．容易看出，只要把 $y^{(n-1)}$ 作为新的未知函数，那末(2)就是新未知函数的一阶微分方程、两边积分，就得到一个 $n-1$ 阶的微分方程

$$y^{(n-1)}=\int f(x)dx+C_1.$$

同理可得 $$y^{(n-2)}=\int\left[\int f(x)\,dx+C_1\right]dx+C_2.$$

依此法继续进行，接连积分 n 次，便得方程(2)的含有 n 个任意常数的通解.

例 1 求微分方程

$$y'''=e^{2x}-\cos x$$

的通解.

解 对所给方程接连积分三次，得

$$y''=\frac{1}{2}e^{2x}-\sin x+C,$$

$$y'=\frac{1}{4}e^{2x}+\cos x+Cx+C_2,$$

$$y=\frac{1}{8}e^{2x}+\sin x+C_1x^2+C_2x+C_3\quad\left(C_1=\frac{C}{2}\right).$$

这就是所求的通解.

例 2 质量为 m 的质点受力 F 的作用沿 Ox 轴作直线运动. 设力 F 仅是时间 t 的函数: $F=F(t)$. 在开始时刻 $t=0$ 时 $F(0)=F_0$, 随着时间 t 的增大，此力 F 均匀地减小，直到 $t=T$ 时，$F(T)=0$. 如果开始时质点位于原点，且初速度为零，求这质点的运动规律.

解 设 $x=x(t)$ 表示在时刻 t 时质点的位置，根据牛顿第二定律，质点运动的微分方程为

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F(t).\tag{3}$$

由题设，力 $F(t)$ 随 t 增大而均匀地减小，且 $t=0$ 时，$F(0)=F_0$, 所以 $F(t)=F_0-kt$; 又当 $t=T$ 时，$F(T)=0$, 从而

$$F(t)=F_0\left(1-\frac{t}{T}\right).$$

于是方程(3)可以写成

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{F_0}{m}\left(1-\frac{t}{T}\right),\tag{4}$$

其初始条件为

$$x\big|_{t=0}=0,\qquad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=0.$$

把(4)两端积分

$$\frac{dx}{dt}=\frac{F_0}{m}\int\left(1-\frac{t}{T}\right)dt,$$

即

$$\frac{dx}{dt}=\frac{F_0}{m}\left(t-\frac{t^2}{2T}\right)+C_1.\tag{5}$$

将条件 $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=0$ 代入(5) 式,得

$$C_1=0,$$

于是(5)式成为

$$\frac{dx}{dt}=\frac{F_0}{m}\left(t-\frac{t^2}{2T}\right).\tag{6}$$

把(6)式两端积分,得

$$x=\frac{F_0}{m}\left(\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6T}\right)+C_2,$$

将条件 $x\big|_{t=0}=0$ 代入上式,得

$$C_2=0.$$

于是所求质点的运动规律为

$$x=\frac{F_0}{m}\left(\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6T}\right).$$

二、$y''=f(x, y')$型的微分方程

方程

$$y''=f(x, y')\tag{7}$$

的右端不显含未知函数 y. 如果我们设 $y'=p$,那末

$$y''=\frac{dp}{dx}=p',$$

而方程(7)就成为

$$p'=f(x,\ p).$$

这是一个关于变量 x、p 的一阶微分方程. 设其通解为

$$p=\varphi(x,\ C_1),$$

但是 $p=\frac{dy}{dx}$,因此又得到一个一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(x,\ C_1).$$

对它进行积分,便得方程(7)的通解为

$$y=\int\varphi(x,\ C_1)dx+C_2.$$

例 3 求微分方程

$$(1+x^2)y''=2xy'$$

满足初始条件

$$y|_{x=0}=1,\qquad y'|_{x=0}=3$$

的特解.

解 所给方程是 $y''=f(x,\ y')$ 型的. 设 $y'=p$, 代入方程并分离变量后,有

$$\frac{dp}{p}=\frac{2x}{1+x^2}dx.$$

两端积分, 得

$$\ln p=\ln(1+x^2)+\ln C_1,$$

即
$$p=y'=C_1(1+x^2).$$

由条件 $y'|_{x=0}=3$, 得

$$C_1=3,$$

所以
$$y'=3(1+x^2).$$

再积分,得
$$y=x^3+3x+C_2.$$

又由条件 $y|_{x=0}=1$, 得

$$C_2=1,$$

于是所求的特解为

$$y=x^3+3x+1.$$

例 4 设有一均匀、柔软的绳索, 两端固定, 绳索仅受重力的作用而下垂. 试问该绳索在平衡状态时是怎样的曲线.

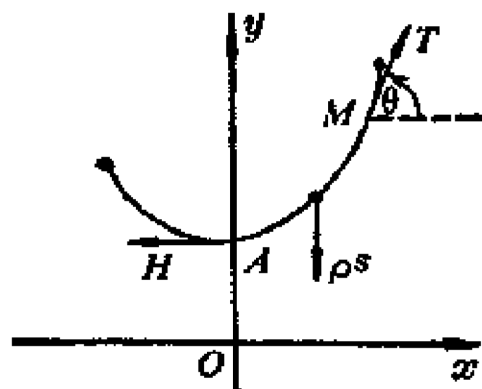


图 12-7

解 设绳索的最低点为 A. 取 y 轴通过点 A 铅直向上, 并取 x 轴水平向右, 且 $|OA|$ 等于某个定值 (这个定值将在以后说明). 于是曲线在点 A 处的切线的斜率为零. 考察绳索上点 A 到另一点 M 间的一段弧 $\overset{\frown}{AM}$, 设其长为 s. 假定绳索的单位弧长所受重力为 ρ, 则弧 $\overset{\frown}{AM}$ 所受的重力为 ρs, 由于绳索是柔软的, 因而在点 A 处的张力沿水平的切线方向, 其大小设为 H; 在点 M 处的张力沿该点处的切线方向, 与水平线成 θ 角, 其大小设为 T (图 12-7). 因作用于弧段 $\overset{\frown}{AM}$ 的外力相互平衡, 把作用于弧 $\overset{\frown}{AM}$ 上的力沿铅直及水平两方向分解, 得

$$T\sin\theta=\rho s,\quad T\cos\theta=H.$$

将此两式相除, 得

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{1}{a}s \quad \left(a=\frac{H}{\rho}\right).$$

设所求曲线方程为 $y=y(x)$, 则上式即 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{a}s$. 两端对 x 求导, 得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{a}\frac{ds}{dx},$$

利用弧微分公式 $ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx$, 便得 $y=y(x)$ 满足的微分方程

$$y''=\frac{1}{a}\sqrt{1+y'^2}. \tag{8}$$

我们取原点 O 到点 A 的距离为定值 a, 即 $|OA|=a$, 那末初始条件为

$$y|_{x=0}=a, \qquad y'|_{x=0}=0.$$

下面我们来解方程(8).

方程(8)属于 $y''=f(x, y')$ 的类型. 设

$$y'=p, \quad 则 \quad y''=\frac{dp}{dx},$$

代入方程(8), 并分离变量, 得

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{dx}{a}.$$

两端积分, 得

$$\operatorname{arsh} p=\frac{x}{a}+C_1. \tag{9}$$

把条件 $y'|_{x=0}=p|_{x=0}=0$ 代入(9), 得

$$C_1=0,$$

于是 (9) 成为

$$\operatorname{arsh} p=\frac{x}{a}.$$

即
$$y'=\operatorname{sh}\frac{x}{a}.$$

积分上式, 便得

$$y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}+C_2. \tag{10}$$

将条件 $y|_{x=0}=a$ 代入(10)式, 得

$$C_2=0.$$

于是该绳索的形状可由曲线方程

$$y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

来表示．这曲线叫做悬链线．

三、$y''=f(y,\ y')$型的微分方程

方程

$$y''=f(y,\ y') \tag{11}$$

中不明显地含自变量 x．为了求出它的解，我们令 $y'=p$，并利用复合函数的求导法则把 y'' 化为对 y 的导数，即

$$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}.$$

这样，方程(11)就成为

$$p\frac{dp}{dy}=f(y,\ p).$$

这是一个关于变量 y、p 的一阶微分方程．设它的通解为

$$y'=p=\varphi(y,\ C_1).$$

分离变量后并积分，便得方程(11)的通解为

$$\int\frac{dy}{\varphi(y,\ C_1)}=x+C_2.$$

例 5 求微分方程

$$yy''-y'^2=0 \tag{12}$$

的通解．

解 方程(12)不明显地含自变量 x，设

$$y'=p,\quad 则\quad y''=p\frac{dp}{dy},$$

代入方程(12)，得

$$yp\frac{dp}{dy}-p^2=0.$$

如果 $p\neq0$，那末约去 p 并分离变量，得

$$\frac{dp}{p}=\frac{dy}{y}.$$

两端积分并进行化简，得

$$p=C_1 y \quad 或 \quad y'=C_1 y.$$

再分离变量并积分，便得

$$\ln y=C_1 x+\ln C_2 \quad 或 \quad y=C_2 e^{C_1 x}.$$

如果 $p=0$，那末立刻可得

$$y=C,$$

显然它也满足方程(12)．但 $y=C$ 已被包含在解

$$y=C_2 e^{C_1 x}$$

中了(令 $C_1=0$，就得到它)．所以方程(12)的通解为

$$y=C_2 e^{C_1 x}.$$

例 6 一个离地面很高的物体，受地球引力的作用由静止开始落向地面．求它落到地面时的速度和所需的时间(不计空气阻力)．

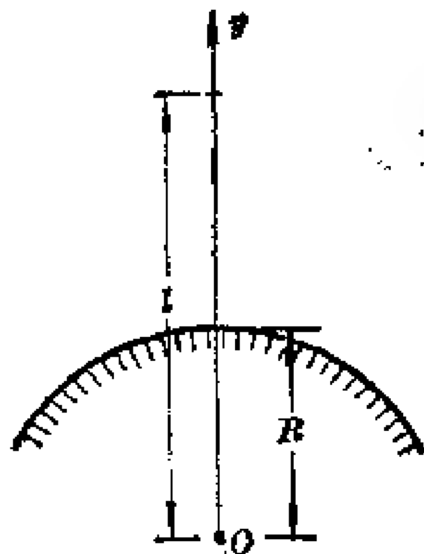


图 12-8

解 取连结地球中心与该物体的直线为 y 轴，其方向铅直向上，取地球的中心为原点 O(图 12-8)．

设物体的质量为 m，物体开始下落时与地球中心的距离为 l，地球的半径为 R，在时刻 t 物体所在位置为 $y=y(t)$，于是速度为 $v(t)=\frac{dy}{dt}$．根据万有引力定律，我们有以下微分方程

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{kmM}{y^2}, \tag{13}$$

即

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{kM}{y^2},$$

其中 M 为地球的质量，k 为引力常数．因为 $\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dv}{dt}$，且当 $y=R$ 时，$\frac{dv}{dt}=-g$(这里置负号是由于物体运动加速度的方向与 y 轴

的正向相反的缘故)，所以 $k=\frac{gR^2}{M}$. 于是方程(13)成为

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{gR^2}{y^2}. \tag{14}$$

初始条件是 $\qquad y\big|_{t=0}=l,\ \ y'\big|_{t=0}=v\big|_{t=0}=0.$

先求物体到达地面时的速度. 由 $\frac{dy}{dt}=v$, 得

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}=v\,\frac{dv}{dy},$$

代入方程(14)并分离变量，得

$$v\,dv=-\frac{gR^2}{y^2}\,dy.$$

两端积分，得 $\qquad v^2=\frac{2gR^2}{y}+C_1.$

把初始条件代入上式，得

$$C_1=-\frac{2gR^2}{l},$$

于是

$$v^2=2gR^2\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{l}\right). \tag{15}$$

在(15)式中令 $y=R$, 就得到物体到达地面时的速度 v 为

$$-\sqrt{\frac{2gR(l-R)}{l}},$$

这里取负号是由于物体运动的方向与 y 轴的正向相反的缘故.

下面来求物体落到地面所需的时间. 由(15)式有

$$\frac{dy}{dt}=v=-R\sqrt{2g\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{l}\right)},$$

分离变量得 $\qquad dt=-\frac{1}{R}\sqrt{\frac{l}{2g}}\sqrt{\frac{y}{l-y}}\,dy.$

两端积分(对右端积分利用置换 $y=l\cos^2 u$), 得

$$t=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{l}{2g}}\left(\sqrt{ly-y^2}+l\arccos\sqrt{\frac{y}{l}}\right)+C_2. \tag{16}$$

由条件 $y|_{t=0}=l$，得

$$C_2=0.$$

于是(16)式成为

$$t=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{l}{2g}}\left(\sqrt{ly-y^2}+l\arccos\sqrt{\frac{y}{l}}\right).$$

在上式中令 $y=R$，便得到物体到达地面所需的时间为

$$\frac{1}{R}\sqrt{\frac{l}{2g}}\left(\sqrt{lR-R^2}+l\arccos\sqrt{\frac{R}{l}}\right).$$

习　题　12-7

1．求下列各微分方程的通解：

(1) $y''=x+\sin x$；　　(2) $y'''=xe^x$；

(3) $y''=\dfrac{1}{1+x^2}$；　　(4) $y''=1+y'^2$；

(5) $y''=y'+x$；　　(6) $xy''+y'=0$；

(7) $yy''+1=y'^2$；　　(8) $y''+\dfrac{a^2}{y^3}=0$；

(9) $y''=\dfrac{1}{\sqrt{ay}}$　$(a>0)$；　　(10) $y''=(y')^3+y'$.

2．求下列各微分方程满足所给初始条件的特解：

(1) $y^3y''+1=0$，$y|_{x=1}=1, y'|_{x=1}=0$；

(2) $y''-ay'^2=0$，$y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=-1$；

(3) $y'''=e^{ax}$，$y|_{x=1}=y'|_{x=1}=y''|_{x=1}=0$；

(4) $y''=e^{2y}$，$y|_{x=0}=y'|_{x=0}=0$；

(5) $y''=3\sqrt{y}$，$y|_{x=0}=1$，$y'|_{x=0}=2$；

(6) $y''+(y')^2=1$，$y|_{x=0}=0$，$y'|_{x=0}=1$.

3．试求 $y''=x$ 的经过点 $M(0, 1)$ 且在此点与直线 $y=\dfrac{x}{2}+1$ 相切的积分曲线。

4．设有一质量为 m 的物体，在空气中由静止开始下落，如果空气阻力为

$R=c^2v^2$（其中 c 为常数，v 为物体运动的速度），试求物体下落的距离 s 与时间 t 的函数关系。

5．求证克莱洛(Clairaut)方程

$$y=xy'+f(y')$$

的通解是
$$y=Cx+f(C) \quad (C \text{ 为任意常数}).$$

第八节　高阶线性微分方程及其解的结构

本节和以下两节，我们将讨论在实际问题中应用得较多的所谓高阶线性微分方程，讨论时以二阶线性微分方程为主。

一、二阶线性微分方程举例

例 1　设有一个弹簧，它的上端固定，下端挂一个质量为 m 的物体．当物体处于静止状态时，作用在物体上的重力与弹性力大小相等、方向相反．这个位置就是物体的平衡位置．如图 12-9，取 x 轴铅直向下，并取物体的平衡位置为坐标原点．

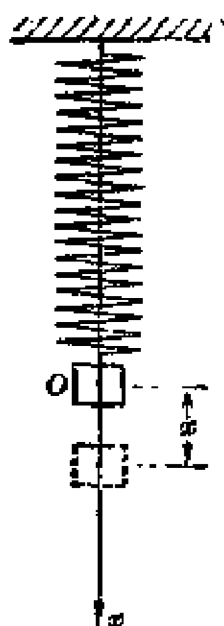


图　12-9

如果使物体具有一个初始速度 $v_0\neq0$，那末物体便离开平衡位置，并在平衡位置附近作上下振动．在振动过程中，物体的位置 x 随时间 t 变化，即 x 是 t 的函数：$x=x(t)$．要确定物体的振动规律，就要求出函数 $x=x(t)$．

由力学知道，弹簧使物体回到平衡位置的弹性恢复力 f（它不包括在平衡位置时和重力 mg 相平衡的那一部分弹性力）和物体离开平衡位置的位移 x 成正比：

$$f=-cx,$$

其中 c 为弹簧的弹性系数，负号表示弹性恢复力的方向和物体位移的方向相反．

另外，物体在运动过程中还受到阻尼介质（如空气、油等）的阻

力的作用，使得振动逐渐趋向停止．由实验知道，阻力 R 总与运动方向相反，当振动不大时，其大小与物体运动的速度成正比，设比例系数为 μ，则有

$$R=-\mu\frac{dx}{dt}.$$

根据上述关于物体受力情况的分析，由牛顿第二定律得

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-cx-\mu\frac{dx}{dt}.$$

移项，并记
$$2n=\frac{\mu}{m},\ k^2=\frac{c}{m},$$

则上式化为

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2n\frac{dx}{dt}+k^2x=0. \tag{1}$$

这就是在有阻尼的情况下，物体自由振动的微分方程．

如果物体在振动过程中，还受到铅直干扰力

$$F=H\sin pt$$

的作用，则有

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2n\frac{dx}{dt}+k^2x=h\sin pt, \tag{2}$$

其中 $h=\dfrac{H}{m}$．这就是强迫振动的微分方程．

例 2 设有一个由电阻 R、自感 L、电容 C 和电源 E 串联组成的电路，其中 R、L 及 C 为常数，电源电动势是时间 t 的函数：$E=E_m\sin\omega t$，这里 E_m 及 ω 也是常数(图 12-10)．

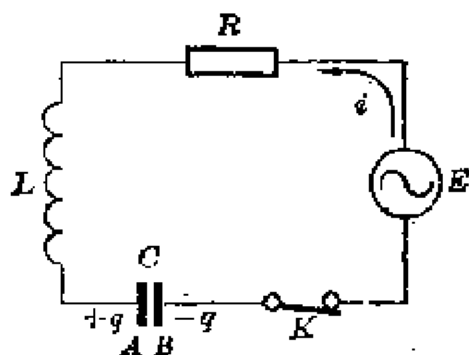


图 12-10

设电路中的电流为 $i(t)$，电容器极板上的电量为 $q(t)$，两极板间的电压为 u_C，自感电动势为 E_L．由电学

知道

$$i=\frac{dq}{dt},\quad u_C=\frac{q}{C},\quad E_L=-L\frac{di}{dt},$$

根据回路电压定律，得

$$E-L\frac{di}{dt}-\frac{q}{C}-Ri=0,$$

即
$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2}+RC\frac{du_C}{dt}+u_C=E_m\sin\omega t,$$

或写成

$$\frac{d^2u_C}{dt^2}+2\beta\frac{du_C}{dt}+\omega_0^2u_C=\frac{E_m}{LC}\sin\omega t. \tag{3}$$

式中 $\beta=\frac{R}{2L}$, $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$. 这就是串联电路的振荡方程.

如果电容器经充电后撤去外电源($E=0$)，则方程(3)成为

$$\frac{d^2u_C}{dt^2}+2\beta\frac{du_C}{dt}+\omega_0^2u_C=0. \tag{4}$$

例 1 和例 2 虽然是两个不同的实际问题，但是仔细观察一下所得出的方程(2)和(3)，就会发现它们可以归结为同一个形式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=f(x), \tag{5}$$

而方程(1)和方程(4)都是方程(5)的特殊情形：$f(x)\equiv0$. 在工程技术的其它许多问题中，也会遇到上述类型的微分方程.

方程(5)叫做二阶线性微分方程. 当方程右端 $f(x)\equiv0$ 时，方程叫做齐次的；当 $f(x)\not\equiv0$ 时，方程叫做非齐次的.

于是方程(2)、(3)都是二阶非齐次线性微分方程；方程(1)、(4)都是二阶齐次线性微分方程.

要进一步讨论例 1 和例 2 中的问题，就需要解二阶线性微分方程. 为此，下面来讨论二阶线性微分方程的解的一些性质，这些性质可以推广到任意高阶的线性方程.

二、线性微分方程的解的结构

先讨论二阶齐次线性方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0. \tag{6}$$

定理 1 **如果函数 y_1 与 y_2 是方程(6)的两个解，那末**

$$y=C_1y_1+C_2y_2 \tag{7}$$

也是(6)的解，其中 C_1、C_2 是任意常数。

证 将(7)式代入(6)式左端，得

$$[C_1y_1''+C_2y_2'']+P(x)[C_1y_1'+C_2y_2']+Q(x)[C_1y_1+C_2y_2]$$
$$=C_1[y_1''+P(x)y_1'+Q(x)y_1]+C_2[y_2''+P(x)y_2'+Q(x)y_2].$$

由于 y_1 与 y_2 是方程(6)的解，上式右端方括号中的表达式都等于零，因而整个式子等于零，所以(7)式是方程(6)的解。

齐次线性方程的这个性质表明它的解符合叠加原理。

叠加起来的解(7)从形式上来看含有 C_1 与 C_2 两个任意常数，但它不一定是方程(6)的通解。例如，设 y_1 是(6)的一个解，则 $y_2=2y_1$ 也是(6)的解。把这两个解叠加成(7)式 $y=C_1y_1+2C_2y_1$，所以可以把它改写成 $y=Cy_1$，其中 $C=C_1+2C_2$。这显然不是(6)的通解。那末在什么情况下(7)式才是方程(6)的通解呢？要解决这个问题，我们还得引入一个新的概念，即所谓函数的线性相关与线性无关。

设 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 为定义在区间 (a, b) 内的 n 个函数。如果存在 n 个不全为零的常数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$，使得当 x 在该区间内有恒等式

$$k_1y_1+k_2y_2+\cdots+k_ny_n\equiv 0$$

成立，那末这 n 个函数称为在区间 (a, b) 内线性相关；否则就称为线性无关。

例如，函数 $1, \cos^2 x, \sin^2 x$ 在整个数轴上是线性相关的。因

为取 $k_1=1$, $k_2=k_3=-1$, 就有恒等式

$$1-\cos^2 x-\sin^2 x\equiv 0.$$

又如，函数 $1, x, x^2$ 在任何区间 (a, b) 内是线性无关的. 因为如果 k_1, k_2, k_3 不全为零，那末在该区间内至多只有两个 x 值能使二次三项式

$$k_1+k_2x+k_3x^2$$

为零；要使它恒等于零，必须 k_1, k_2, k_3 全为零.

应用上述概念可知，对于两个函数的情形，它们线性相关与否，只要看它们的比是否为常数：如果比为常数，那末它们就线性相关；否则就线性无关.

有了线性无关的概念后，我们有如下关于二阶齐次线性微分方程(6)的通解结构的定理.

定理2 如果 y_1 与 y_2 是方程(6)的两个线性无关的特解，那末

$$y=C_1y_1+C_2y_2 \quad (C_1、C_2 \text{ 是任意常数})$$

就是方程(6)的通解.

例如，方程 $y''+y=0$ 是二阶齐次线性方程(这里 $P(x)\equiv 0$, $Q(x)\equiv 1$). 容易验证，$y_1=\cos x$ 与 $y_2=\sin x$ 是所给方程的两个解，且 $\frac{y_2}{y_1}=\frac{\sin x}{\cos x}=\operatorname{tg} x\neq$ 常数，即它们是线性无关的. 因此方程 $y''+y=0$ 的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

又如，方程 $(x-1)y''-xy'+y=0$ 也是二阶齐次线性方程 $\left(\text{这里 } P(x)=-\frac{x}{x-1},\ Q(x)=\frac{1}{x-1}\right)$. 容易验证 $y_1=x$, $y_2=e^x$ 是所给方程的两个解，且 $\frac{y_2}{y_1}=\frac{e^x}{x}\neq$ 常数，即它们是线性无关的. 因此方程的通解为

$$y=C_1x+C_2e^x.$$

在第四节中我们已经看到，一阶非齐次线性微分方程的通解由两部分构成：一部分是对应的齐次方程的通解；另一部分是非齐次方程本身的一个特解。实际上，不仅一阶非齐次线性微分方程的通解具有这样的结构，而且二阶及更高阶的非齐次线性微分方程的通解也具有同样的结构。

定理 3 设 y^* 是二阶非齐次线性方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x) \tag{5}$$

的一个特解，Y 是与(5)对应的齐次方程(6)的通解，那末

$$y=Y+y^* \tag{8}$$

是二阶非齐次线性微分方程(5)的通解.

证 把(8)式代入方程(5)的左端，得

$$(Y''+y^{*''})+P(x)(Y'+y^{*'})+Q(x)(Y+y^*)$$
$$=[Y''+P(x)Y'+Q(x)Y]+[y^{*''}+P(x)y^{*'}+Q(x)y^*],$$

由于 Y 是方程(6)的解，y^* 是(5)的解，可知第一个括号内的表达式等于零，第二个等于 $f(x)$. 这样，$y=Y+y^*$ 使(5)的两端恒等，即(8)式是方程(5)的解.

由于对应的齐次方程(6)的通解 $Y=C_1y_1+C_2y_2$ 中含有两个任意常数，所以 $y=Y+y^*$ 中也含有两个任意常数，从而它就是二阶非齐次线性方程(5)的通解.

例如，方程 $y''+y=x^2$ 是二阶非齐次线性微分方程. 已知 $Y=C_1\cos x+C_2\sin x$ 是对应的齐次方程 $y''+y=0$ 的通解；又容易验证 $y^*=x^2-2$ 是所给方程的一个特解. 因此

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+x^2-2$$

是所给方程的通解.

非齐次线性微分方程 (5) 的特解有时可用下述定理来帮助求出.

定理 4 设非齐次线性方程(5)的右端 $f(x)$ 是几个函数之和，

如

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)+f_2(x), \tag{9}$$

而 y_1^* 与 y_2^* 分别是方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)$$

与

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_2(x)$$

的特解，那末 $y_1^*+y_2^*$ 就是原方程的特解。

证 将 $y=y_1^*+y_2^*$ 代入方程(9)的左端，得

$$\begin{aligned}&(y_1^*+y_2^*)''+P(x)(y_1^*+y_2^*)'+Q(x)(y_1^*+y_2^*)\\&=[y_1^{*\prime\prime}+P(x)y_1^{*\prime}+Q(x)y_1^*]+[y_2^{*\prime\prime}+P(x)y_2^{*\prime}+Q(x)y_2^*]\\&=f_1(x)+f_2(x).\end{aligned}$$

因此 $y_1^*+y_2^*$ 是方程(9)的一个特解。

习 题 12-8

1. 下列函数组哪些是线性无关的?

(1) x, x^2; (2) $x, 2x$;

(3) $e^{2x}, 3e^{2x}$; (4) e^{-x}, e^{x};

(5) $\cos 2x, \sin 2x$; (6) e^{x^2}, xe^{x^2};

(7) $\sin 2x, \cos x\sin x$; (8) $e^x\cos 2x, e^x\sin 2x$;

(9) $\ln x, x\ln x$; (10) $e^{ax}, e^{bx}(a\neq b)$.

2. 验证 $y_1=\cos\omega x$ 及 $y_2=\sin\omega x$ 都是方程 $y''+\omega^2y=0$ 的解，并写出该方程的通解。

3. 验证 $y_1=e^{x^2}$ 及 $y_2=xe^{x^2}$ 都是方程 $y''-4xy'+(4x^2-2)y=0$ 的解，并写出该方程的通解.

4. 证明下列函数是相应的微分方程的通解:

(1) $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{1}{12}e^{5x}$($C_1$、$C_2$ 是任意常数)是方程 $y''-3y'+2y=e^{5x}$ 的通解;

(2) $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+\frac{1}{32}(4x\cos x+\sin x)$($C_1$、$C_2$ 是任意常数)是方程 $y''+9y=x\cos x$ 的通解;

(3) $y=C_1x^2+C_2x^2\ln x$（C_1、C_2是任意常数）是方程$x^2y''-3xy'+4y=0$的通解;

(4) 证明$y=C_1x^5+\frac{C_2}{x}-\frac{x^2}{9}\ln x$（$C_1$、$C_2$是任意常数）是方程$x^2y''-3xy'-5y=x^2\ln x$的通解;

(5) 证明$y=\frac{1}{x}(C_1e^x+C_2e^{-x})+\frac{e^x}{2}$（$C_1$、$C_2$是任意常数）是方程$xy''+2y'-xy=e^x$的通解.

5. 设$y_1=\varphi(x)$是方程$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$的一个解，试令$y_2=y_1u(x)$，求出此方程的另一个与y_1线性无关的解，并写出所给方程的通解.

第九节　二阶常系数齐次线性微分方程

在二阶齐次线性微分方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \tag{1}$$

中，如果y'、y的系数均为常数，即(1)式成为

$$y''+py'+qy=0, \tag{2}$$

其中p、q是常数，则称(2)为二阶常系数齐次线性微分方程. 如果p、q不全为常数，称(1)为二阶变系数齐次线性微分方程.

由上节讨论可知，要找微分方程(2)的通解，可以先求出它的两个解y_1、y_2，如果$\frac{y_2}{y_1}\neq$常数，即y_1与y_2线性无关，那末$y=C_1y_1+C_2y_2$就是方程(2)的通解.

当r为常数时，指数函数$y=e^{rx}$和它的各阶导数都只相差一个常数因子. 由于指数函数有这个特点，因此我们用$y=e^{rx}$来尝试，看能否选取适当的常数r，使$y=e^{rx}$满足方程(2).

将$y=e^{rx}$求导①，得到

---

① 当r为复数$a+ib$，x为实变数时，导数公式$\frac{d}{dx}e^{rx}=re^{rx}$仍成立. 事实上，对欧拉公式

$$e^{(a+ib)x}=e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)$$

两端求导，得

$$\frac{d}{dx}e^{(a+ib)x}=ae^{ax}(\cos bx+i\sin bx)+e^{ax}(-b\sin bx+ib\cos bx)$$
$$=(a+ib)e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)=(a+ib)e^{(a+ib)x}.$$

$$y' = re^{rx}, \qquad y'' = r^2 e^{rx}.$$

把 y、y' 和 y'' 代入方程(2)，得

$$(r^2 + pr + q)e^{rx} = 0.$$

由于 $e^{rx} \neq 0$，所以

$$r^2 + pr + q = 0. \tag{3}$$

由此可见，只要 r 满足代数方程(3)，函数 $y = e^{rx}$ 就是微分方程(2)的解．以后，我们把代数方程(3)叫做微分方程(2)的特征方程．

特征方程(3)是一个二次代数方程，其中 r^2、r 的系数及常数项恰好依次是微分方程(2)中 y''、y' 及 y 的系数．

特征方程(3)的两个根 r_1，r_2 可以用公式

$$r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

求出．它们有三种不同的情形：

（i）当 $p^2 - 4q > 0$ 时，r_1，r_2 是两个不相等的实根：

$$r_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \qquad r_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2};$$

（ii）当 $p^2 - 4q = 0$ 时，r_1，r_2 是两个相等的实根：

$$r_1 = r_2 = -\frac{p}{2};$$

（iii）当 $p^2 - 4q < 0$ 时，r_1，r_2 是一对共轭复根：

$$r_1 = \alpha + i\beta, \qquad r_2 = \alpha - i\beta,$$

其中 $$\alpha = -\frac{p}{2}, \qquad \beta = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}.$$

相应地，微分方程(2)的通解也就有三种不同的情形．现在分别讨论如下：

（i）特征方程有两个不相等的实根：$r_1 \neq r_2$．

由上面的讨论知道，$y_1 = e^{r_1 x}$、$y_2 = e^{r_2 x}$ 是微分方程(2)的两个

解，并且 $\frac{y_2}{y_1}=\frac{e^{r_2x}}{e^{r_1x}}=e^{(r_2-r_1)x}$ 不是常数，因此微分方程(2)的通解为

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}.$$

(ii) 特征方程有两个相等的实根：$r_1=r_2$.

这时，我们只得到微分方程(2)的一个解

$$y_1=e^{r_1x}.$$

为了得出微分方程(2)的通解，我们还需求出另一个解 y_2，并且要求 $\frac{y_2}{y_1}$ 不是常数.

设 $\frac{y_2}{y_1}=u(x)$，即 $y_2=e^{r_1x}u(x)$. 下面来求 $u(x)$.

将 y_2 求导，得

$$y_2'=e^{r_1x}(u'+r_1u),$$
$$y_2''=e^{r_1x}(u''+2r_1u'+r_1^2u),$$

将 y_2、y_2' 和 y_2'' 代入微分方程(2)，得

$$e^{r_1x}[(u''+2r_1u'+r_1^2u)+p(u'+r_1u)+qu]=0,$$

约去 e^{r_1x}，并以 u''、u'、u 为准合并同类项，得

$$u''+(2r_1+p)u'+(r_1^2+pr_1+q)u=0.$$

由于 r_1 是特征方程(3)的二重根，因此 $r_1^2+pr_1+q=0$，且 $2r_1+p=0$，于是得

$$u''=0.$$

因为我们只要得到一个不为常数的解，所以不妨选取 $u=x$，由此得到微分方程(2)的另一个解

$$y_2=xe^{r_1x}.$$

从而微分方程(2)的通解为

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2xe^{r_1x},$$

即

$$y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}.$$

(iii) 特征方程有一对共轭复根：$r_1=\alpha+i\beta$, $r_2=\alpha-i\beta$ $(\beta\neq0)$.

这时，$y_1=e^{(\alpha+i\beta)x}$, $y_2=e^{(\alpha-i\beta)x}$ 是微分方程(2)的两个解，但它们是复函数形式. 为了得出实函数形式，我们先利用欧拉公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 把 y_1、y_2 改写为

$$y_1=e^{(\alpha+i\beta)x}=e^{\alpha x}\cdot e^{i\beta x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x),$$

$$y_2=e^{(\alpha-i\beta)x}=e^{\alpha x}\cdot e^{-i\beta x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x).$$

由于复值函数 y_1 与 y_2 之间成共轭关系，因此，取它们的和除以 2 就得到它们的实部；取它们的差除以 $2i$ 就得出它们的虚部. 由于方程(2)的解符合叠加原理，所以

$$\bar{y}_1=\frac{1}{2}(y_1+y_2)=e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$\bar{y}_2=\frac{1}{2i}(y_1-y_2)=e^{\alpha x}\sin\beta x$$

还是微分方程(2)的解，且 $\dfrac{\bar{y}_1}{\bar{y}_2}=\dfrac{e^{\alpha x}\cos\beta x}{e^{\alpha x}\sin\beta x}=\operatorname{ctg}\beta x$ 不是常数，所以微分方程(2)的通解为

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x).$$

综上所述，求二阶常系数齐次线性微分方程

$$y''+py'+qy=0 \tag{2}$$

的通解的步骤如下：

第一步　写出微分方程(2)的特征方程

$$r^2+pr+q=0. \tag{3}$$

第二步　求出特征方程(3)的两个根 r_1, r_2.

第三步　根据特征方程(3)的两个根的不同情形，按照下列表格写出微分方程(2)的通解：

特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的两个根 r_1, r_2	微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解
两个不相等的实根 r_1, r_2	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
两个相等的实根 $r_1=r_2$	$y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$
一对共轭复根 $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

例 1 求微分方程 $y''-2y'-3y=0$ 的通解.

解 所给微分方程的特征方程为

$$r^2-2r-3=0,$$

其根 $r_1=-1$, $r_2=3$ 是两个不相等的实根，因此所求通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}.$$

例 2 求方程 $\frac{d^2s}{dt^2}+2\frac{ds}{dt}+s=0$ 满足初始条件 $s|_{t=0}=4$, $s'|_{t=0}=-2$ 的特解.

解 所给方程的特征方程为

$$r^2+2r+1=0,$$

其根 $r_1=r_2=-1$ 是两个相等的实根，因此所求微分方程的通解为

$$s=e^{-t}(C_1+C_2t).$$

将条件 $s|_{t=0}=4$ 代入通解，得 $C_1=4$，从而

$$s=e^{-t}(4+C_2t).$$

将上式对 t 求导，得

$$s'=e^{-t}(C_2-4-C_2t).$$

再把条件 $s'|_{t=0}=-2$ 代入上式，得 $C_2=2$. 于是所求特解为

$$s=e^{-t}(4+2t).$$

例 3 求微分方程 $y''-2y'+5y=0$ 的通解.

解 所给方程的特征方程为

$$r^2-2r+5=0,$$

其根 $r_{1,2}=1\pm2i$ 为一对共轭复根. 因此所求通解为

$$y=e^x(C_1\cos2x+C_2\sin2x).$$

例 4 在第八节例 1 中，设物体只受弹性恢复力 f 的作用，且在初瞬 $t=0$ 时的位置为 $x=x_0$，初始速度为 $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=v_0$. 求反映物体运动规律的函数 $x=x(t)$.

解 由于阻力 R 为零，即 $-\mu\frac{dx}{dt}=0$，所以第八节中的方程(1)成为

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=0, \tag{4}$$

方程(4)叫做无阻尼的自由振动的微分方程.

反映物体运动规律的函数 $x=x(t)$ 是满足微分方程(4)及初始条件

$$x\big|_{t=0}=x_0,\quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=v_0$$

的特解.

方程(4)的特征方程为 $r^2+k^2=0$，其根 $r=\pm ik$ 是一对共轭复根，所以方程(4)的通解为

$$x=C_1\cos kt+C_2\sin kt.$$

应用初始条件，定出 $C_1=x_0$, $C_2=\frac{v_0}{k}$. 因此，所求的特解为

$$x=x_0\cos kt+\frac{v_0}{k}\sin kt. \tag{5}$$

为了便于说明特解所反映的振动现象，我们令

$$x_0=A\sin\varphi,\quad \frac{v_0}{k}=A\cos\varphi,$$

于是(5)式成为

$$x=A\sin(kt+\varphi), \tag{6}$$

其中 $$A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{k^2}},\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{kx_0}{v_0}.$$

函数(6)的图形如图 12-11 所示(图中假定 $x_0>0$, $v_0>0$).

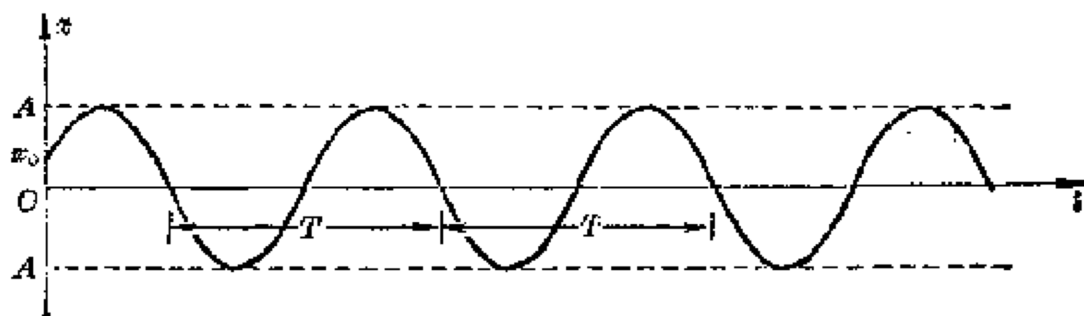


图 12-11

函数(6)所反映的运动就是简谐振动. 这个振动的振幅为 A, 初相为 φ, 周期为 $T=\frac{2\pi}{k}$, 角频率为 k. 由于 $k=\sqrt{\frac{c}{m}}$(见第八节例 1), 它与初始条件无关, 而完全由振动系统(在本例中就是弹簧和物体所组成的系统)本身所确定, 因此, k 又叫做系统的固有频率. 固有频率是反映振动系统特性的一个重要参数.

例 5 在第八节例 1 中, 设物体受弹簧的恢复力 f 和阻力 R 的作用, 且在初瞬 $t=0$ 时的位置 $x=x_0$, 初始速度 $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=v_0$, 求反映物体运动规律的函数 $x=x(t)$.

解 这就是要找满足有阻尼的自由振动方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2n\frac{dx}{dt}+k^2x=0 \tag{7}$$

及初始条件 $\quad x|_{t=0}=x_0, \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=v_0$

的特解.

方程(7)的特征方程为 $r^2+2nr+k^2=0$, 其根为

$$r=\frac{-2n\pm\sqrt{4n^2-4k^2}}{2}=-n\pm\sqrt{n^2-k^2}.$$

以下按 $n<k$、$n>k$ 及 $n=k$ 三种不同情形分别进行讨论.

(i) 小阻尼情形: $n<k$.

特征方程的根 $r_1=-n+i\sqrt{k^2-n^2}$, $r_2=-n-i\sqrt{k^2-n^2}$ 是一对共轭复根, 所以方程(7)的通解为

$$x = e^{-nt}(C_1 \cos\sqrt{k^2-n^2}\, t + C_2 \sin\sqrt{k^2-n^2}\, t).$$

应用初始条件，定出 $C_1 = x_0$, $C_2 = \dfrac{v_0 + nx_0}{\sqrt{k^2-n^2}}$，因此所求特解为

$$x = e^{-nt}\left(x_0 \cos\sqrt{k^2-n^2}\, t + \frac{v_0 + nx_0}{\sqrt{k^2-n^2}} \sin\sqrt{k^2-n^2}\, t\right).$$

记 $\omega = \sqrt{k^2-n^2}$，那末上式成为

$$x = e^{-nt}\left(x_0 \cos\omega t + \frac{v_0 + nx_0}{\omega} \sin\omega t\right). \tag{8}$$

象例 4 中所作的那样，令

$$x_0 = A\sin\varphi, \quad \frac{v_0 + nx_0}{\omega} = A\cos\varphi, \tag{9}$$

那末(8)式又可写成

$$x = Ae^{-nt}\sin(\omega t + \varphi), \tag{10}$$

其中 A 及 φ 由(9)式求得如下

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 + nx_0)^2}{k^2-n^2}};$$

当 $v_0 + nx_0 > 0$ 时，$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x_0\sqrt{k^2-n^2}}{v_0 + nx_0}$；

当 $v_0 + nx_0 < 0$ 时，$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x_0\sqrt{k^2-n^2}}{v_0 + nx_0} + \pi$.

从(10)式看出，物体的运动是周期 $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ 的振动. 但与简谐振动不同，它的振幅 Ae^{-nt} 随时间 t 的增大而逐渐减小. 因此，物体随时间 t 的增大而趋于平衡位置.

函数(10)的图形如图 12-12 所示(图中假定 $x_0 = 0$, $v_0 > 0$).

(ii) 大阻尼情形：$n > k$.

特征方程的根 $r_1 = -n + \sqrt{n^2-k^2}$, $r_2 = -n - \sqrt{n^2-k^2}$ 是两个不相等的实根；所以方程(7)的通解为

$$x = C_1 e^{-(n-\sqrt{n^2-k^2})t} + C_2 e^{-(n+\sqrt{n^2-k^2})t}, \tag{11}$$

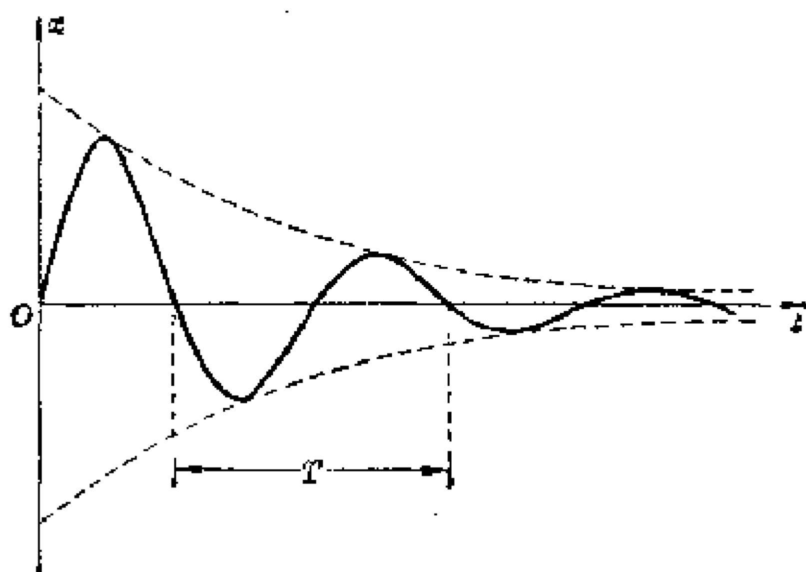


图 12-12

其中任意常数 C_1、C_2 可以由初始条件来确定.

从(11)式看出，当 $t\to+\infty$ 时，$x\to0$. 因此，在大阻尼情形，物体随时间 t 的增大而趋于平衡位置.

函数(11)的图形如图 12-13 所示(图中假定 $x_0>0$, $v_0>0$).

(iii) 临界阻尼情形：$n=k$.

特征方程的根 $r_1=r_2=-n$ 是两个相等的实根，所以方程(7)的通解为

$$x=e^{-nt}(C_1+C_2t),$$

其中任意常数 C_1 及 C_2 可由初始条件来确定.

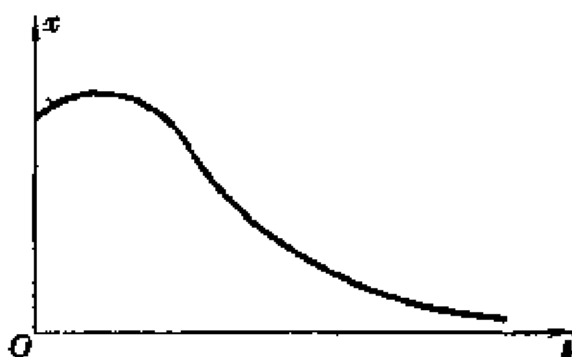


图 12-13

由于 $$\lim_{t\to+\infty}te^{-nt}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^{nt}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{ne^{nt}}=0,$$

从而可以看出，当 $t\to+\infty$ 时，$x\to0$. 因此，在临界阻尼情形，物体也随时间 t 的增大而趋于平衡位置.

总之，对于有阻尼的自由振动，不论是小阻尼、大阻尼或临界阻尼，物体都随时间 t 的增大而趋于平衡位置.

上面讨论二阶常系数齐次线性微分方程所用的方法以及方程

的通解的形式，可推广到 n 阶常系数齐次线性微分方程上去，对此我们不再详细讨论，只简单地叙述于下。

n 阶常系数齐次线性微分方程的一般形式是

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=0, \tag{12}$$

其中 $p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_{n-1},\ p_n$ 都是常数。

象讨论二阶常系数齐次线性微分方程那样，令

$$y=e^{rx},$$

那末，
$$y'=re^{rx},\ y''=r^2e^{rx},\ \cdots,\ y^{(n)}=r^ne^{rx}.$$

把 y 及其各阶导数代入方程(12)，得

$$e^{rx}(r^n+p_1r^{n-1}+p_2r^{n-2}+\cdots+p_{n-1}r+p_n)=0.$$

由此可见，如果选取 r 是 n 次代数方程

$$r^n+p_1r^{n-1}+p_2r^{n-2}+\cdots+p_{n-1}r+p_n=0 \tag{13}$$

的根，那末取这样的 r 作出的函数 $y=e^{rx}$ 就是方程(12)的一个解。

方程(13)叫做方程(12)的特征方程。

根据特征方程的根，可以写出其对应的微分方程的解如下：

特征方程的根	微分方程通解中的对应项
(i) 单实根 r	给出一项：Ce^{rx}
(ii) 一对单复根 $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	给出两项：$e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$
(iii) k 重实根 r	给出 k 项：$e^{rx}(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})$
(iv) 一对 k 重复根 $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	给出 $2k$ 项：$e^{\alpha x}[(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})\cos\beta x$ $+(D_1+D_2x+\cdots+D_kx^{k-1})\sin\beta x]$

从代数学知道，n 次代数方程有 n 个根。而特征方程的每一个根都对应着通解中的一项，且每项各含一个任意常数。这样就得到 n 阶常系数齐次线性微分方程的通解：

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n.$$

例 6 求方程 $y^{(4)}-2y'''+5y''=0$ 的通解。

解 这里的特征方程为

$$r^4-2r^3+5r^2=0,$$

即

$$r^2(r^2-2r+5)=0.$$

它的根是 $r_1=r_2=0$ 和 $r_{3,4}=1\pm 2i$。

因此所给微分方程的通解为

$$y=C_1+C_2x+e^x(C_3\cos 2x+C_4\sin 2x).$$

例 7 求方程 $\dfrac{d^4w}{dx^4}+\beta^4w=0$ 的通解。

解 这里的特征方程为

$$r^4+\beta^4=0.$$

由于

$$\begin{aligned}r^4+\beta^4&=r^4+2r^2\beta^2+\beta^4-2r^2\beta^2=(r^2+\beta^2)^2-2r^2\beta^2\\&=(r^2-\sqrt{2}\,\beta r+\beta^2)(r^2+\sqrt{2}\,\beta r+\beta^2),\end{aligned}$$

所以特征方程可以写为

$$(r^2-\sqrt{2}\,\beta r+\beta^2)(r^2+\sqrt{2}\,\beta r+\beta^2)=0.$$

它的根为 $r_{1,2}=\dfrac{\beta}{\sqrt{2}}(1\pm i)$，$r_{3,4}=-\dfrac{\beta}{\sqrt{2}}(1\pm i)$，因此所给方程的通解为

$$\begin{aligned}w=&e^{\frac{\beta}{\sqrt{2}}x}\left(C_1\cos\frac{\beta}{\sqrt{2}}x+C_2\sin\frac{\beta}{\sqrt{2}}x\right)\\&+e^{-\frac{\beta}{\sqrt{2}}x}\left(C_3\cos\frac{\beta}{\sqrt{2}}x+C_4\sin\frac{\beta}{\sqrt{2}}x\right).\end{aligned}$$

习 题 12-9

1. 求下列微分方程的通解：

(1) $y''+y'-2y=0$；　　(2) $y''-4y'=0$；

(3) $y''+y=0$；　　(4) $y''+6y'+13y=0$；

(5) $4\dfrac{d^2x}{dt^2}-20\dfrac{dx}{dt}+25x=0$；　　(6) $y''-4y'+5y=0$；

(7) $y^{(4)}-y=0$;　　　　(8) $y^{(4)}+2y''+y=0$;

(9) $y^{(4)}-2y'''+y''=0$;　　　　(10) $y^{(4)}+5y''-36y=0$.

2. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解:

(1) $y''-4y'+3y=0,\ y|_{x=0}=6,\ y'|_{x=0}=10$;

(2) $4y''+4y'+y=0,\ y|_{x=0}=2,\ y'|_{x=0}=0$;

(3) $y''-3y'-4y=0,\ y|_{x=0}=0,\ y'|_{x=0}=-5$;

(4) $y''+4y'+29y=0,\ y|_{x=0}=0,\ y'|_{x=0}=15$;

(5) $y''+25y=0,\ y|_{x=0}=2,\ y'|_{x=0}=5$;

(6) $y''-4y'+13y=0,\ y|_{x=0}=0,\ y'|_{x=0}=3$.

3. 一个单位质量的质点在数轴上运动, 开始时质点在原点 O 处且速度为 v_0. 在运动过程中, 它受到一个力的作用, 这个力的大小与质点到原点的距离成正比(比例系数 $k_1>0$)而方向与初速一致. 又介质的阻力与速度成正比(比例系数 $k_2>0$). 求反映这质点的运动规律的函数.

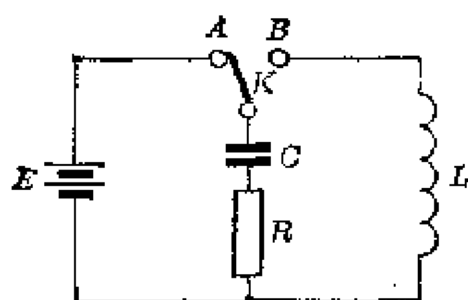


图 12-14

4. 在图 12-14 所示的电路中先将开关 K 拨向 A, 达到稳定状态后再将开关 K 拨向 B, 求电压 $u_C(t)$ 及电流 $i(t)$. 已知 $E=20$ 伏, $C=0.5\times10^{-6}$ 法, $L=0.1$ 亨, $R=2000$ 欧.

5. 设圆柱形浮筒, 直径为 0.5 米, 垂直放在水中, 当稍向下压后突然放开, 浮筒在水中上下振动的周期为 2 秒钟, 求浮筒的质量.

第十节　二阶常系数非齐次线性微分方程

二阶常系数非齐次线性微分方程的一般形式是

$$y''+py'+qy=f(x), \tag{1}$$

其中 p、q 是常数.

由第八节定理 3 可知, 求二阶常系数非齐次线性微分方程的通解, 归结为求对应的齐次方程

$$y''+py'+qy=0 \tag{2}$$

的通解和非齐次方程 (1) 本身的一个特解. 由于二阶常系数齐次

线性微分方程的通解的求法已在第九节得到解决，所以这里只需讨论求二阶常系数非齐次线性微分方程的一个特解 y^* 的方法.

下面只介绍当方程(1)中的 $f(x)$ 取两种常见形式时求 y^* 的方法. 这种方法的特点是不用积分就可求出 y^* 来，它叫做待定系数法. $f(x)$ 的两种形式是

(1) $f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}$，其中 λ 是常数，$P_m(x)$ 是 x 的一个 m 次多项式：

$$P_m(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m;$$

(2) $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$，其中 λ、ω 是常数，$P_l(x)$、$P_n(x)$ 分别是 x 的 l 次、n 次多项式，其中有一个可为零.

下面分别介绍 $f(x)$ 为上述两种形式时 y^* 的求法.

一、$f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$ 型

我们知道，方程(1)的特解 y^* 是使(1)成为恒等式的函数. 那末怎样的函数能使(1)成为恒等式呢？因为(1)式右端 $f(x)$ 是多项式 $P_m(x)$ 与指数函数 $e^{\lambda x}$ 的乘积，而多项式与指数函数乘积的导数仍然是同一类型，因此，我们推测 $y^*=Q(x)e^{\lambda x}$(其中 $Q(x)$ 是某个多项式)可能是方程(1)的特解. 把 y^*、$y^{*\prime}$ 及 $y^{*\prime\prime}$ 代入方程(1)，然后考虑能否选取适当的多项式 $Q(x)$，使 $y^*=Q(x)e^{\lambda x}$ 满足方程(1). 为此，将

$$y^*=Q(x)e^{\lambda x},$$

$$y^{*\prime}=e^{\lambda x}[\lambda Q(x)+Q'(x)],$$

$$y^{*\prime\prime}=e^{\lambda x}[\lambda^2Q(x)+2\lambda Q'(x)+Q''(x)]$$

代入方程(1)并消去 $e^{\lambda x}$，得

$$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=P_m(x). \qquad (3)$$

(i) 如果 λ 不是(2)式的特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的根，即

$\lambda^2+p\lambda+q\neq0$. 由于 $P_m(x)$ 是一个 m 次多项式，要使 (3) 的两端恒等，那末可令 $Q(x)$ 为另一个 m 次多项式 $Q_m(x)$：

$$Q_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m,$$

代入(3)式，比较等式两端 x 同次幂的系数，就得到含有 b_0, b_1, $\cdots$, b_m 作为未知数的 $m+1$ 个方程的联立方程组．从而可以定出这些 $b_i(i=0, 1, \cdots, m)$，并得到所求的特解 $y^*=Q_m(x)e^{\lambda x}$.

（ii）如果 λ 是特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的单根，即 $\lambda^2+p\lambda+q=0$，但 $2\lambda+p\neq0$，要使(3)的两端恒等，那末 $Q'(x)$ 必须是 m 次多项式．此时可令

$$Q(x)=xQ_m(x),$$

并且可用同样的方法来确定 $Q_m(x)$ 的系数 $b_i(i=0, 1, 2, \cdots, m)$.

（iii）如果 λ 是特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的重根，即 $\lambda^2+p\lambda+q=0$，且 $2\lambda+p=0$，要使(3)的两端恒等，那末 $Q''(x)$ 必须是 m 次多项式．此时可令

$$Q(x)=x^2Q_m(x),$$

并用同样的方法来确定 $Q_m(x)$ 中的系数．

综上所述，我们有如下结论：

如果 $f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}$，则二阶常系数非齐次线性微分方程(1)具有形如

$$y^*=x^kQ_m(x)e^{\lambda x} \tag{4}$$

的特解，其中 $Q_m(x)$ 是与 $P_m(x)$ 同次（m 次）的多项式，而 k 按 λ 不是特征方程的根、是特征方程的单根或是特征方程的重根依次取为 0、1 或 2.

上述结论可推广到 n 阶常系数非齐次线性微分方程，但要注意(4)式中的 k 是特征方程含根 λ 的重复次数（即若 λ 不是特征方程的根，k 取为 0；若 λ 是特征方程的 s 重根，k 取为 s）.

例 1 求微分方程 $y''-2y'-3y=3x+1$ 的一个特解．

解 这是二阶常系数非齐次线性微分方程，且 $f(x)$ 是 $P_m(x)e^{\lambda x}$ 型（其中 $P_m(x)=3x+1,\ \lambda=0$）。

所给方程的对应的齐次方程为

$$y''-2y'-3y=0,$$

它的特征方程为

$$r^2-2r-3=0.$$

由于这里 $\lambda=0$ 不是特征方程的根，所以应设特解为

$$y^*=b_0x+b_1.$$

把它代入所给方程，得

$$-3b_0x-2b_0-3b_1=3x+1,$$

比较两端 x 同次幂的系数，得

$$\begin{cases}-3b_0=3,\\ -2b_0-3b_1=1.\end{cases}$$

由此求得 $b_0=-1,\ b_1=\frac{1}{3}$。于是求得一个特解为

$$y^*=-x+\frac{1}{3}.$$

例 2 求微分方程 $y''-5y'+6y=xe^{2x}$ 的通解。

解 所给方程也是二阶常系数非齐次线性微分方程，且 $f(x)$ 呈 $P_m(x)e^{\lambda x}$ 型（其中 $P_m(x)=x,\ \lambda=2$）。

所给方程的对应的齐次方程为

$$y''-5y'+6y=0,$$

它的特征方程

$$r^2-5r+6=0$$

有两个实根 $r_1=2,\ r_2=3$。于是与所给方程对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}.$$

由于 $\lambda=2$ 是特征方程的单根，所以应设 y^* 为

$$y^* = x(b_0x + b_1)e^{2x}.$$

把它代入所给方程，得

$$-2b_0x + 2b_0 - b_1 = x.$$

比较等式两端同次幂的系数，得

$$\begin{cases} -2b_0 = 1, \\ 2b_0 - b_1 = 0. \end{cases}$$

解得 $b_0 = -\frac{1}{2}$, $b_1 = -1$. 因此求得一个特解为

$$y^* = x\left(-\frac{1}{2}x - 1\right)e^{2x}.$$

从而所求的通解为

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} - \frac{1}{2}(x^2 + 2x)e^{2x}.$$

二、$f(x) = e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x + P_n(x)\sin\omega x]$ 型

应用欧拉公式(第十一章第六节)，把三角函数表为复变指数函数的形式，有

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\lambda x}[P_l\cos\omega x + P_n\sin\omega x] \\ &= e^{\lambda x}\left[P_l\frac{e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}}{2} + P_n\frac{e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}}{2i}\right] \\ &= \left(\frac{P_l}{2} + \frac{P_n}{2i}\right)e^{(\lambda + i\omega)x} + \left(\frac{P_l}{2} - \frac{P_n}{2i}\right)e^{(\lambda - i\omega)x} \\ &= P(x)e^{(\lambda + i\omega)x} + \bar{P}(x)e^{(\lambda - i\omega)x}, \end{aligned}$$

其中

$$P(x) = \frac{P_l}{2} + \frac{P_n}{2i} = \frac{P_l}{2} - \frac{P_n}{2}i,$$

$$\bar{P}(x) = \frac{P_l}{2} - \frac{P_n}{2i} = \frac{P_l}{2} + \frac{P_n}{2}i$$

是互成共轭的 m 次多项式(即它们对应项的系数是共轭复数)，而 $m = \max\{l, n\}$.

应用上一节的结果，对于 $f(x)$ 中的第一项 $P(x)e^{(\lambda + i\omega)x}$, 可求

出一个 m 次多项式 $Q_m(x)$，使得 $y_1^*=x^kQ_me^{(\lambda+i\omega)x}$ 为方程

$$y''+py'+qy=P(x)e^{(\lambda+i\omega)x}$$

的特解，其中 k 按 $\lambda+i\omega$ 不是特征方程的根或是特征方程的单根依次取 0 或 1. 由于 $f(x)$ 的第二项 $\overline{P}(x)e^{(\lambda-i\omega)x}$ 与第一项 $P(x)e^{(\lambda+i\omega)x}$ 成共轭，所以与 y_1^* 成共轭的函数 $y_2^*=x^k\overline{Q}_me^{(\lambda-i\omega)x}$ 必然是方程

$$y''+py'+qy=\overline{P}(x)e^{(\lambda-i\omega)x}$$

的特解，这里 $\overline{Q}_m$ 表示与 Q_m 成共轭的 m 次多项式. 于是，根据第八节定理 4，方程(1)具有形如

$$y^*=x^kQ_me^{(\lambda+i\omega)x}+x^k\overline{Q}_me^{(\lambda-i\omega)x}$$

的特解. 上式可写为

$$\begin{aligned}y^*&=x^ke^{\lambda x}[Q_me^{i\omega x}+\overline{Q}_me^{-i\omega x}]\\&=x^ke^{\lambda x}[Q_m(\cos\omega x+i\sin\omega x)+\overline{Q}_m(\cos\omega x-i\sin\omega x)],\end{aligned}$$

由于括弧内的两项是互成共轭的，相加后即无虚部，所以可以写成实函数的形式

$$y^*=x^ke^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x].$$

综上所述，我们有如下结论：

如果 $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$，则二阶常系数非齐次线性微分方程(1)的特解可设为

$$y^*=x^ke^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x],\qquad(5)$$

其中 $R_m^{(1)}(x)$、$R_m^{(2)}(x)$ 是 m 次多项式，$m=\max\{l,n\}$，而 k 按 $\lambda+i\omega$（或 $\lambda-i\omega$）不是特征方程的根、或是特征方程的单根依次取 0 或 1.

上述结论可推广到 n 阶常系数非齐次线性微分方程，但要注意(5)式中的 k 是特征方程中含根 $\lambda+i\omega$（或 $\lambda-i\omega$）的重复次数.

例 3 求微分方程 $y''+y=x\cos 2x$ 的一个特解.

解 所给方程是二阶常系数非齐次线性方程，且 $f(x)$ 属于

$e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$ 型(其中 $\lambda=0$, $\omega=2$, $P_l(x)=x$, $P_n(x)=0$).

所给方程的对应的齐次方程为

$$y''+y=0,$$

它的特征方程为

$$r^2+1=0.$$

由于这里 $\lambda+i\omega=2i$ 不是特征方程的根,所以应设特解为

$$y^*=(ax+b)\cos 2x+(cx+d)\sin 2x.$$

把它代入所给方程,得

$$(-3ax-3b+4c)\cos 2x-(3cx+3d+4a)\sin 2x=x\cos 2x.$$

比较两端同类项的系数,得

$$\begin{cases}-3a=1,\\-3b+4c=0,\\-3c=0,\\-3d-4a=0,\end{cases}$$

由此解得 $\quad a=-\dfrac{1}{3},\quad b=0,\quad c=0,\quad d=\dfrac{4}{9}.$

于是求得一个特解为

$$y^*=-\frac{1}{3}x\cos 2x+\frac{4}{9}\sin 2x.$$

例 4 在第八节例 1 中,设物体受弹性恢复力 f 和干扰力 F 的作用. 试求物体的运动规律.

解 这里需要求出无阻尼强迫振动方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=h\sin pt \tag{6}$$

的通解.

对应的齐次微分方程(即无阻尼自由振动方程)为

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=0, \tag{7}$$

它的特征方程 $r^2+k^2=0$ 的根为 $r=\pm ik$. 故方程(7)的通解为

$$X=C_1\cos kt+C_2\sin kt.$$

令 $$C_1=A\sin\varphi,\quad C_2=A\cos\varphi,$$

则方程(7)的通解又可写成

$$X=A\sin(kt+\varphi),$$

其中 A、φ 为任意常数.

方程(6)右端的函数

$$f(t)=h\sin pt$$

与 $f(t)=e^{\lambda t}[P_l(t)\cos\omega t+P_n(t)\sin\omega t]$ 相比较，就有 $\lambda=0$, $\omega=p$, $P_l(t)=0$, $P_n(t)=h$. 现在分别就 $p\neq k$ 和 $p=k$ 两种情形讨论如下.

(i) 如果 $p\neq k$, 则 $\pm i\omega=\pm ip$ 不是特征方程的根，故设

$$x^*=a_1\cos pt+b_1\sin pt.$$

用待定系数法得

$$a_1=0,\qquad b_1=\frac{h}{k^2-p^2}.$$

于是 $$x^*=\frac{h}{k^2-p^2}\sin pt.$$

从而当 $p\neq k$ 时，方程(6)的通解为

$$x=X+x^*=A\sin(kt+\varphi)+\frac{h}{k^2-p^2}\sin pt.$$

上式表示，物体的运动由两部分组成，这两部分都是简谐振动. 上式第一项表示自由振动，第二项所表示的振动叫做强迫振动. 强迫振动是干扰力引起的，它的角频率即是干扰力的角频率 p; 当干扰力的角频率 p 与振动系统的固有频率 k 相差很小时，它的振幅 $\left|\frac{h}{k^2-p^2}\right|$ 可以很大.

(ii) 如果 $p=k$,则 $\pm i\omega=\pm ip$ 是特征方程的根. 故设

$$x^*=t(a_1\cos kt+b_1\sin kt).$$

用待定系数法求得

$$a_1=-\frac{h}{2k},\qquad b_1=0.$$

于是
$$x^*=-\frac{h}{2k}t\cos kt.$$

从而当 $p=k$ 时,方程(6)的通解为

$$x=X+x^*=A\sin(kt+\varphi)-\frac{h}{2k}t\cos kt.$$

上式右端第二项表明,强迫振动的振幅 $\frac{h}{2k}t$ 随时间 t 的增大而无限增大. 这就发生所谓共振现象. 为了避免共振现象,应使干扰力的角频率 p 不要靠近振动系统的固有频率 k. 反之,如果要利用共振现象,则应使 $p=k$ 或使 p 与 k 尽量靠近.

有阻尼的强迫振动问题可作类似的讨论,这里从略了.

习 题 12-10

1. 求下列各微分方程的通解:

(1) $2y''+y'-y=2e^x$;　　(2) $y''+a^2y=e^x$;

(3) $2y''+5y'=5x^2-2x-1$;　　(4) $y''+3y'+2y=3xe^{-x}$;

(5) $y''-2y'+5y=e^x\sin 2x$;　　(6) $y''-6y'+9y=e^{3x}(x+1)$;

(7) $y''+5y'+4y=3-2x$;　　(8) $y''+4y=x\cos x$;

(9) $y''+y=e^x+\cos x$;

(10) $y''-y=\sin^2 x$.　　$\left[提示: \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}\right]$

2. 求下列各微分方程满足已给初始条件的特解:

(1) $y''+y+\sin 2x=0$, $y|_{x=\pi}=1$, $y'|_{x=\pi}=1$;

(2) $y''-3y'+2y=5$, $y|_{x=0}=1$, $y'|_{x=0}=2$;

(3) $y''-10y'+9y=e^{2x}$, $y|_{x=0}=\frac{6}{7}$, $y'|_{x=0}=\frac{33}{7}$;

(4) $y''-y=4xe^x$, $y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=1$;

(5) $y''-4y'=5$, $y|_{x=0}=1$, $y'|_{x=0}=0$.

3. 一质量为 m 的潜水艇从水面由静止状态开始下降，所受阻力与下降速度成正比(比例系数为 k). 求潜水艇下降深度 x 与时间 t 的函数关系.

4. 在 R、L、C 含源串联电路中，电动势为 E 的电源对电容器 C 充电. 已知 $E=20$ 伏，$C=0.2$ 微法，$L=0.1$ 亨，$R=1000$ 欧，试求合上开关 K 后的电流 $i(t)$ 及电压 $u_C(t)$. [提示：电路方程参见第八节例 2.]

5. 一链条悬挂在一钉子上，起动时一端离开钉子 8 米，另一端离开钉子 12 米，分别在以下两种情况下求链条滑下来所需要的时间：

(1) 若不计钉子对链条所产生的摩擦力；

(2) 若摩擦力为链条 1 米长的重量.

*第十一节　欧拉方程

变系数的线性微分方程，一般说来都是不容易求解的. 但是有些特殊的变系数线性微分方程，则可以通过变量代换化为常系数线性微分方程，因而容易求解，欧拉方程就是其中的一种.

形如

$$x^n y^{(n)}+p_1 x^{n-1} y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1} x y'+p_n y=f(x) \tag{1}$$

的方程(其中 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 为常数)，叫做欧拉方程.

作变换　　$x=e^t$　或　$t=\ln x$,

将自变量 x 换成 t，我们有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right),$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\right).$$

如果采用记号 D 表示对 t 求导的运算 $\frac{d}{dt}$，那末上述计算结果可以写成

$$xy' = Dy,$$

$$x^2y'' = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} = \left(\frac{d^2}{dt^2} - \frac{d}{dt}\right)y$$

$$= (D^2 - D)y = D(D-1)y,$$

$$x^3y''' = \frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}$$

$$= (D^3 - 3D^2 + 2D)y = D(D-1)(D-2)y,$$

一般地，有 $\qquad x^ky^{(k)} = D(D-1)\cdots(D-k+1)y.$

把它代入欧拉方程(1)，便得一个以 t 为自变量的常系数线性微分方程．在求出这个方程的解后，把 t 换成 $\ln x$，即得原方程的解．

例 求欧拉方程 $x^3y''' + x^2y'' - 4xy' = 3x^2$ 的通解．

解 作变换 $x = e^t$ 或 $t = \ln x$，原方程化为

$$D(D-1)(D-2)y + D(D-1)y - 4Dy = 3e^{2t},$$

即

$$D^3y - 2D^2y - 3Dy = 3e^{2t},$$

或

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 2\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} = 3e^{2t}. \tag{2}$$

方程(2)的对应的齐次方程

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 2\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} = 0 \tag{3}$$

的特征方程为

$$r^3 - 2r^2 - 3r = 0,$$

它有三个根：$r_1 = 0$, $r_2 = -1$, $r_3 = 3$．于是方程(3)的通解为

$$Y = C_1 + C_2e^{-t} + C_3e^{3t} = C_1 + \frac{C_2}{x} + C_3x^3.$$

根据上节第一目，特解的形式为

$$y^* = be^{2t} = bx^2,$$

代入原方程，求得 $b = -\frac{1}{2}$，即

$$y^* = -\frac{x^2}{2}.$$

于是，所给欧拉方程的通解为

$$y = C_1 + \frac{C_2}{x} + C_3 x^3 - \frac{1}{2}x^2.$$

*习　题　12-11

求下列欧拉方程的通解：

1. $x^2y'' + xy' - y = 0$；　　2. $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{2}{x}$；

3. $x^3y''' + 3x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$；　　4. $x^2y'' - 2xy' + 2y = \ln^2 x - \ln(x^2)$；

5. $x^2y'' + xy' - 4y = x^3$；　　6. $x^2y'' - xy' + 4y = x\sin(\ln x)$；

7. $x^2y'' - 3xy' + 4y = x + x^2\ln x$；　　8. $x^3y''' + 2xy' - 2y = x^2\ln x + 3x$.

*第十二节　微分方程的幂级数解法举例

当微分方程的解不能用初等函数或其积分式表达时，我们就要寻求其它解法．常用的有幂级数解法和数值解法．本节我们简单地介绍一下微分方程的幂级数解法．

求一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

满足初始条件 $y|_{x=x_0} = y_0$ 的特解，其中函数 $f(x, y)$ 是 $(x-x_0)$、$(y-y_0)$ 的多项式：

$$f(x, y) = a_{00} + a_{10}(x-x_0) + a_{01}(y-y_0) + \cdots + a_{lm}(x-x_0)^l(y-y_0)^m.$$

这时我们可以设所求特解可展开为 $x-x_0$ 的幂级数：

$$y = y_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots, \tag{2}$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 是待定的系数．把(2)代入(1)中，便得一恒等式，比较这恒等式两端 $x-x_0$ 的同次幂的系数，就可定出常数

$a_1, a_2, \cdots$，以这些常数为系数的级数(2)在其收敛区间内就是方程(1)满足初始条件 $y|_{x=x_0}=y_0$ 的特解。

例 1 求方程 $\frac{dy}{dx}=x+y^2$ 满足 $y|_{x=0}=0$ 的特解。

解 这时 $x_0=0, y_0=0$，故设

$$y=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+\cdots,$$

把 y 及 y' 的幂级数展开式代入原方程，得

$$\begin{aligned}a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+5a_5x^4+\cdots\\ =x+(a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots)^2\\ =x+a_1^2x^2+2a_1a_2x^3+(a_2^2+2a_1a_3)x^4+\cdots,\end{aligned}$$

由此，比较恒等式两端 x 的同次幂的系数，得

$$a_1=0,\ a_2=\frac{1}{2},\ a_3=0,\ a_4=0,\ a_5=\frac{1}{20},\ \cdots,$$

于是所求解的级数开始几项为

$$y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{20}x^5+\cdots.$$

关于二阶齐次线性方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \tag{3}$$

用幂级数求解的问题，我们先叙述一个定理：

定理 如果方程(3)中的系数 $P(x)$ 与 $Q(x)$ 可在 $-R<x<R$ 内展开为 x 的幂级数，那末在 $-R<x<R$ 内方程(3)必有形如

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

的解①。

这定理的证明从略。

---

① 一般地，如果在方程(3)中，$xP(x)$，$x^2Q(x)$ 可在 $-R<x<R$ 内展开为 x 的幂级数，那末在 $-R<x<R$ 内方程(3)必有形如

$$y=x^c(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots)\quad (a_0\neq 0)$$

的解，其中 $c, a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$ 为待定的常数。

例 2 求微分方程

$$y''-xy=0$$

的满足初始条件

$$y|_{x=0}=0, \qquad y'|_{x=0}=1$$

的特解.

解 这里 $P(x)=0$, $Q(x)=-x$ 在整个数轴上满足定理的条件. 因此所求的解可在整个数轴上展开成 x 的幂级数

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n. \tag{4}$$

由条件 $y|_{x=0}=0$, 得 $a_0=0$. 对级数(4)逐项求导, 有

$$y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},$$

由条件 $y'|_{x=0}=1$, 得 $a_1=1$. 于是我们所求方程的级数解 y 及 y' 的形式已成为

$$y=x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots=x+\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n, \tag{5}$$

$$y'=1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots=1+\sum_{n=2}^{\infty}na_nx^{n-1}. \tag{6}$$

对级数(6)逐项求导, 得

$$\begin{aligned}y''&=2a_2+3\cdot 2a_3x+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\cdots\\&=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}.\end{aligned} \tag{7}$$

把(5)和(7)代入所给方程, 并按 x 的升幂集项, 得

$$\begin{aligned}&2a_2+3\cdot 2a_3x+(4\cdot 3a_4-1)x^2+(5\cdot 4a_5-a_2)x^3\\&\quad+(6\cdot 5a_6-a_3)x^4+\cdots+[(n+2)(n+1)a_{n+2}-a_{n-1}]x^n+\cdots=0.\end{aligned}$$

因为幂级数(4)是方程的解, 上式必然是恒等式. 因此方程左端各项的系数必全为零, 于是有

$$a_2=0,\ a_3=0,\ a_4=\frac{1}{4\cdot 3},\ a_5=0,\ a_6=0,\ \cdots,$$

一般地 $$a_{n+2}=\frac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \quad (n=3,\ 4,\ \cdots).$$

从这递推公式可以推得

$$a_7=\frac{a_4}{7\cdot 6}=\frac{1}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3},\quad a_8=\frac{a_5}{8\cdot 7}=0,\quad a_9=\frac{a_6}{9\cdot 8}=0,$$

$$a_{10}=\frac{a_7}{10\cdot 9}=\frac{1}{10\cdot 9\cdot 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3},\ \cdots,$$

一般地 $$a_{3m-1}=a_{3m}=0,$$

$$a_{3m+1}=\frac{1}{(3m+1)3m\cdots 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3} \quad (m=1,\ 2,\ \cdots).$$

于是所求的特解为

$$y=x+\frac{x^4}{4\cdot 3}+\frac{x^7}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}+\frac{x^{10}}{10\cdot 9\cdot 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}+\cdots$$
$$+\frac{x^{3m+1}}{(3m+1)3m\cdot\cdots\cdot 10\cdot 9\cdot 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}+\cdots.$$

例 3 求解勒让德(Legendre)方程

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0, \tag{8}$$

其中 n 为常数.

解 这里 $P(x)=-\frac{2x}{1-x^2}$, $Q(x)=\frac{n(n+1)}{1-x^2}$ 满足定理中的条件，它们都可以在 $-1<x<1$ 内展开为 x 的幂级数. 设勒让德方程的解为

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_kx^k+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k, \tag{9}$$

把(9)两端求导，得

$$y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+ka_kx^{k-1}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}ka_kx^{k-1}, \tag{10}$$

$$y''=2a_2+3\cdot 2a_3x+\cdots+k(k-1)a_kx^{k-2}+\cdots$$
$$=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)a_kx^{k-2}. \tag{11}$$

把(9)、(10)及(11)代入方程(8)，得

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^k - 2\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k$$

$$+n(n+1)\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0,$$

即

$$\sum_{k=0}^{\infty}[(k+2)(k+1)a_{k+2} - k(k-1)a_k - 2ka_k + n(n+1)a_k]x^k = 0,$$

化简后，得

$$\sum_{k=0}^{\infty}[(k+2)(k+1)a_{k+2} + (n-k)(n+k+1)a_k]x^k = 0.$$

于是有

$$a_{k+2} = -\frac{(n-k)(n+k+1)}{(k+1)(k+2)}a_k \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots).$$

依次令 $k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$，得

$$a_2 = -\frac{n(n+1)}{2!}a_0,$$

$$a_3 = -\frac{(n-1)(n+2)}{3!}a_1,$$

$$a_4 = -\frac{(n-2)(n+3)}{3\cdot 4}a_2 = \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}a_0,$$

$$a_5 = -\frac{(n-3)(n-4)}{4\cdot 5}a_3$$

$$= \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}a_1, \cdots\cdots.$$

由此可见，$a_2,\ a_4,\ \cdots$ 都可以用 a_0 表示；$a_3,\ a_5,\ \cdots$ 都可以用 a_1 表示，而 $a_0,\ a_1$ 都可以任意取值。于是勒让德方程的通解为

$$y = a_0\left[1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - \cdots\right]$$

$$+a_1\left[x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - \cdots\right].$$

从定理可知，上式中的两个级数在 $-1<x<1$ 内收敛.

*习 题 12-12

1．试用幂级数求下列各微分方程的解：

(1) $y'-xy-x=1$;

(2) $y''+xy'+y=0$;

(3) $xy''-(x+m)y'+my=0$ （m 为自然数）;

(4) $(1-x)y'=x^2-y$;

(5) $(x+1)y'=x^2-2x+y$.

2．试用幂级数求下列方程满足所给初始条件的特解：

(1) $y'=y^2+x^3$, $y|_{x=0}=\frac{1}{2}$;

(2) $(1-x)y'+y=1+x$, $y|_{x=0}=0$;

(3) $\frac{d^2x}{dt^2}+x\cos t=0$, $x|_{t=0}=a$, $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=0$.

*第十三节 常系数线性微分方程组解法举例

前面讨论的是由一个微分方程求解一个未知函数的情形．但在研究某些实际问题时，还会遇到由几个微分方程联立起来共同确定几个具有同一自变量的函数的情形．这些联立的微分方程称为微分方程组.

如果微分方程组中的每一个微分方程都是常系数线性微分方程，那末，这种微分方程组就叫做常系数线性微分方程组.

对于常系数线性微分方程组，我们可以用下述方法求它的解：

第一步 由方程组中消去一些未知函数及其各阶导数，得到只含有一个未知函数的高阶常系数线性微分方程.

第二步 解此高阶微分方程，求出满足该方程的未知函数.

第三步 把已求得的函数代入原方程组，一般说来，不必经过积分就可求出其余的未知函数.

例 1 解微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=3y-2z, & (1)\\ \dfrac{dz}{dx}=2y-z. & (2) \end{cases}$$

解 这是含有两个未知函数 $y(x)$、$z(x)$ 的由两个一阶常系数线性方程组成的方程组.

设法消去未知函数 y. 由(2)式得

$$y=\frac{1}{2}\left(\frac{dz}{dx}+z\right). \tag{3}$$

上式两端求导,有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{dz}{dx}\right). \tag{4}$$

把(3)及(4)两式代入(1)式并化简,得

$$\frac{d^2z}{dx^2}-2\frac{dz}{dx}+z=0.$$

这是一个二阶常系数线性微分方程,它的通解是

$$z=(C_1+C_2x)e^x. \tag{5}$$

再把(5)式代入(3)式,得

$$y=\frac{1}{2}(2C_1+C_2+2C_2x)e^x. \tag{6}$$

将(5),(6)联立起来,就得到所给方程组的通解.

如果我们要得到方程组满足初始条件

$$y|_{x=0}=1, \qquad z|_{x=0}=0$$

的特解,只需将此条件代入(6)和(5)式,得

$$\begin{cases} 1=\dfrac{1}{2}(2C_1+C_2),\\ 0=C_1. \end{cases}$$

由此求得 $C_1=0,\qquad C_2=2.$

于是所给微分方程组满足上述初始条件的特解为

$$\begin{cases} y=(1+2x)e^{x}, \\ z=2xe^{x}. \end{cases}$$

例 2 解微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{dy}{dt}-x=e^{t}, & (7) \\ \dfrac{d^2y}{dt^2}+\dfrac{dx}{dt}+y=0. & (8) \end{cases}$$

解 这是含有两个未知函数 $x(t)$、$y(t)$ 的两个二阶常系数线性微分方程组成的方程组.

设法消去未知函数 y 及其一阶、二阶导数. 为此，把(7)的两端对 t 求导后，再对 t 求导，得

$$\frac{d^3x}{dt^3}+\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dx}{dt}=e^{t}, \tag{9}$$

$$\frac{d^4x}{dt^4}+\frac{d^3y}{dt^3}-\frac{d^2x}{dt^2}=e^{t}. \tag{10}$$

对(8)两端求导，得

$$\frac{d^3y}{dt^3}+\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}=0. \tag{11}$$

(10)减去(11)，得

$$\frac{d^4x}{dt^4}-2\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dy}{dt}=e^{t}. \tag{12}$$

从(7)解得 $\dfrac{dy}{dt}=e^{t}+x-\dfrac{d^2x}{dt^2}$，并代入(12)，得

$$\frac{d^4x}{dt^4}-\frac{d^2x}{dt^2}-x=2e^{t}.$$

这是一个四阶常系数非齐次线性方程. 它对应的齐次方程的特征方程的根为

$$r_{1,2}=\pm\alpha=\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}},\quad r_{3,4}=\pm i\beta=\pm i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}},$$

利用以前学过的方法可求出它的通解为

$$x=C_1e^{-\alpha t}+C_2e^{\alpha t}+C_3\cos\beta t+C_4\sin\beta t-2e^t. \tag{13}$$

我们可以不通过积分求出所给微分方程组的另一个未知函数 $y(t)$，具体做法如下：

从(9)减去(8)，并解出 y，得

$$y=\frac{d^3x}{dt^3}-2\frac{dx}{dt}-e^t. \tag{14}$$

将(13)的一阶、三阶导数代入(14)，便得

$$y=\alpha(2-\alpha^2)C_1e^{-\alpha t}+\alpha(\alpha^2-2)C_2e^{\alpha t}$$
$$+\beta(\beta^2+2)C_3\sin\beta t-\beta(\beta^2+2)C_4\cos\beta t+e^t. \tag{15}$$

将(13)和(15)两个函数联立起来就得到所求方程组的通解.

由上述两例可以看到，在我们所介绍的这种解常系数线性微分方程组的方法中，消去一个未知函数及其各阶导数，把微分方程组化为高阶常系数线性方程是关键的一步. 另外在求出了一个未知函数后，要不用积分而求出其余的未知函数也是重要的步骤. 在这两个步骤中，除了要用到求导运算外，还要用到类似于求解代数方程组中的加减消元法、代入消元法等方法.

*习 题 12-13

1. 求下列微分方程组的通解：

(1) $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=z,\\ \dfrac{dz}{dx}=y;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}=y,\\ \dfrac{d^2y}{dt^2}=x;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}=-x+y+3,\\ \dfrac{dx}{dt}-\dfrac{dy}{dt}=x+y-3;\end{cases}$ (4) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}+5x+y=e^t,\\ \dfrac{dy}{dt}-x-3y=e^{2t};\end{cases}$

(5) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}+2x+\dfrac{dy}{dt}+y=t,\\ 5x+\dfrac{dy}{dt}+3y=t^2;\end{cases}$ (6) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}-3x+2\dfrac{dy}{dt}+4y=2\sin t,\\ 2\dfrac{dx}{dt}+2x+\dfrac{dy}{dt}-y=\cos t.\end{cases}$

2. 求下列微分方程组满足所给初始条件的特解：

(1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y, & x|_{t=0}=0, \\ \dfrac{dy}{dt}=-x, & y|_{t=0}=1; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}+2\dfrac{dy}{dt}-x=0, & x|_{t=0}=1, \\ \dfrac{dx}{dt}+y=0, & y|_{t=0}=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}+3x-y=0, & x|_{t=0}=1, \\ \dfrac{dy}{dt}-8x+y=0, & y|_{t=0}=4; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 2\dfrac{dx}{dt}-4x+\dfrac{dy}{dt}-y=e^t, & x|_{t=0}=\dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{dx}{dt}+3x+y=0, & y|_{t=0}=0; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}+2x-\dfrac{dy}{dt}=10\cos t, & x|_{t=0}=2, \\ \dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}+2y=4e^{-2t}, & y|_{t=0}=0; \end{cases}$

(6) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}-x+\dfrac{dy}{dt}+3y=e^{-t}-1, & x|_{t=0}=\dfrac{48}{49}, \\ \dfrac{dx}{dt}+2x+\dfrac{dy}{dt}+y=e^{2t}+t, & y|_{t=0}=\dfrac{95}{98}. \end{cases}$

习 题 答 案

第 八 章

习题8-1(第11页)

1. $t^2 f(x, y)$.　3. $(x+y)^{xy}+(xy)^{2x}$.

4. (1) $\{(x, y)|y^2-2x+1>0\}$;

　(2) $\{(x, y)|x+y>0, x-y>0\}$;

　(3) $\{(x, y)|0<x^2+y^2<1, y^2\leqslant 4x\}$;

　(4) $\{(x, y, z)|x>0, y>0, z>0\}$;

　(5) $\{(x, y)|x\geqslant 0, y\geqslant 0, x^2\geqslant y\}$;

　(6) $\{(x, y)|y-x>0, x\geqslant 0, x^2+y^2<1\}$;

　(7) $\{(x, y, z)|r^2<x^2+y^2+z^2\leqslant R^2\}$;

　(8) $\{(x, y, z)|x^2+y^2-z^2\geqslant 0, x^2+y^2\neq 0\}$.

5. (1) 1;　(2) $+\infty$;　(3) 0;　(4) $-\frac{1}{4}$;　(5) 2;　(6) 0;

　(7) $+\infty$.

8. $\{(x, y)|y^2-2x=0\}$.

习题8-2(第19页)

1. (1) $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y-y^3$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x^3-3xy^2$;

　(2) $\frac{\partial s}{\partial u}=\frac{1}{v}-\frac{v}{u^2}$, $\frac{\partial s}{\partial v}=\frac{1}{u}-\frac{u}{v^2}$;

　(3) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2x\sqrt{\ln(xy)}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2y\sqrt{\ln(xy)}}$;

　(4) $\frac{\partial z}{\partial x}=y[\cos(xy)-\sin(2xy)]$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x[\cos(xy)-\sin(2xy)]$;

　(5) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2}{y}\csc\frac{2x}{y}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2x}{y^2}\csc\frac{2x}{y}$;

(6) $\frac{\partial z}{\partial x}=y^2(1+xy)^{y-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=(1+xy)^y\left[\ln(1+xy)+\frac{xy}{1+xy}\right]$;

(7) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\cdot\ln x$, $\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\cdot\ln x$;

(8) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$,

$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{(x-y)^z\ln(x-y)}{1+(x-y)^{2z}}$.

4. $f_x(x,1)=1$.

5. $\frac{\pi}{4}$.

6. (1) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2-8y^2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=12y^2-8x^2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-16xy$;

(2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$;

(3) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^x\cdot\ln^2 y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x(x-1)y^{x-2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=y^{x-1}(1+x\ln y)$.

7. $f_{xx}(0,0,1)=2$, $f_{xz}(1,0,2)=2$, $f_{yz}(0,-1,0)=0$, $f_{zzx}(2,0,1)=0$.

8. $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=0$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=-\frac{1}{y^2}$.

习题8-3(第27页)

1. (1) $\left(y+\frac{1}{y}\right)dx+x\left(1-\frac{1}{y^2}\right)dy$;

(2) $-\frac{1}{x}e^{\frac{y}{x}}\left(\frac{y}{x}dx-dy\right)$;

(3) $-\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}(y\,dx-x\,dy)$;

(4) $yzx^{yz-1}dx+zx^{yz}\cdot\ln x\,dy+yx^{yz}\cdot\ln x\,dz$.

2. $\frac{1}{3}dx+\frac{2}{3}dy$.　3. $\Delta z=-0.119$, $dz=-0.125$.　4. $0.25e$.

5. 2.95.　6. 0.005.　7. 2.039.　8. 0.5023.　9. -5厘米.

10. 55.3立方厘米.　11. -30π立方厘米.　12. 0.124厘米.

13. 2128平方米, 27.6平方米, 1.30%.

习题8-4(第33页)

1. $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2\sin y\cos y(\cos y-\sin y)$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-2x^3\sin y\cos y(\sin y+\cos y)+x^3(\sin^3 y+\cos^3 y).$$

2. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{y^2}\ln(3x-2y)+\frac{3x^2}{(3x-2y)y^2}$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2x^2}{y^3}\ln(3x-2y)-\frac{2x^2}{(3x-2y)y^2}$.

3. $e^{\sin t-2t^3}(\cos t-6t^2)$.

4. $\frac{3(1-4t^2)}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}}$.

5. $\frac{e^x(1+x)}{1+x^2e^{2x}}$.

6. $e^{ax}\sin x$.

8. (1) $\frac{\partial u}{\partial x}=2xf_1'+ye^{xy}f_2'$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-2yf_1'+xe^{xy}f_2'$;

(2) $\frac{\partial u}{\partial x}=2xf'$, $\frac{\partial u}{\partial y}=2yf'$, $\frac{\partial u}{\partial z}=-2zf'$;

(3) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y}f_1'$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}f_1'+\frac{1}{z}f_2'$, $\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}f_2'$;

(4) $\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'+yf_2'+yzf_3'$, $\frac{\partial u}{\partial y}=xf_2'+xzf_3'$, $\frac{\partial u}{\partial z}=xyf_3'$.

11. (1) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2f'+4x^2f''$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4xyf''$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2f'+4y^2f''$;

(2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{11}''+\frac{2}{y}f_{12}''+\frac{1}{y^2}f_{22}''$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{x}{y^2}\left(f_{12}''+\frac{1}{y}f_{22}''\right)-\frac{1}{y^2}f_2'$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2x}{y^3}f_2'+\frac{x^2}{y^4}f_{22}''$.

习题8-5(第40页)

1. $\frac{y^2-e^x}{\cos y-2xy}$.

2. $\frac{x+y}{x-y}$.

3. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz-\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz-2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}$.

4. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{x+z}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z^2}{y(x+z)}$.

8. $\frac{2y^2ze^z-2xy^3z-y^2z^2e^z}{(e^z-xy)^3}$.

9. $\frac{z(z^4-2xyz^2-x^2y^2)}{(z^2-xy)^3}$.

10. (1) $\frac{dy}{dx}=-\frac{x(6z+1)}{2y(3z+1)}$, $\frac{dz}{dx}=\frac{x}{3z+1}$;

(2) $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{xu+yv}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{xv-yu}{x^2+y^2}$,

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{xv-yu}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{xu+yv}{x^2+y^2};$$

(3) $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-uf_1'(2yv\,g_2'-1)-f_2'\cdot g_1'}{(xf_1'-1)(2yv\,g_2'-1)-f_2'\cdot g_1'},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{g_1'(xf_1'+uf_1'-1)}{(xf_1'-1)(2yv\,g_2'-1)-f_2'\cdot g_1'};$$

(4) $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\sin v}{e^u(\sin v-\cos v)+1},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-\cos v}{e^u(\sin v-\cos v)+1},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\cos v-e^u}{u[e^u(\sin v-\cos v)+1]},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\sin v+e^u}{u[e^u(\sin v-\cos v)+1]}.$$

12. $\frac{\partial z}{\partial x}=(v\cos v-u\sin v)e^{-u}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=(u\cos v+v\sin v)e^{-u}$.

习题 8-6(第 48 页)

1. 切线方程：$\frac{x-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$,

法平面方程：$x+y+\sqrt{2}\,z=\frac{\pi}{2}+4$.

2. 切线方程：$\frac{x-\frac{1}{2}}{1}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-1}{8}$,

法平面方程：$2x-8y+16z-1=0$.

3. 切线方程：$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{\frac{m}{y_0}}=\frac{z-z_0}{-\frac{1}{2z_0}}$,

法平面方程：$(x-x_0)+\frac{m}{y_0}(y-y_0)-\frac{1}{2z_0}(z-z_0)=0$.

4. 切线方程：$\frac{x-1}{16}=\frac{y-1}{9}=\frac{z-1}{-1}$,

法平面方程：$16x+9y-z-24=0$.

5. $P_1(-1,1,-1)$及$P_2\left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ -\frac{1}{27}\right)$.

6. 切平面方程：$x+2y-4=0$,法线方程：$\begin{cases}\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2},\\ z=0.\end{cases}$

7. 切平面方程：$ax_0x+by_0y+cz_0z=1$,

法线方程：$\dfrac{x-x_0}{ax_0}=\dfrac{y-y_0}{by_0}=\dfrac{z-z_0}{cz_0}$。

8. $x-y+2z=\pm\sqrt{\dfrac{11}{2}}$。

9. $(-3,\ -1,\ 3)$，$\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-3}{1}$。

11. $\cos\gamma=\dfrac{3}{\sqrt{22}}$。

习题 8-7(第 56 页)

1. $1+2\sqrt{3}$。　　　　2. $\dfrac{98}{13}$。

3. $\dfrac{1}{ab}\sqrt{2(a^2+b^2)}$。

4*. $\mathrm{grad}\,f(0,\ 0,\ 0)=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k}$，$\mathrm{grad}\,f(1,\ 1,\ 1)=6\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$。

习题 8-8(第 65 页)

1. 极大值：$f(2,\ -2)=8$。　　　　2. 极大值：$f(3,\ 2)=36$。

3. 极小值：$f\left(\dfrac{1}{2},\ -1\right)=-\dfrac{e}{2}$。　　　　4. 极大值：$z\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$。

5. 当两边都是 $\dfrac{l}{\sqrt{2}}$ 时，可得最大的周界。

6. 当长、宽都是 $\sqrt[3]{2k}$，而高为 $\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2k}$ 时，表面积最小。

7. $\left(\dfrac{8}{5},\ \dfrac{16}{5}\right)$。

8. 当矩形的边长为 $\dfrac{2p}{3}$ 及 $\dfrac{p}{3}$ 时，绕短边旋转所得圆柱体的体积最大。

9. 当长、宽、高都是 $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$ 时，可得最大的体积。

10. 最长距离为 $\sqrt{9+5\sqrt{3}}$，最短距离为 $\sqrt{9-5\sqrt{3}}$。

习题 8-9(第 73 页)

1. $f(x,\ y)=5+2(x-1)^2-(x-1)(y+2)-(y+2)^2$。

2. $e^x\ln(1+y)=y+\dfrac{1}{2!}(2xy-y^2)+\dfrac{1}{3!}(3x^2y-3xy^2+2y^3)+R_3$。

3. $\sin x\sin y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(y-\frac{\pi}{4}\right)$

$$-\frac{1}{4}\left[\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2-2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(y-\frac{\pi}{4}\right)+\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2\right]+R_2,$$

其中 $R_2=-\frac{1}{6}\left[\cos\xi\sin\eta\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+3\sin\xi\cos\eta\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2\left(y-\frac{\pi}{4}\right)\right.$

$\left.+3\cos\xi\sin\eta\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2+\sin\xi\cos\eta\cdot\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^3\right]$，$\xi$ 在 $\frac{\pi}{4}$ 与 x 之间，η 在 $\frac{\pi}{4}$ 与 y 之间。

4. $x^y=1+(x-1)+(x-1)(y-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2(y-1)+R_3,$

$1.1^{1.02}\approx1.1021$。

5. $e^{x+y}=1+(x+y)+\frac{1}{2!}(x^2+2xy+y^2)+\cdots$

$$+\frac{1}{n!}(x^n+C_n^1x^{n-1}y+\cdots+y^n)+R_n,$$

其中 $R_n=\frac{e^{\theta(x+y)}}{(n+1)!}(x^{n+1}+C_{n+1}^1x^ny+\cdots+y^{n+1}),\quad 0<\theta<1$。

*习题 8–10(第 80 页)

1. $\theta=2.234p+95.35$.

2. $\begin{cases}a\sum\limits_{i=1}^n x_i^4+b\sum\limits_{i=1}^n x_i^3+c\sum\limits_{i=1}^n x_i^2=\sum\limits_{i=1}^n x_i^2y_i,\\ a\sum\limits_{i=1}^n x_i^3+b\sum\limits_{i=1}^n x_i^2+c\sum\limits_{i=1}^n x_i=\sum\limits_{i=1}^n x_iy_i,\\ a\sum\limits_{i=1}^n x_i^2+b\sum\limits_{i=1}^n x_i+nc=\sum\limits_{i=1}^n y_i.\end{cases}$

第 九 章

习题 9–1(第 87 页)

1. $\iint\limits_D\mu(x,y)d\sigma$。　　　2. $I_1=4I_2$。

4. (1) $\iint\limits_D(x+y)^2d\sigma\geqslant\iint\limits_D(x+y)^3d\sigma$;

(2) $\iint\limits_D(x+y)^3d\sigma\geqslant\iint\limits_D(x+y)^2d\sigma$;

(3) $\iint\limits_D \ln(x+y)d\sigma \geqslant \iint\limits_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$;

(4) $\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma \geqslant \iint\limits_D \ln(x+y)d\sigma$.

5. (1) $0 \leqslant I \leqslant 2$;　　(2) $0 \leqslant I \leqslant \pi^2$;

(3) $2 \leqslant I \leqslant 8$;　　(4) $36\pi \leqslant I \leqslant 100\pi$.

习题 9-2(1)(第 96 页)

1. (1) $\frac{8}{3}$;　(2) $\frac{20}{3}$;　(3) 1;　(4) $-\frac{3\pi}{2}$;

(5) $\frac{3}{2}+\cos 1+\sin 1-\cos 2-2\sin 2$.

2. (1) $\frac{6}{55}$;　(2) $\frac{64}{15}$;　(3) $e-e^{-1}$;　(4) $\frac{13}{6}$;　(5) $\pi^2-\frac{40}{9}$.

4. (1) $\int_0^4 dx\int_x^{2\sqrt{x}} f(x, y)dy$ 或 $\int_0^4 dy\int_{\frac{y^2}{4}}^{y} f(x, y)dx$;

(2) $\int_{-r}^{r} dx\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} f(x, y)dy$ 或 $\int_0^r dy\int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} f(x, y)dx$;

(3) $\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x} f(x, y)dy$ 或 $\int_{\frac{1}{2}}^{1} dy\int_{\frac{1}{y}}^{2} f(x, y)dx+\int_1^2 dy\int_y^2 f(x, y)dx$;

(4) $\int_{-1}^{1} dx\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y)dy+\int_{-1}^{1} dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x, y)dy$

$+\int_{-2}^{-1} dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y)dy+\int_1^2 dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y)dy$

或 $\int_1^2 dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y)dx+\int_{-2}^{-1} dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y)dx$

$+\int_{-1}^{1} dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x, y)dx+\int_{-1}^{1} dy\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y)dx$.

6. (1) $\int_0^1 dx\int_x^1 f(x, y)dy$;　　(2) $\int_0^4 dx\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x, y)dy$;

(3) $\int_{-1}^{1} dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)dy$;　　(4) $\int_0^1 dy\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y)dx$;

(5) $\int_0^1 dy\int_{e^y}^{e} f(x, y)dx$;

(6) $\int_{-1}^{0} dy\int_{-2\arcsin y}^{\pi} f(x, y)dx+\int_0^1 dy\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x, y)dx$;

(7) $\int_{-2}^{0} dx \int_{2x+4}^{4-x^2} f(x, y)dy$;　　(8) $\int_{0}^{2} dx \int_{\frac{1}{2}x}^{3-x} f(x, y)dy$.

7. $\frac{4}{3}$.　　8. $\frac{7}{2}$.　　9. $\frac{17}{6}$.　　10. 6π.

习题 9-2(2)(第 104 页)

1. (1) $\int_{0}^{2\pi} d\theta \int_{0}^{a} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr$;

(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{0}^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr$;

(3) $\int_{0}^{2\pi} d\theta \int_{a}^{b} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr$;

(4) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{0}^{(\cos\theta+\sin\theta)^{-1}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr$;

(5) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{0}^{\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr$

$+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_{0}^{\csc\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr$

$+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\theta \int_{0}^{\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr$.

2. (1) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{0}^{\sec\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{0}^{\csc\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr$;

(2) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{0}^{2\sec\theta} f(r) r\,dr$;

(3) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{(\cos\theta+\sin\theta)^{-1}}^{1} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr$;

(4) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta}^{\sec\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr$.

3. (1) $\frac{3}{4}\pi a^4$;　　(2) $\frac{1}{6}a^3[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$;

(3) $\sqrt{2}-1$;　　(4) $\frac{1}{8}\pi a^4$.

4. (1) $\pi(e^4-1)$;　　(2) $\frac{\pi}{4}(2\ln 2-1)$;

(3) $\frac{3}{64}\pi^2$.

5. (1) $\frac{9}{4}$;　　(2) $\frac{\pi}{8}(\pi-2)$;

(3) $14a^4$;　　(4) $\frac{2}{3}\pi(b^3-a^3)$;

(5) $\frac{1}{3}R^3\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$.

6. $\frac{1}{40}\pi^5$.　　7. $\frac{1}{3}R^3 \operatorname{arc\,tg} k$.　　8. $\frac{3}{32}\pi a^4$.

*习题 9-2(3)(第 111 页)

1. (1) $\frac{\pi^4}{3}$;　　(2) $\frac{7}{3}\ln 2$;

(3) $\frac{e-1}{2}$;　　(4) $\frac{1}{2}ab\pi$.

2. (1) $2\ln 3$;　　(2) $\frac{1}{8}$.

习题 9-3(第 119 页)

1. $2a^2(\pi-2)$.　　2. $\sqrt{2}\,\pi$.

3. $16R^2$.　　4. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$.

5. (1) $\bar{x}=\frac{3}{5}x_0$, $\bar{y}=\frac{3}{8}y_0$;　　(2) $\bar{x}=0$, $\bar{y}=\frac{4b}{3\pi}$;

(3) $\bar{x}=\frac{b^2+ab+a^2}{2(a+b)}$, $\bar{y}=0$.

6. $\bar{x}=\frac{35}{48}$, $\bar{y}=\frac{35}{54}$.　　7. $\bar{x}=\frac{2}{5}a$, $\bar{y}=\frac{2}{5}a$.

8. 另一边长为 $\sqrt{\frac{2}{3}}R$ (R 为圆的半径)。

9. (1) $I_y=\frac{1}{4}\pi a^3b$, $I_O=\frac{1}{4}\pi ab(a^2+b^2)$;

(2) $I_x=\frac{72}{5}$, $I_y=\frac{96}{7}$;　　(3) $I_x=\frac{1}{3}ab^3$, $I_y=\frac{1}{3}ba^3$.

10. $\frac{1}{12}Mh^2$, $\frac{1}{12}Mb^2$ ($M=bh\rho$ 为矩形板的质量)。

11. $\frac{1}{2}M(R^2+r^2)$ ($M=\rho\pi(R^2-r^2)$为环状薄片的质量)。

12. $I=\frac{368}{105}\rho$.

习题 9-4(第 124 页)

1. (1) $\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{xy} f(x,\ y,\ z)dz$;

(2) $\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\int_{x^2+y^2}^1 f(x,\ y,\ z)\,dz$;

(3) $\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\int_{x^2+2y^2}^{2-x^2} f(x,\ y,\ z)dz$;

(4) $\int_0^a dx\int_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} dy\int_0^{xy/c} f(x,\ y,\ z)dz$;

(5) $\int_{-1}^1 dx\int_{x^2}^1 dy\int_0^{x^2+y^2} f(x,\ y,\ z)dz$.

2. $\frac{3}{2}$.　　4. $\frac{1}{364}$.　　5. $\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right)$.　　6. $\frac{1}{48}$.　　7. 0.

习题 9-5(第 132 页)

1. (1) $\frac{7\pi}{12}$;　　(2) $\frac{16}{3}\pi$.

2. (1) $\frac{4\pi}{5}$;　　(2) $\frac{7}{6}\pi a^4$.

3. (1) $\frac{1}{8}$;　(2) $\frac{\pi}{10}$;　(3) 8π;　(4) $\frac{4\pi}{15}(A^5-a^5)$;　(5) 0.

4. (1) $\frac{32}{3}\pi$;　　(2) πa^3;

(3) $\frac{\pi}{6}$;　　(4) $\frac{2}{3}\pi(5\sqrt{5}-4)$.

5. $k\pi R^4$.

6. (1) $\left(0,\ 0,\ \frac{3}{4}\right)$;　　(2) $\left(0,\ 0,\ \frac{3(A^4-a^4)}{8(A^3-a^3)}\right)$;

(3) $\left(\frac{2}{5}a,\ \frac{2}{5}a,\ \frac{7}{30}a^2\right)$.

7. $\left(0,\ 0,\ \frac{5}{4}R\right)$.

8. (1) $\frac{8}{3}a^4$;　　(2) $\bar{x}=\bar{y}=0,\ \bar{z}=\frac{7}{15}a^2$;　　(3) $\frac{112}{45}a^6\rho$.

9. $\frac{1}{2}a^2M$　($M=\pi a^2h\rho$ 为圆柱体的质量).

10. $\frac{1}{4}M\left(a^2+\frac{1}{3}h^2\right)$　($M=\pi a^2h\rho$ 为圆柱体的质量).

*习题 9-6(第 140 页)

1. (1) $\frac{\pi}{4}$;　　(2) 1;　　(3) $\frac{8}{3}$.

2. (1) $\frac{1}{3}\cos x(\cos x-\sin x)(1+2\sin 2x)$;

　(2) $\frac{2}{x}\ln(1+x^2)$;

　(3) $\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^4+1}}+3x^2\operatorname{arc\,tg}x^2-2x\operatorname{arc\,tg}x$;

　(4) $2xe^{-x^5}-e^{-x^3}-\int_x^{x^2}y^2e^{-xy^2}dy$.

3. $3f(x)+2xf'(x)$.

4. (1) $\pi\arcsin a$;　　(2) $\pi\ln\frac{1+a}{2}$.

5. (1) $\frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2})$;　　(2) $\operatorname{arc\,tg}(1+b)-\operatorname{arc\,tg}(1+a)$.

第　十　章

习题 10-1(第 147 页)

1. (1) $I_x=\int_L y^2\rho(x,\ y)ds,\quad I_y=\int_L x^2\rho(x,\ y)ds,$

　$I_O=\int_L (x^2+y^2)\rho(x,\ y)ds$;

　(2) $\bar{x}=\frac{\int_L x\rho(x,\ y)ds}{\int_L \rho(x,\ y)ds},\quad \bar{y}=\frac{\int_L y\rho(x,\ y)ds}{\int_L \rho(x,\ y)ds}$.

习题 10-2(第 159 页)

1. (1) $2\pi a^{2n+1}$;　　(2) $\sqrt{2}$;

(3) $\frac{1}{12}(5\sqrt{5}+6\sqrt{2}-1)$;　　(4) $e^a\left(2+\frac{\pi}{4}a\right)-2$;

(5) $\frac{\sqrt{3}}{2}(1-e^{-2})$;　　(6) 9;

(7) $\frac{256}{15}a^3$;　　(8) $2\pi^2a^3(1+2\pi^2)$;

(9) $\frac{(2+t_0^2)^{\frac{3}{2}}-2\sqrt{2}}{3}$;　　(10) $2a^2$.

2. (1) $-\frac{56}{15}$;　　(2) $-\frac{\pi}{2}a^3$;

(3) 0;　　(4) -2π;

(5) $\frac{k^3\pi^3}{3}-a^2\pi$;　　(6) 13;

(7) $\frac{1}{2}$;　　(8) $-\frac{14}{15}$;

(9) $-2\pi a^2$;　　(10) $\frac{1}{35}$.

3. (1) $\frac{34}{3}$;　　(2) 11;

(3) 14;　　(4) $\frac{32}{3}$.

4. 重心在扇形的对称轴上且与圆心距离 $\frac{a\sin\varphi}{\varphi}$ 处。

5. (1) $I_z=\frac{2}{3}\pi a^2\sqrt{a^2+k^2}(3a^2+4\pi^2k^2)$;

(2) $\bar{x}=\frac{6ak^2}{3a^2+4\pi^2k^2}$, $\bar{y}=\frac{-6\pi ak^2}{3a^2+4\pi^2k^2}$, $\bar{z}=\frac{3k(\pi a^2+2\pi^3k^2)}{3a^2+4\pi^2k^2}$.

6. $-|\boldsymbol{F}|R$.　　7. $mg(z_2-z_1)$.

8. (1) $\int_L \frac{P(x,y)+Q(x,y)}{\sqrt{2}}ds$;　　(2) $\int_L \frac{P(x,y)+2xQ(x,y)}{\sqrt{1+4x^2}}ds$;

(3) $\int_L[\sqrt{2x-x^2}\,P(x,y)+(1-x)Q(x,y)]ds$.

9. $\int_\Gamma \frac{P+2xQ+3yR}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}}ds$.

习题10-3(第171页)

1. (1) $\frac{1}{30}$;　　(2) 8.

2. (1) $\frac{3}{8}\pi a^2$; (2) 12π; (3) πa^2.

3. (1) $\frac{5}{2}$; (2) 236; (3) 5.

4. (1) 12; (2) 0;

(3) $\frac{\pi^2}{4}$; (4) $\frac{\sin 2}{4}-\frac{7}{6}$.

5. (1) $\frac{1}{2}x^2+2xy+\frac{1}{2}y^2$; (2) x^2y;

(3) $-\cos 2x\sin 3y$; (4) $x^3y+4x^2y^2-12e^y+12ye^y$;

(5) $y^2\sin x+x^2\cos y$.

6. $\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$.

习题 10-4(第 179 页)

1. $I_x=\iint\limits_{\Sigma}(y^2+z^2)\rho(x, y, z)dS$.

习题 10-5(第 187 页)

1. (1) $\frac{13}{3}\pi$; (2) $\frac{149}{30}\pi$;

(3) $\frac{111}{10}\pi$.

2. (1) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}\pi$; (2) 9π.

3. (1) $4\sqrt{61}$; (2) $-\frac{27}{4}$;

(3) $\pi a(a^2-h^2)$; (4) $\frac{64}{15}\sqrt{2}\,a^4$;

(5) $2\pi \operatorname{arc\,tg}\frac{H}{R}$.

4. (1) $\frac{2}{105}\pi R^7$; (2) $\frac{3}{2}\pi$;

(3) $2\pi e^2$; (4) $\frac{1}{8}$;

(5) 0.

5. $\frac{2\pi}{15}(6\sqrt{3}+1)$.　　6. $\frac{4}{3}\rho_0\pi a^4$.　　7. $\left(0, 0, \frac{a}{2}\right)$.

8. (1) $\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{3}{5}P+\frac{2}{5}Q+\frac{2\sqrt{3}}{5}R\right)dS$;

(2) $\iint\limits_{\Sigma}\frac{2xP+2yQ+R}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}dS$.

*习题 10-6(第 197 页)

1. (1) $3a^4$;　　(2) $\frac{12}{5}\pi a^5$;　　(3) $\frac{2}{5}\pi a^5$;　　(4) 81π;

(5) $\frac{3}{2}$.

2. (1) 0;　　(2) $a^3\left(2-\frac{a^2}{6}\right)$;　　(3) 108π.

3. (1) $\operatorname{div}\boldsymbol{A}=2x+2y+2z$;

(2) $\operatorname{div}\boldsymbol{A}=ye^{xy}-x\sin(xy)-2xz\sin(xz^2)$;

(3) $\operatorname{div}\boldsymbol{A}=2x$.

*习题 10-7(第 206 页)

1. (1) $-\sqrt{3}\pi a^2$;　　(2) $-2\pi a(a+b)$;

(3) -20π;　　(4) 9π.

2. (1) $\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$;　　(2) $\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$;

(3) $\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=[x\sin(\cos z)-xy^2\cos(xz)]\boldsymbol{i}-y\sin(\cos z)\boldsymbol{j}$
$+[y^2z\cos(xz)-x^2\cos y]\boldsymbol{k}$.

3. (1) 0;　　(2) -4.

5. (1) 2π;　　(2) 12π.

7. 0.

第十一章

习题 11-1(第 215 页)

1. (1) $\frac{1+1}{1+1^2}+\frac{1+2}{1+2^2}+\frac{1+3}{1+3^2}+\frac{1+4}{1+4^2}+\frac{1+5}{1+5^2}+\cdots$;

(2) $\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}+\cdots$;

(3) $\frac{1}{5}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{5^4}+\frac{1}{5^5}-\cdots$;

(4) $\frac{1!}{1^1}+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\frac{4!}{4^4}+\frac{5!}{5^5}+\cdots$.

2. (1) $\frac{1}{2n-1}$;　　(2) $(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n}$;

(3) $\frac{x^{\frac{n}{2}}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$;　　(4) $(-1)^{n-1}\frac{a^{n+1}}{2n+1}$.

3. (1) 发散;　(2) 收斂;　(3) 发散.

4. (1) 收斂;　(2) 发散;　(3) 发散;

(4) 发散;　(5) 收斂;　(6) 发散.

5*. (1) 收斂;　(2) 发散;　(3) 收斂;

(4) 发散.

习题 11-2(第 231 页)

1. (1) 发散;　(2) 发散;　(3) 收斂;

(4) 收斂;　(5) $a>1$ 时收斂, $a\leq 1$ 时发散;

(6) 发散.

2. (1) 发散;　(2) 收斂;　(3) 收斂;

(4) 收斂.

3. (1) 收斂;　(2) 收斂;　(3) 收斂;

(4) 当 $b<a$ 时收斂, 当 $b>a$ 时发散, 当 $b=a$ 时不能肯定.

4. (1) 收斂;　(2) 收斂;　(3) 发散;

(4) 收斂;　(5) 发散;　(6) 发散;

(7) 发散;　(8) 收斂.

5. (1) 条件收斂;　(2) 绝对收斂;　(3) 绝对收斂;

(4) 条件收斂;　(5) 发散;　(6) 绝对收斂.

*习题 11-3(第 240 页)

1. (1) 收斂;　(2) 收斂;　(3) 收斂;

(4) 发散;　(5) 收斂;　(6) 发散;

(7) 收敛;　(8) 收敛;　(9) 收敛;

(10) 收敛.

2. (1) $\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$, $n>0$;　(2) $\Gamma(p+1)$, $p>-1$;

(3) $\frac{1}{|n|}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$, $\frac{m+1}{n}>0$.

习题 11-4(第 250 页)

1. (1) $(-1, 1)$;　(2) $[-1, 1]$;

(3) $(-\infty, +\infty)$;　(4) $[-3, 3)$;

(5) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$;　(6) $[-1, 1]$;

(7) $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$;　(8) $[4, 6)$.

2. (1) $\frac{1}{(1-x)^2}$;　(2) $\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x-x$;

(3) $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln(1+\sqrt{2})$.

习题 11-5(第 260 页)

1. $$\cos x=\cos x_0+\cos\left(x_0+\frac{\pi}{2}\right)(x-x_0)+\cdots$$

$$+\frac{\cos\left(x_0+\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots,\quad(-\infty, +\infty).$$

2. (1) $\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$, $(-\infty, +\infty)$;

(2) $\ln(a+x)=\ln a+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{a}\right)^n$, $(-a, a]$;

(3) $a^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x\ln a)^n}{n!}$, $(-\infty, +\infty)$;

(4) $\sin\frac{x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1}$, $(-\infty, +\infty)$;

(5) $\sin^2 x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2x)^{2n}}{2(2n)!}$, $(-\infty, +\infty)$;

(6) $(1+x)\ln(1+x)=x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)}$, $(-1, 1]$;

(7) $\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(2n)!}{(n!)^2(2n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}$， $[-1, 1]$；

(8) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}$， $(-1, 1)$。

3. (1) $\sqrt{x^3} = 1 + \frac{3}{2}(x-1)$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{(n!)^2} \frac{3}{(n+1)(n+2)2^n}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{n+2}, \quad [0, 2];$$

(2) $\lg x = \frac{1}{\ln 10} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}$， $(0, 2]$。

4. $\cos x = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^{2n}}{(2n)!} + \sqrt{3}\,\frac{\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]$， $(-\infty, +\infty)$。

5. $\frac{1}{x} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{3^n}$， $(0, 6)$。

6. $\frac{1}{x^2+3x+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n$， $(-6, -2)$

习题 11-6(第 267 页)

1. (1) 1.0986；　(2) 1.648；　(3) 2.00430；　(4) 0.9994。
2. (1) 0.4940；　(2) 0.487。

*习题 11-7(第 277 页)

1. (1) 取自然数 $N \geqslant \frac{|x|}{\varepsilon}$。

2. (1) $s(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x=0 \text{ 时}, \\ 1+x^2, & \text{当 } x \neq 0 \text{ 时}. \end{cases}$

(2) 当 $x \neq 0$ 时，取自然数 $N \geqslant \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln(1+x^2)} + 1$；当 $x=0$ 时，取 $N=1$。

(3) 在$[0, 1]$上不一致收敛，在$\left[\frac{1}{2}, 1\right]$上一致收敛。

3. (1) 一致收敛；　(2) 不一致收敛。

习题 11-8(第 289 页)

1. (1) $f(x) = \pi^2 + 1 + 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$， $(-\infty, +\infty)$；

(2) $f(x)=\frac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{\pi}\left[\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+4}(2\cos nx-n\sin nx)\right],$

$$(x\neq(2n+1)\pi,\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots);$$

(3) $f(x)=\frac{a-b}{4}\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{[1-(-1)^n](b-a)}{n^2\pi}\cos nx\right.$

$$\left.+\frac{(-1)^{n-1}(a+b)}{n}\sin nx\right\},$$

$$(x\neq(2n+1)\pi,\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots).$$

2. (1) $2\sin\frac{x}{3}=\frac{18\sqrt{3}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n\sin nx}{9n^2-1},\quad(-\pi,\ \pi);$

(2) $f(x)=\frac{1+\pi-e^{-\pi}}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{1+n^2}\cos nx\right.$

$$\left.+\left[\frac{-n+(-1)^n ne^{-\pi}}{1+n^2}+\frac{1}{n}(1-(-1)^n)\right]\sin nx\right\},\ (-\pi,\ \pi).$$

习题 11-9(第 296 页)

1. $\cos\frac{x}{2}=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}\cos nx,\quad[-\pi,\ \pi].$

2. $f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{2n}\right]\sin nx,$

$$(x\neq(2n+1)\pi,\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots).$$

3. $\frac{\pi-x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx,\quad(0,\ \pi].$

4. $2x^2=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{2}{n^3}+(-1)^n\left(\frac{2}{n^3}-\frac{\pi^2}{n}\right)\right]\sin nx,\quad[0,\ \pi);$

$2x^2=\frac{2}{3}\pi^2+8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,\quad[0,\ \pi].$

习题 11-10(第 300 页)

1. (1) $1-x^2=\frac{11}{12}+\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos 2n\pi x,\quad(-\infty,\ +\infty);$

(2) $f(x)=-\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}+\frac{2\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi}\right]\cos n\pi x\right.$

$$\left.+\frac{1-2\cos\frac{n\pi}{2}}{n\pi}\sin n\pi x\right\},$$

$$\left(x \neq 2k,\ 2k+\frac{1}{2},\ k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots\right).$$

(3) $f(x)=-\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left\{\dfrac{6}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n]\cos\dfrac{n\pi x}{3}+\dfrac{6}{n\pi}(-1)^{n+1}\sin\dfrac{n\pi x}{3}\right\},$

$(x \neq 3(2k+1),\ k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots).$

2. (1) $f(x)=\dfrac{4l}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\sin\dfrac{n\pi}{2}\sin\dfrac{n\pi x}{l},\quad [0,\ l],$

$f(x)=\dfrac{l}{4}+\dfrac{2l}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\left[2\cos\dfrac{n\pi}{2}-1-(-1)^n\right]\cos\dfrac{n\pi x}{l},\quad [0,\ l];$

(2) $f(x)=\dfrac{8}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left\{\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}+\dfrac{2}{n^3\pi^2}[(-1)^n-1]\right\}\sin\dfrac{n\pi x}{2},\quad [0,\ 2),$

$f(x)=\dfrac{4}{3}+\dfrac{16}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}\cos\dfrac{n\pi x}{2},\quad [0,\ 2].$

*习题 11-11(第 303 页)

1. $f(x)=\mathrm{sh}\,1\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(1-in\pi)}{1+(n\pi)^2}e^{in\pi x},$

$(x \neq 2k+1,\ k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots).$

2. $u(t)=\dfrac{h\tau}{T}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2h}{n\pi}\sin\dfrac{n\tau\pi}{T}\cos\dfrac{2n\pi t}{T},\quad (-\infty,\ +\infty).$

第 十 二 章

习题 12-1(第 310 页)

1. (1) 一阶; (2) 二阶; (3) 三阶;
(4) 一阶; (5) 二阶; (6) 一阶.

2. (1) 是; (2) 是; (3) 不是; (4) 是.

4. (1) $y^2-x^2=25$; (2) $y=xe^{2x}$; (3) $y=-\cos x$.

5. (1) $y'=x^2$; (2) $yy'+2x=0$.

6. $\dfrac{dP}{dT}=k\dfrac{P}{T^2}$, k 为比例系数.

习题 12-2(第 318 页)

1. (1) $y=e^{Cx}$; (2) $y=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{5}x^5+C$;

(3) $\arcsin y = \arcsin x + C$;　(4) $y = \dfrac{1}{C + a\ln(1-a-x)}$;

(5) $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = C$;　(6) $10^{-y} + 10^{x} = C$;

(7) $(e^x+1)(e^y-1) = C$;　(8) $\sin x \sin y = C$;

(9) $3x^4 + 4(y+1)^3 = C$;　(10) $(x-4)y^4 = Cx$.

2. (1) $e^y = \dfrac{1}{2}(e^{2x}+1)$;　(2) $\cos x - \sqrt{2}\cos y = 0$;

(3) $y = e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$;　(4) $(1+e^x)\sec y = 2\sqrt{2}$;

(5) $x^2 y = 4$.

3. $t = -0.0305h^{\frac{5}{2}} + 9.64$, 水流完所需的时间约为 10 秒。

4. $v = \sqrt{72500} \approx 269.3$ 厘米/秒。

5. $R = R_0 e^{-0.000433t}$, 时间以年为单位。

6. $xy = 6$.

习题 12-3(第 325 页)

1. (1) $y + \sqrt{y^2 - x^2} = Cx^2$;　(2) $y = xe^{Cx+1}$;

(3) $y^2 = x^2 \ln(Cx^2)$;　(4) $x^3 - 2y^3 = Cx$;

(5) $x^2 = C \operatorname{sh}^3 \dfrac{y}{x}$;　(6) $x + 2ye^{\frac{x}{y}} = C$.

2. (1) $y^3 = y^2 - x^2$;　(2) $y^2 = 2x^2(\ln x + 2)$;

(3) $\dfrac{x+y}{x^2+y^2} = 1$.

3*. (1) $(4y - x - 3)(y + 2x - 3)^2 = C$;

(2) $\ln[4y^2 + (x-1)^2] + \operatorname{arc\,tg} \dfrac{2y}{x-1} = C$;

(3) $(y - x + 1)^2 (y + x - 1)^5 = C$;

(4) $x + 3y + 2\ln(2 - x - y) = C$.

4. $\ln x + \displaystyle\int \frac{g(v)dv}{v[f(v) - g(v)]} = C$, 求出后将 $v = xy$ 代回，得通解。

5. (1) $y = -x + \operatorname{tg}(x + C)$;　(2) $(x-y)^2 = -2x + C$;

(3) $y = \dfrac{1}{x} e^{Cx}$;　(4) $y = 1 - \sin x - \dfrac{1}{x+C}$;

(5) $2x^2y^2 \ln y - 2xy - 1 = Cx^2y^2$.

习题 12-4(第 331 页)

1. (1) $y=e^{-x}(x+C)$;　　(2) $y=\frac{1}{3}x^2+\frac{3}{2}x+2+\frac{C}{x}$;

(3) $y=(x+C)e^{-\sin x}$;　　(4) $y=C\cos x-2\cos^2 x$;

(5) $y=\frac{\sin x+C}{x^2-1}$;　　(6) $x=Cy^3+\frac{1}{2}y^2$;

(7) $y=2+Ce^{-x^2}$;　　(8) $2x\ln y=\ln^2 y+C$;

(9) $y=(x-2)^3+C(x-2)$;　　(10) $3\rho=2+Ce^{-3\theta}$.

2. (1) $y=\frac{x}{\cos x}$;　　(2) $y=\frac{\pi-1-\cos x}{x}$;

(3) $y\sin x+5e^{\cos x}=1$;　　(4) $y=\frac{2}{3}(4-e^{-3x})$;

(5) $2y=x^3-x^3e^{\frac{1}{x^2}-1}$.

3. $y=2(e^x-x-1)$.

4. $v=\frac{k_1}{k_2}t-\frac{k_1 m}{k_2^2}\left(1-e^{-\frac{k_2}{m}t}\right)$.

5. $i=e^{-5t}+\sqrt{2}\sin\left(5t-\frac{\pi}{4}\right)$(安).

6. (1) $\frac{1}{y}=-\sin x+Ce^x$;　　(2) $x-\sqrt{xy}=C$;

(3) $\left(1+\frac{3}{y}\right)e^{\frac{3}{2}x^2}=C$;　　(4) $\frac{1}{y^3}=-1-2x+Ce^x$;

(5) $\frac{1}{y^4}=-x+\frac{1}{4}+Ce^{-4x}$;　　(6) $\frac{x^2}{y^2}=-\frac{2}{3}x^3\left(\frac{2}{3}+\ln x\right)+C$.

习题 12-5(第 335 页)

1. (1) $x^3+3x^2y^2+\frac{4}{3}y^3=C$;　　(2) $a^2x-x^2y-xy^2-\frac{1}{3}y^3=C$;

(3) $xe^y-y^2=C$;　　(4) $x\sin y+y\cos x=C$;

(5) $xy=\frac{1}{3}x^3+C$;　　(6) 不是全微分方程;

(7) $\rho(1+e^{2\theta})=C$;　　(8) 不是全微分方程.

2. (1) $x-y=\ln(x+y)+C$;　　(2) $\frac{x}{y}+\frac{x^2}{2}=C$;

(3) $\frac{x^3}{2}-3xy-\frac{1}{y}=C$;　　(4) $x^2+y^2=Ce^{2x}$;

(5) $y^2+x\ln x=Cx$;　　(6) $\frac{x^2}{y}-x^3=C$.

3. (1) $x=Cy^2e^{\frac{1}{x^2y^2}}$;　　(2) $y=Ce^{-\frac{3xy+1}{3x^3y^3}}$.

*习题 12-6(第 339 页)

2. (1) 1.7210;　　(2) −1.5000;

(3) 1.1211;　　(4) 0.3528.

习题 12-7(第 349 页)

1. (1) $y=\frac{1}{6}x^3-\sin x+C_1x+C_2$;

(2) $y=(x-3)e^x+C_1x^2+C_2x+C_3$;

(3) $y=x\operatorname{arc\,tg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C_1x+C_2$;

(4) $y=-\ln\cos(x+C_1)+C_2$;

(5) $y=C_1e^x-\frac{1}{2}x^2-x+C_2$;

(6) $y=C_1\ln x+C_2$;

(7) $y=C_1\operatorname{sh}\left(\frac{x}{C_1}+C_2\right)$;

(8) $\sqrt{y(1+C_1y)}-\frac{1}{\sqrt{C_1}}\ln(\sqrt{C_1y}+\sqrt{1+C_1y})=\pm\sqrt{2}\,aC_1x+C_2$;

(9) $x+C_2=\pm\frac{a^{\frac{1}{4}}}{4}\left[\frac{1}{3}(4\sqrt{y}+C_1)^{\frac{3}{2}}-C_1\sqrt{4\sqrt{y}+C_1}\right]$;

(10) $y=\arcsin(C_2e^x)+C_1$.

2. (1) $y=\sqrt{2x-x^2}$;　　(2) $y=-\frac{1}{a}\ln(ax+1)$;

(3) $y=\frac{1}{a^3}e^{ax}-\frac{e^a}{2a}x^2+\frac{e^a}{a^2}(a-1)x+\frac{e^a}{2a^3}(2a-a^2-2)$;

(4) $e^{2y}=\sec^2x$;　　(5) $y=\left(\frac{1}{2}x+1\right)^4$;

(6) $y=x$.

3. $y=\frac{x^3}{6}+\frac{x}{2}+1$.

4. $s=\frac{1}{k^2}\ln \operatorname{ch}(\mu k^2 t)\quad\left(k^2=\frac{c^2}{m},\ \mu^2=\frac{g}{k^2}\right)$.

习题 12-8(第 356 页)

1. (1) 线性无关; (2) 线性相关; (3) 线性相关;
(4) 线性无关; (5) 线性无关; (6) 线性无关;
(7) 线性相关; (8) 线性[illegible]关; (9) 线性无关;
(10) 线性无关.

2. $y=C_1\cos\omega x+C_2\sin\omega x$.

3. $y=(C_1+C_2x)e^{x^2}$.

5. $y_2=\varphi\int\frac{e^{-\int P dx}}{\varphi^2}dx,\quad y=\varphi\left(C_1+C_2\int\frac{e^{-\int P dx}}{\varphi^2}dx\right)$.

习题 12-9(第 367 页)

1. (1) $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$; (2) $y=C_1+C_2e^{4x}$;
(3) $y=C_1\cos x+C_2\sin x$; (4) $y=e^{-3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$;
(5) $x=(C_1+C_2t)e^{\frac{5}{2}t}$; (6) $y=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$;
(7) $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x$;
(8) $y=(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x$;
(9) $y=C_1+C_2x+(C_3+C_4x)e^x$;
(10) $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+C_3\cos 3x+C_4\sin 3x$.

2. (1) $y=4e^x+2e^{3x}$; (2) $y=(2+x)e^{-\frac{x}{2}}$;
(3) $y=e^{-x}-e^{4x}$; (4) $y=3e^{-2x}\sin 5x$;
(5) $y=2\cos 5x+\sin 5x$; (6) $y=e^{2x}\sin 3x$.

3. $x=\frac{v_0}{\sqrt{k_2^2+4k_1}}\left(1-e^{-\sqrt{k_2^2+4k_1}\,t}\right)e^{\left(-\frac{k_2}{2}+\frac{\sqrt{k_2^2+4k_1}}{2}\right)t}$.

4. $u_C(t)=\frac{10}{9}\left(19e^{-10^3t}-e^{-1.9\times10^4t}\right)$(伏);

$i(t)=\frac{19}{18}\times10^{-2}\left(-e^{-10^3t}+e^{-1.9\times10^4t}\right)$(安).

5. $M=195$ 公斤.

习题12-10(第376页)

1. (1) $y=C_1e^{\frac{x}{2}}+C_2e^{-x}+e^x$;

(2) $y=C_1\cos ax+C_2\sin ax+\dfrac{e^x}{1+a^2}$;

(3) $y=C_1+C_2e^{-\frac{5}{2}x}+\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{3}{5}x^2+\dfrac{7}{25}x$;

(4) $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+\left(\dfrac{3}{2}x^2-3x\right)e^{-x}$;

(5) $y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)-\dfrac{1}{4}xe^x\cos 2x$;

(6) $y=(C_1+C_2x)e^{3x}+\dfrac{x^2}{2}\left(\dfrac{1}{3}x+1\right)e^{3x}$;

(7) $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-4x}+\dfrac{11}{8}-\dfrac{1}{2}x$;

(8) $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\dfrac{1}{3}x\cos x+\dfrac{2}{9}\sin x$;

(9) $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\dfrac{e^x}{2}+\dfrac{x}{2}\sin x$;

(10) $y=C_1e^x+C_2e^{-x}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{10}\cos 2x$.

2. (1) $y=-\cos x-\dfrac{1}{3}\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 2x$;

(2) $y=-5e^x+\dfrac{7}{2}e^{2x}+\dfrac{5}{2}$;

(3) $y=\dfrac{1}{2}(e^{9x}+e^x)-\dfrac{1}{7}e^{2x}$;

(4) $y=e^x-e^{-x}+e^x(x^2-x)$;

(5) $y=\dfrac{11}{16}+\dfrac{5}{16}e^{4x}-\dfrac{5}{4}x$.

3. $x=\dfrac{mg}{k}t-\dfrac{m^2g}{k^2}(1-e^{-\frac{k}{m}t})$.

4. $u_C(t)=20-20e^{-5\times10^3t}[\cos(5\times10^3t)+\sin(5\times10^3t)]$(伏);
$i(t)=4\times10^{-2}e^{-5\times10^3t}\sin(5\times10^3t)$(安).

5. (1) $t=\sqrt{\dfrac{10}{g}}\ln(5+2\sqrt{6})$秒; (2) $t=\sqrt{\dfrac{10}{g}}\ln\left(\dfrac{19+4\sqrt{22}}{3}\right)$秒.

*习题 12-11(第 379 页)

1. $y=C_1x+\frac{C_2}{x}$;

2. $y=x(C_1+C_2\ln x)+x\ln^2 x$;

3. $y=C_1x+C_2x\ln x+C_3x^{-2}$;

4. $y=C_1x+C_2x^2+\frac{1}{2}(\ln^2 x+\ln x)+\frac{1}{4}$;

5. $y=C_1x^2+C_2x^{-2}+\frac{1}{5}x^3$;

6. $y=x[C_1\cos(\sqrt{3}\ \ln x)+C_2\sin(\sqrt{3}\ \ln x)]+\frac{1}{2}x\sin(\ln x)$;

7. $y=C_1x^2+C_2x^2\ln x+x+\frac{1}{6}x^2\ln^3 x$;

8. $y=C_1x+x[C_2\cos(\ln x)+C_3\sin(\ln x)]+\frac{1}{2}x^2(\ln x-2)+3x\ln x$.

*习题 12-12(第 384 页)

1. (1) $y=Ce^{\frac{x^2}{2}}+\left[-1+x+\frac{1}{1\cdot 3}x^3+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}+\cdots\right]$;

(2) $y=a_0e^{-\frac{x^2}{2}}+a_1\left[x-\frac{x^3}{1\cdot 3}+\frac{x^5}{1\cdot 3\cdot 5}-\cdots\right.$

$\left.+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}+\cdots\right]$;

(3) $y_1=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=e^x$; 为求另一个与 y_1 线性无关的解，设 $y_2=uy_1=ue^x$，代入方程后可得 $y_2=e^x\int x^m e^{-x}dx$，于是方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2\sum_{k=0}^{m}\frac{x^k}{k!}$;

(4) $y=C(1-x)+x^3\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{6}x+\frac{1}{10}x^2+\cdots+\frac{2}{(n+2)(n+3)}x^n+\cdots\right]$;

(5) $y=C(1+x)-x^2+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{3}x^4+\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{15}x^6+\cdots$.

2. (1) $y=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\frac{9}{32}x^4+\cdots$;

(2) $y=x+\frac{1}{1\cdot 2}x^2+\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\frac{1}{3\cdot 4}x^4+\cdots$;

(3) $x=a\left(1-\frac{1}{2!}t^2+\frac{2}{4!}t^4-\frac{9}{6!}t^6+\frac{55}{8!}t^8-\cdots\right)$.

*习题 12-13(第 387 页)

1. (1) $\begin{cases} y=C_1e^x+C_2e^{-x}, \\ z=C_1e^x-C_2e^{-x}; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=C_1e^t+C_2e^{-t}+C_3\cos t+C_4\sin t, \\ y=C_1e^t+C_2e^{-t}-C_3\cos t-C_4\sin t; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=3+C_1\cos t+C_2\sin t, \\ y=-C_1\sin t+C_2\cos t; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x=C_1e^{(-1+\sqrt{15})t}+C_2e^{(-1-\sqrt{15})t}+\frac{2}{11}e^t+\frac{1}{6}e^{2t}, \\ y=(-4-\sqrt{15})C_1e^{(-1+\sqrt{15})t}-(4-\sqrt{15})C_2e^{(-1-\sqrt{15})t}-\frac{e^t}{11}-\frac{7}{6}e^{2t}; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x=\frac{C_1-3C_2}{5}\sin t-\frac{3C_1+C_2}{5}\cos t-t^2+t+3, \\ y=C_1\cos t+C_2\sin t+2t^2-3t-4; \end{cases}$

(6) $\begin{cases} x=C_1e^{-5t}+C_2e^{-\frac{t}{3}}+\frac{8\sin t+\cos t}{65}, \\ y=-\frac{4}{3}C_1e^{-5t}+C_2e^{-\frac{t}{3}}+\frac{61\sin t-33\cos t}{130}. \end{cases}$

2. (1) $\begin{cases} x=\sin t, \\ y=\cos t; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin t; \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x=e^t, \\ y=4e^t; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x=2\cos t-4\sin t-\frac{1}{2}e^t, \\ y=14\sin t-2\cos t+2e^t; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x=4\cos t+3\sin t-2e^{-2t}-2e^{-t}\sin t, \\ y=\sin t-2\cos t+2e^{-t}\cos t; \end{cases}$

(6) $\begin{cases} x=\frac{12}{17}e^{-\frac{7}{5}t}+\frac{5}{17}e^{2t}+\frac{3}{7}t-\frac{1}{49}, \\ y=\frac{18}{17}e^{-\frac{7}{5}t}-\frac{1}{17}e^{2t}+\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{7}t-\frac{26}{49}. \end{cases}$

14

目　录

第一编　解析几何

第二编　数学分析

*　　*　　*

注意：本书在题目号码右上角加记号"*"时，表示较难之题；在题目号码右上角加记号"△"时，表示超出大纲之题。

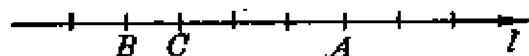
第一编　解析几何

第一章　平面上的直角坐标、曲线及其方程

平面上点的直角坐标，坐标变换

1.1. 设轴上三点 A, B, C 的排列次序如图，A 和 B 间距离为 4，C 和 B 间距离为 1.

(a) 求轴上有向线段 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ 的值.



(b) 若以点 A 为原点，那么点 A, B, C 的坐标等于什么？

1.2. 已知数轴上点 A, B, C 的坐标依次为 -6, 0, 8，求轴上有向线段 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 的值.

1.3. 作下列各点：$A(2, 7)$, $B(3, 0)$, $C(1, -4)$, $D(0,5)$, $E(-1,2)$, $F(-4, -3)$, $G(-2, 0)$, $H(0, -3)$, $K\left(-3\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}\right)$, $L(\sqrt{2}, -\sqrt{3})$, $N(0, \sqrt{5})$.

1.4. 三角形的三个顶点的坐标如下：

(a) $(8, 4)$, $(0, -4)$, $(2, 4)$;

(b) $(3, 5)$, $(3, 10)$, $(0, 2.5)$;

(c) $(2, 0)$, $(-1, \sqrt{3})$, $(-1, -\sqrt{3})$.

求作这些三角形.

1.5. 设 $a=1$, $b=2$，求作点 (a, b), (b, a), $(-a, b)$, $(b, -a)$, $(-b, a)$, $(a, -b)$, $(-a, -b)$ 和 $(-b, -a)$.

1.6. 一正方形的边长为 2 单位，如果将两条坐标轴放到这正方形的任意一组邻边上去，问正方形各顶点的坐标等于什么？

1.7. 菱形的每边长为 5 单位，它有一条对角线长为 6 单位，如果把菱形的两条对角线分别放在两坐标轴上. 求它各个顶点的坐标.

1.8. 已知点 $M(3,2)$，作它关于横轴，纵轴，原点的对称点. 求这些点的坐标.

1.9. 证明点 $A_1(a,b)$ 关于第 I 和第 III 象限角的平分线的对称点 A_2 必有坐标 (b,a).

1.10. 点 B 与点 $A(2,4)$ 对称于第 I 和第 III 象限角的平分线，求点 B 的坐标.

1.11. 一点在某一坐标系下的坐标为 $x=2$, $y=-1$，如果轴的方向保持不变而将原点移至点：

(a) $(4,5)$;　　(b) $(4,-5)$;

(c) $(-4,5)$;　　(d) $(-4,-5)$.

该点在新系下的坐标等于什么？

1.12. 某点在两轴方向相同的两坐标系下的坐标为 $(12,-7)$ 和 $(0,15)$，各系的原点在他系下的坐标等于什么？

1.13. 如果将坐标轴依逆时针方向旋转 $60°$，点 $M(1,\sqrt{3})$ 在新系下的坐标等于什么？

1.14. 如果将坐标轴依逆时针方向旋转 $45°$，点 $M(1,\sqrt{3})$ 在新系下的坐标等于什么？

1.15. 坐标轴应该旋转多少角度，方能使点 $M(2,0)$ 在新系下的横标和纵标变成相等？（我们把角度限制在 $-\frac{\pi}{2}$ 到 $\frac{\pi}{2}$ 之间.）

两点間的距离，綫段的定比分点

1.16. 求下列各题中两点间的距离：

(a) $(5,2)$ 和 $(1,-1)$;　　(b) $(-6,3)$ 和 $(0,-5)$;

(c) $(0,0)$ 和 $(-3,4)$;　　(d) $(9,-7)$ 和 $(4,5)$.

1.17. 已知三角形的顶点 $A(3,2)$, $B(-1,-1)$ 和 $C(11,-6)$. 求

三角形的周长.

1.18. 试证顶点为 $A(0,0)$, $B(3,1)$及 $C(1,7)$ 的三角形是直角三角形.

1.19. 一点从点 $A(-3,-2)$作直线运动移至点 $B(4,5)$, 求该点所经过的距离.

1.20. 证明点$(7,2)$和点$(1,-6)$在以点$(4,-2)$为圆心的圆周上,并求这个圆的半径.

1.21. 在 x 轴上求与点 $A(5,12)$的距离为 13 单位的点的坐标.

1.22. 在第 I 象限角的平分线上求一点,使它与点 $A(0,2)$的距离为 $\sqrt{2}$ 单位.

1.23. 已知点M的横坐标等于 7 单位,而到点 $N(-1,5)$的距离等于 10 单位,求点M的纵坐标.

1.24. 已知点M到两坐标轴和点$(3,6)$都有相等的距离,求点M的坐标.

1.25. 求与已知三点 $A(2,2)$, $B(-5,1)$和 $C(3,-5)$等距离的点.

1.26. 试用解析法证明, 任意三角形两边中点连线之长等于第三边之长的一半.

1.27. 设点 $M_1(1,1)$, $M_2(2,2)$, $M_3(3,-1)$ 是平行四边形的三个顶点,求第四个顶点.

1.28. 设正方形相邻两顶点是 $A(2,3)$和 $B(6,6)$, 求其余的顶点.

1.29. 下列各对坐标表示一线段的两端点,试求它们的中点:

(a) $(7,4)$, $(3,2)$; (b) $(6,-4)$, $(2,2)$;

(c) $(a,1)$, $(1,a)$; (d) $(0,0)$, $\left(0,\frac{2}{3}\right)$;

(e) $\left(-3\frac{3}{8},\ -7\frac{5}{8}\right)$, $\left(2\frac{3}{4},\ -4\frac{1}{2}\right)$.

1.30. 从点 $A(2,3)$引一线段到点 $B(7,-2)$, 再延长同样的长度.

求延长线端点的坐标.

1.31. 已知两点 $A(5,\ 4)$ 和 $B(6,-9)$. 延长线段 $\overline{AB}$ 至点 C 使 $BC=\frac{1}{2}AB$, 求点 C 的坐标.

1.32. 已知两点 $A(2,3)$, $B(3,5)$. 求分线段 $\overline{AB}$ 得比值 1:3 的点 M 的坐标.

1.33. 已知两点 $A(2,1)$, $B(3,9)$. 求(a)分线段 $\overline{AB}$ 得比值 4:1 的点 M 的坐标;(b)分线段 $\overline{BA}$ 得比值 4:1 的点 M 的坐标.

1.34. 下列各对坐标表示一线段的两端点，试求它们的两个三等分点.

(a) $(-1,2)$, $(-10,-1)$; (b) $(11,6)$, $(2,3)$.

1.35. 点 $C(2,\ 3)$ 将线段 $\overline{AB}$ 分为 1:2. 如已知点 A 的坐标为 $(1,2)$, 求点 B 的坐标.

1.36. 线段 $\overline{AB}$ 被点 $M_1(1,2)$ 和 $M_2(3,4)$ 分成相等的三部分. 求点 A 和 B 的坐标.

1.37. 两点 $A(x,5)$ 和 $B(-2,y)$ 间的线段被点 $M(1,1)$ 平分. 求出点 A 的横标和点 B 的纵标.

1.38. 已知三角形的顶点的坐标 $A(3,-2)$, $B(5,2)$ 和 $C(-1,4)$, 求它中线的长.

1.39. 直线由两点 $A(-1,4)$ 和 $B(2,1)$ 决定，在这条直线上求横标等于 5 单位的点.

1.40. 已知三角形的顶点: $A(1,4)$, $B(-5,0)$ 及 $C(-2,-1)$. 求它的中线的交点.

1.41. 已知平行四边形的相邻两顶点为 $A\left(-4\frac{1}{2},-7\right)$ 和 $B(2,6)$ 及对角线的交点 $M\left(3,1\frac{1}{2}\right)$. 求它的其余两个顶点.

1.42. 点 $A(1,1)$ 到点 B 的长为 5 单位，线段 $\overline{AB}$ 中点的横标为 3 单位,求点 B 的坐标.

1.43. 已知三角形各边的中点为 $P(3,-2)$, $Q(1,6)$ 和 $R(-4,2)$. 求三角形的顶点.

曲线及其方程

1.44. 画出下列各方程的轨迹:

(a) $y^2=4x$;　(b) $y=x^3$;　(c) $y^2-x^3=0$;

(d) $y-x^2-2x=0$;　(e) $4x^2+y^2=4$;　(f) $xy=1$.

1.45. 方程 $(x-1)^2+(y-2)^2=0$ 所对应的几何轨迹是什么?

1.46. 一动点，它到坐标原点和到点 $A(-5,-4)$ 的距离是相等的. 建立其轨迹方程.

1.47. 一动点，它到 y 轴的距离等于它到点 $C(2,0)$ 的距离. 建立它的轨迹方程.

1.48. 一动点到 x 轴的距离是到 y 轴的距离的两倍，建立它的轨迹方程.

1.49. 作到 x 轴及 y 轴的距离的乘积等于 1 的轨迹方程.

1.50. 在两坐标轴间有定长线段 AB, 在 AB 上有某一点 P, 当点 A 永远在横轴上，同时点 B 永远在纵轴上移动时，试求点 P 的轨迹.

1.51. 枪弹以速度 v_0 而与地面成 α 角射出，试建立弹道的轨迹方程.

1.52. 一渔轮在进行拖网时，测得它到一小岛的距离与到一直线海岸的距离之比保持为一定数 e. 试建立渔轮航行的轨迹方程（圆锥曲线）. [提示: 取坐标系 xOy 使小岛位于坐标原点 O, 而海岸与直线 $x-a=0$ 一致.]

1.53. 一枢轴 RQ 绕定点 P 旋转，并推动直角三角形 ACB 使沿直

线 KL 滑动，求枢轴 RQ 与斜边 AB 的延长线的交点 M 的轨迹方程。
[提示:如图，$\triangle OPC\sim\triangle NMC$，$\triangle NMB\sim\triangle CAB$.]

1.54. 作出下列参数方程的图形：

(a) $x=2t,\quad y=\dfrac{t}{3}$;　　(b) $x=5t^2-1,\ y=10t^2+4$;

(c) $x=2t+1,\quad y=4t^2$;　　(d) $x=3\sin\theta,\ y=4\cos\theta$;

(e) $x=\csc\theta,\quad y=5\operatorname{ctg}\theta$.

1.55. 求圆 $x^2+y^2=8$ 与直线 $x-y=0$ 的交点.

1.56. 求曲线 $4x^2+y^2=32$ 和 $y^2=8x$ 的交点.

1.57. 试求曲线 $y=2+x-x^2$ 与两坐标轴的交点.

1.58. 下列各曲线方程，如平移坐标轴至其后所示的新原点，应变为何种形式？

(a) $3x-4y=6,\ (2,0)$;　　(b) $5x-y+2=0,\ (3,-2)$;

(c) $x^2+y^2-4x-2y=0,\ (2,1)$;

(d) $y^2-4x+8=0,\ (2,0)$;　　(e) $y^2=x^3,\ (-2,-3)$.

1.59. 下列各曲线方程，如依其后所注角度将坐标轴依逆时针方向旋转，应变为如何？

(a) $x+y=0,\ \dfrac{\pi}{4}$;　　(b) $x+2y=1,\ \dfrac{\pi}{3}$;

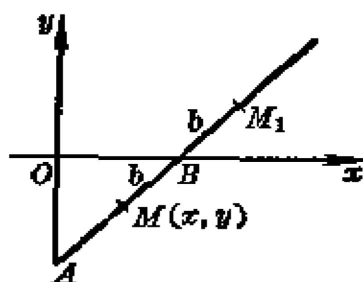
(c) $x^2+4xy+y^2=16,\ \dfrac{\pi}{4}$.

杂　题

1.60. 若 $P(5,9)$ 是圆周上的一点，这圆周的中心是 $(1,6)$，求这圆周的方程并且将它画出来.

1.61. P 为一动点，它到原点 O 的距离的平方等于它的两坐标的和，求点 P 的轨迹.

1.62. 给定直线 Ox 及与它距离为 a 的点 A（如图）. 经过点 A 作



一切可能的直线，且在每条直线上，在它与基线 Ox 的交点 B 的两侧，取长度等于 b 的线段 MB 和 M_1B. 求点 M 和点 M_1 的轨迹方程(蚌线).

1.63. 一重心在点 $M(5,1)$ 的均匀细棒，它的一端在点 $A(-1,-3)$上，求另一端点 B 的位置. [提示: 均匀细棒的重心在它的中点处.]

1.64. 试用三角形的顶点坐标来表示其形心的坐标. [提示: 三角形的形心位于它的三条中线的交点.]

1.65. 重力作用于质点 $M_1(x_1, y_1)$和 $M_2(x_2, y_2)$上，它们的质量分别为 m_1 与 m_2, 试求这力系的重心的坐标.

1.66. 在 $A(-1, 0)$, $B(-2, 4)$, $C(4, 5)$三点上分别放置 30 克、50 克和 70 克重量的物体，试求这一物系的重心的位置.

曲线的参数方程

1.67. 设炮弹从发射点 O 以初速 v_0 和发射角 α 射出，求炮弹在 xOy 平面中的运动规律. [提示: 取 x 轴为水平位置，y 轴为铅直位置.]

1.68. 设动点在 xOy 平面上沿一直线作等速运动，开始一秒钟后它从点(1, 2)移动到点(2, 1)，问 t 秒钟后动点的位置(x, y)又是怎样?

1.69. 描出下列参数方程的图形:

(a) $x=2t^2,\ y=3t-t^3$;　　(b) $x=2t+3,\ y=\dfrac{1}{2}t^2-4$.

1.70. 消去曲线的参数方程 $\begin{cases} x=3+4\cos\theta, \\ y=3\sin\theta \end{cases}$ 中的参数 θ 而将曲线方程表示为 $F(x, y)=0$ 的形式.

第二章 直线

2.1. 一直线通过点 $A(-3, -2)$和 $B(4, 5)$. 求此直线的斜率及其倾角.

2.2. 已知三角形的三个顶点为 $A(4,-1)$, $B(-3,2)$和 $C(-2,6)$, 求它各边的斜率.

2.3. 试由斜率证明三点$(-2, 12)$, $(1, 3)$和$(4, -6)$在一直线上.

2.4. 若通过两点$(-k, 3)$和$(5, -k)$的直线的斜率等于 1, 求 k 的值. 将这两点和直线画出来.

2.5. 设直线过原点,倾角为(a)$135°$; (b)$180°$. 求其方程.

2.6. 求直线 (a)$x-y+5=0$, (b)$4x+8y-16=0$ 的斜率和截距.

2.7. 证明四点 $(-2, -3)$, $(5, -4)$, $(4, 1)$, $(-3, 2)$ 是平行四边形的顶点.

2.8. 设一直线过点$(2, 1)$, 并与 x 轴成 $45°$ 角. 求它的方程.

2.9. 设一直线过点$(-2, 4)$, 它的倾角等于直线 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+3$ 的倾角的两倍. 求其方程.

2.10. 求直线(a)$x+3y+5=0$, (b)$4x+8y+16=0$ 的截距.

2.11. 一直线在 y 轴上的截距为 -3, 倾角为 $\frac{\pi}{6}$. 求这直线的方程.

2.12. 一直线在 y 轴上的截距 $b=5$, 且过点$(6, 3)$. 求其方程.

2.13. 将下列各直线方程化为截距式方程，并利用截距描绘直线的图形:

(a) $2x=3y-6$; (b) $2y-5x=20$;

(c) $y=6(x-3)$; (d) $3y-6x+10=0$.

2.14. 一直线通过点$(5, 2)$, 且在 x 轴上的截距和在 y 轴上的截距

相等．求其方程．

2.15. 过点(6, 8)引一直线，使与两坐标轴所围成三角形的面积等于 12．求其方程．

2.16. 求通过下列各对点的直线方程：

(a) (4, 6)和(3, −1)； (b) (5, 2)和(−4, −3)；

(c) (−6, 1)和(2, 0)．

2.17. 已知顶点为 $A(4, 2)$, $B(-2, 4)$, $C(-1, -4)$ 的三角形．试写出经过顶点 C 的中线方程，并求此中线的长．

2.18. 求原点到直线 $4x-4y=9$ 的距离．

2.19. 求点(2, 1)到直线 $2x=3y-6$ 的距离．

2.20. 求点(x_0, y_0)到直线 $y=kx+b$ 的距离．

2.21. 求二平行直线 $2x+3y=7$, $4x+6y=11$ 间的距离．

2.22. 过点(1, 2)引一直线，使与点(2, 3)和点(4, −5)的距离相等．求此直线方程．

2.23. 求过点(−4, 3)，而与原点距离为 5 的直线方程．

2.24. 求经过坐标原点，且与点 $A(2, 1)$的距离为 1 的直线方程．

2.25. 给定直线 $3x-4y-10=0$，求与此直线平行且和它有 3 单位的距离的直线方程．

2.26. 一直线通过点 $A(5, 2)$，且点(−3, 1)到它的距离是 4 单位，写出它的方程．

2.27. 求直线 $3x+4y-1=0$ 和 $4x-3y+5=0$ 间夹角的平分角线的方程．[提示：平分角线上任一点到两直线等距离．]

2.28. 求二直线 $3x+4y-9=0$ 和 $12x+9y-8=0$ 所构成两角的平分角线，并验证这两平分角线互相垂直．

2.29. 三角形的顶点在点 $A(1, 2)$, $B(-1, -1)$和 $C(2, 1)$处，求角 B 的平分角线的方程．

2.30. 在下面各对直线中判定哪些是互相平行的，哪些是互相垂

直的，若不互相平行也不互相垂直，就求它们的交角：

(a) $x+2y=3$, $x+2y=-4$;

(b) $2x-y+5=0$, $4x-2y-7=0$;

(c) $x-y=1$, $x+y=2$;

(d) $x+2y+11=0$, $6x-3y-4=0$;

(e) $3x-y=0$, $2x+y=0$;

(f) $2x-3y=1$, $x-3=0$;

(g) $x+y=0$; $y=0$.

2.31. λ 的值怎样，则两直线 $3x-2y+6=0$ 和 $\lambda x-y+2=0$

(a) 互相平行； (b) 互相垂直.

2.32. 求过点$(2, -3)$，而与直线 $y=2x+1$ 垂直的直线方程.

2.33. 一直线通过点$(2, -3)$，且平行于连接两点$(1, 2)$和$(-1, -5)$的直线. 求此直线方程.

2.34. 一直线平行于直线 $2x+3y+1=0$，且在 y 轴上的截距等于 5，求其方程.

2.35. 一直线在 x 轴上的截距 $a=3$，且与直线 $x-4y+2=0$ 平行，试求其方程.

2.36. 直线 $4x-3y+11=0$ 上一点，它的横标等于 1，从这点作该直线的垂线. 试求这垂线的方程.

2.37. 已知顶点为 $A(6, 4)$, $B(-3, 5)$, $C(-2, -6)$的三角形. 试求出经过顶点 A，且与经过顶点 B 的中线平行和垂直的两直线的方程.

2.38. 设引一直线通过两直线 $3x-y-3=0$, $4x+3y-4=0$ 的交点，且垂直于其中的第一直线，求所引直线的方程.

2.39. 过两直线 $2x-3y+5=0$ 和 $x-4y+5=0$ 的交点引一直线使与直线 $3x-2y+2=0$ 平行. 求此直线的方程.

2.40. 三角形的顶点在点 $A(1, 3)$, $B(-1, 0)$和 $C(2, -2)$处. 求其高线(即通过顶点而与对边垂直的直线)的方程.

2.41. 三角形三边的方程是 $x-y-3=0$, $x-3y-4=0$ 和 $4x+$ $+2y+3=0$. 求其三内角.

2.42. 三角形的顶点是点 $A(2,1)$, $B(3,1)$ 和 $C(1,2)$, 求 $\angle A$.

2.43. 正三角形的两个顶点是点 $A(2,1)$ 和 $B(2,5)$, 求第三个顶点.

2.44. 求过点 $(3,5)$ 并与直线 $3x-2y+7=0$ 成 $45°$ 角的直线方程.

2.45. 光线从点 $(-2,3)$ 射到点 $(1,0)$, 然后被 x 轴反射, 求反射线的方程.

杂　题

2.46. 已知一直线方程为 $y=\sqrt{3}x-2$, 先将坐标轴平移, 使新原点为 $(\sqrt{3},1)$, 再将坐标轴依逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{6}$. 求此直线在新坐标系下的方程.

2.47. 直线 l 经过定点 $(-3,4)$, 并且具有下列各条件之一. 求 l 的方程:

(a) 平行于直线 $5x+4y=6$;

(b) 垂直于经过两点 $(4,1)$ 和 $(7,3)$ 的直线;

(c) 交 x 轴于 $(10,0)$;

(d) 在两轴上的截距之和等于 12;

(e) 与点 $(12,9)$ 相距 5 单位;

(f) 到两点 $(2,2)$ 和 $(0,-6)$ 的距离相等;

(g) 经过直线 $x+y=8$ 和 $4x-3y=12$ 的交点.

2.48. 直线 l 的斜率为 $-\frac{3}{4}$, 并且具有下列各条件, 求 l 的方程:

(a) 在 x 轴上的截距是 6;

(b) 距点 $(10,2)$ 4 单位;

(c) 到两点(2, 7)和(3, −8)的距离相等.

2.49. 直线 l 经过下列各对直线的交点，并具有其后所给的另一条件，求它的方程:

(a) $3x-2y=13$ 和 $x+y-6=0$, 经过点(2, −3);

(b) $4x+y-7=0$ 和 $3x-2y=10$, 平行于直线 $x-3y=6$;

(c) $3x+5y-13=0$ 和 $x+y-1=0$, 垂直于直线 $7x-5y=10$.

2.50. 三角形三边的中点在点(1, 2), (7, 4)和(3, −4)处，求各边的方程.

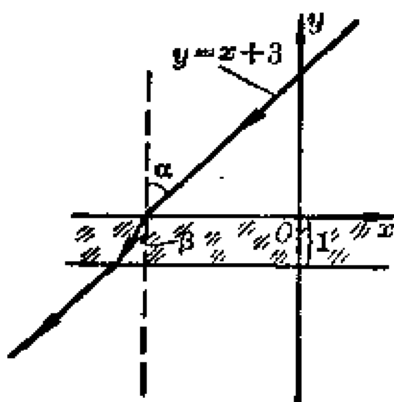
2.51. 求平行于直线 $5x+12y-13=0$ 并与它相距 2 单位的直线方程.

2.52. 过原点和点 $M(1, 3)$ 分别作两平行线，如已知这两直线间的距离为 $\sqrt{5}$, 求它们的方程.

2.53. 求与点 $C(4, 3)$ 距离为 5 单位，且在两坐标轴上的截距相等的直线的方程.

2.54. 求过点(1, 2)并与圆 $x^2+y^2=5$ 相切的切线方程.

2.55. 求垂直于直线 $4x-y=7$, 而其垂足的横标等于 1 的直线方程.



2.56. 一光线，在穿过厚 1 厘米的玻璃片(折射率① 为 1.5)以前，它的方程是 $y=x+3$, 设横轴位于这玻璃片的表面上，而纵轴垂直于此片(见图). 试求在此玻璃片内和出玻璃片后的光线方程，以及光线在玻璃片内的行程.

2.57. 设直线 $y=mx-7$ 分两点 $M_1(3,2)$, $M_2(1,4)$ 的连线 $\overline{M_1M_2}$ 成两

---

① 设光线的入射角为 α, 而出射角为 β, 则 $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ = 折射率.

段，其比为 $\frac{3}{2}$，求 m.

2.58. 过点 $P(0,1)$作直线，使它包含在二已知直线 $x-3y+10=$ $=0$ 及 $2x+y-8=0$ 间的线段平分于点 P.

2.59. 求直线方程，已知它包含在第 I 象限的坐标轴间的线段的长为它与原点的距离的两倍，而且所求直线与轴构成的三角形的面积等于 4.5 平方单位. [提示: 设所求直线方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.]

2.60. 光线通过点$(2,3)$，在直线 $x+y+1=0$ 上反射，反射线通过点$(1,1)$，求光线入射线和反射线的方程.

2.61. 一动点与原点的距离，常等于这点与原点联线的斜率，求其轨迹方程.

2.62. P 为一动点，但知它到互相垂直的两直线的距离的和是一个常数，求它的轨迹. [提示: 选取 x 轴和 y 轴为互相垂直的两直线.]

2.63. P为一动点，它和两定点$(a,0)$和$(-a,0)$的联线总是互相垂直的，求点 P 的轨迹.

2.64. 设有直线，它平行于两平行直线 $3x+4y=10$ 和 $3x+4y=$ $=35$，并且分这两平行直线间的距离成 2:3. 求它的方程.

2.65. 求这样的点，它与点 $M_1(4,-3)$及点 $M_2(2,-1)$的距离相等，且离直线 $4x+3y-2=0$ 的距离为 2 单位.

2.66. 三角形的二高线的方程是 $2x-3y+1=0$，$x+y=0$，点 $M(1,2)$是它的一个顶点，求各边的方程.

2.67. 已知三角形的两个顶点 $A(-10,2)$和 $B(6,4)$，它的垂心坐标为 $N(5,2)$，试求第三顶点 C 的坐标.

2.68. 设一直线经过点$(-1,1)$，它被二平行直线 $x+2y-1=0$，$x+2y-3=0$ 所截线段的中点在直线 $x-y-1=0$ 上，求其方程. [提示: 所求直线被两平行直线所截线段的中点，也是直线 $x-y-1=0$ 被这两平行直线所截线段的中点.]

2.69. 已知一直线被二平行直线 $3x+4y-7=0$，$3x+4y+8=0$ 所

截线段的长为 $3\sqrt{2}$ 单位，并过点(2, 3)，求其方程.

2.70*①. 直线 $2x+y-1=0$ 是三角形的一条内分角线，而点(1, 2)和点(−1, −1)是三角形的两个顶点，求第三个顶点.

2.71*. 等腰三角形底边的方程是 $x+y-1=0$，一腰的方程是 $x-2y-2=0$，点(−2, 0)在另一腰上，求此腰的方程.

2.72. 设 a、b，k、p 分别为同一直线的截距，斜率及原点到直线的距离，证明下面的关系：

(a) $b=-ka$;　　(b) $a^2k^2=p^2(1+k^2)$;

(c) $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{p^2}$.

第三章　二次曲线

圆

3.1. 求下列各圆的圆心和半径，并且将它们画出来：

(a) $x^2+y^2-8x+4y=5$;　　(b) $x^2+y^2-6x=0$;

(c) $x^2+y^2+8x+6y=0$.

3.2. 分别写出下列各圆的方程：

(a) 圆心位于点(−2, −3)，且它的半径等于 3 单位；

(b) 圆心位于点(2, −3)，且通过点(5, 1)；

(c) 一条直径的端点坐标是(3, 9)与(7, 3)；

(d) 圆心位于点(3, 4)，而切于直线 $8y=15-6x$；[提示：圆的半径等于从圆心到切线的距离.]

(e) 经过(0, 0)，(10, 0)，(6, 8)三点；

(f) 经过点(8, 3)，而和直线 $x=6$ 及 $x=10$ 相切；

(g) 与 y 轴相切，且过原点及点(3, 6).

① 本书在题目号码右上角加"*"时，表示较难之题.

3.3. 求圆心在 y 轴上的圆的一般方程.

3.4. 求与 x 轴在原点相切的圆的一般方程.

3.5. 一圆以点 $(-6, 8)$ 与原点连线的中点为圆心,且过点$(2, 3)$,试求圆的方程.

3.6. 设一圆的中心在点$(4, 7)$且切于直线 $3x-4y+1=0$, 求它的方程.

3.7. (a) 设圆 $x^2+y^2=13$ 的切线平行于直线 $4x+6y-5=0$, 求这切线方程;

(b) 设圆 $x^2+y^2+5x=0$ 的切线垂直于直线 $4x-3y+7=0$, 求这切线方程.

3.8. 画出下面两个圆,并证明它们相切:

$x^2+y^2-4x-6y+9=0$ 和 $x^2+y^2+12x+6y-19=0$.

[提示: 证明两个圆心的距离等于两个圆的半径的和.]

3.9. 证明圆 $x^2+y^2-18x+45=0$ 和直线 $y=\frac{4}{3}x-2$ 相切.

3.10. 一动点与两定点的两个距离成比例, 比值不等于 1. 证明此点的轨迹是圆.

3.11. 从圆上各点向圆的某一直径作垂线, 求这些垂线的中点的几何轨迹. [提示: 设圆心在坐标原点,并取位于 x 轴上的直径.]

3.12. 一动点将圆 $x^2+y^2=25$ 上各点的纵坐标分成 2:3. 试求其轨迹方程.

3.13. 如果三角形 ABC 有两个固定的顶点 $A(6, 0)$ 和 $B(-6, 0)$, 第三顶点 $C(x, y)$ 的轨迹方程为 $x^2+y^2=36$, 求这三角形重心的轨迹. [提示: 重心将中线 $\overline{CO}$ 分为 2:1 的两段.]

椭　圆

3.14. 求下列各椭圆的长、短半轴, 焦点坐标与离心率, 并且画出它们的图形:

(a) $4x^2+25y^2=100$; (b) $9x^2+16y^2=144$;

(c) $x^2+25y^2=25$; (d) $9x^2+4y^2=36$.

3.15. 分别建立椭圆的标准方程(长轴合于 x 轴,短轴合于 y 轴),假定已知:

(a) 焦点间的距离等于 8 单位,长轴等于 10 单位;

(b) 短半轴等于 2 单位,且焦点间的距离等于 6 单位;

(c) 长半轴等于 10 单位,且离心率等于 0.6 单位;

(d) 长短半轴的和等于 10 单位,且焦点间的距离等于$4\sqrt{5}$单位.

3.16. 已知椭圆的焦点间的距离等于短轴和长轴端点间的距离,求此椭圆的离心率.

3.17. 地球的子午线为椭圆形,它的两半轴的比为 $\frac{299}{300}$,求地球子午线的离心率.

3.18. 已知椭圆的短轴的两端点与一焦点的联线成一直角,求它的离心率.

3.19. 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上,求一点使它与中心和右焦点的距离相等.

3.20. 求过两点(1, 4)和(7, 2),并与坐标轴对称的椭圆方程.

3.21. 一动点与二定点(1, 2)及(5, 5)距离之和等于 7 单位. 求此动点轨迹的方程. 此轨迹表示何种曲线?

3.22. 求与椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 共焦点且通过点(3, −2)的椭圆方程.

3.23. 在椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ 内,求通过点(2, 1)且在这点平分的弦.
[提示: 设弦的两端点为(x_1, y_1)、(x_2, y_2).]

3.24. 正圆柱底的直径为 12 厘米,用一个与底平面成 30° 角的平面相截,试确定在这截面上所得椭圆的两半轴和离心率.

3.25. 菱形的边长等于 5 单位,高(即两平行边间的距离)等于 4.8 单位,经过它的二个相对的顶点作椭圆,焦点与菱形的其他二个顶

点相合．若用菱形的对角线作坐标轴，试求这椭圆的方程．[提示：$2bc=$菱形的面积，其中 b 是椭圆的短半轴，$2c$ 是焦点间的距离．]

3.26. 底边不动的三角形的顶点这样移动，使这三角形的周界保持定长，在底边等于 24 厘米，周界等于 50 厘米的条件下，求顶点的轨迹．

双 曲 线

3.27. 求下列各双曲线的实、虚半轴，焦点坐标与离心率，并且画出它们的图形：

(a) $4x^2-25y^2=100$;　　(b) $9x^2-4y^2=36$;

(c) $x^2-y^2=64$;　　(d) $x^2-y^2=-64$;

(e) $3x^2-8y^2=48$;　　(f) $x^2-4y^2=-4$.

3.28. 求适合于下列条件的各双曲线的标准方程：

(a) 一个顶点是(4, 0)，一个焦点是(5, 0)；

(b) 一个顶点是(0, 8)，而离心率是 2；

(c) 一条渐近线是 $2y=3x$，而一个焦点是 $(\sqrt{13}, 0)$.

3.29. 分别建立双曲线的标准方程(实轴合于 x 轴，虚轴合于 y 轴)，假定已知：

(a) 焦点间的距离等于 14 单位，而顶点间的距离等于 12 单位；

(b) 焦点间的距离等于 16 单位，且离心率等于 $\frac{4}{3}$；

(c) 实半轴等于 $\sqrt{15}$ 单位，且通过点 $(5, -2)$；

(d) 通过点 $(2\sqrt{7}, 3)$ 与点 $(-7, -6\sqrt{2})$；

(e) 两半轴之差是 1 单位，离心率等于 $\frac{5}{4}$.

3.30. 建立焦点在点 $(\pm 6, 0)$ 的等边双曲线方程．

3.31. 已知椭圆 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{5}=1$. 求以这椭圆的焦点做顶点，而以它的顶点做焦点的双曲线方程．

3.32. 已知双曲线的渐近线是 $y=\pm\frac{1}{2}x$，焦点在 x 轴上，两焦点间的距离等于 10 单位，建立它的方程.

3.33. 一动点与二定点(2, 1)及(5, 5)距离之差等于 2 单位，求此动点轨迹的方程. 此轨迹表示何种曲线？

3.34. 试求经过双曲线 $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$ 的焦点与其共轭双曲线的焦点的直线方程. [提示: 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的共轭双曲线是 $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$.]

3.35. 试求双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的焦点与其共轭双曲线的焦点间的距离.

3.36. 试求与双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 共渐近线且通过点$(-3, 2\sqrt{3})$的双曲线方程.

3.37. 证明双曲线上任何一点到二渐近线的距离的乘积是定值.

3.38. 证明顶点在双曲线上而有一对对边平行于双曲线的实轴的平行四边形一定是长方形.

抛 物 线

3.39. 求下列各抛物线的参数，焦点的坐标和准线的方程. 并画出它们的图形(包括记出焦点画出准线):

(a) $y^2=-8x$; (b) $x=2y^2$; (c) $x^2=8y$;

(d) $x^2=-8y$; (e) $2y^2=9x$.

3.40. 分别建立抛物线的方程，假定已知:

(a) x 轴作为抛物线的对称轴，顶点位于坐标原点，而且从焦点到顶点的距离等于 4 单位;

(b) 抛物线是对称于 x 轴的，它通过点$(2, -4)$，且顶点位于坐标原点;

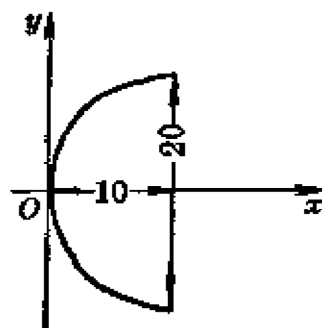
(c) 抛物线是对称于 x 轴的，它通过点$(-2, 4)$，且顶点位于坐标

原点；

(d) 抛物线是对称于 y 轴的，焦点位于$(0,3)$，且顶点与坐标原点重合；

(e) 抛物线是对称于 y 轴的，它通过点$(4,2)$，且顶点与坐标原点重合；

(f) 抛物线是对称于 y 轴的，它通过点$(-4,-2)$，且顶点与坐标原点重合.



3.41. 汽车灯面是一个旋转抛物面（即抛物线绕对称轴旋转而成）. 灯的直径是20厘米，深10厘米（见图），求灯面焦点的位置. [提示：设抛物线方程为 $y^2=2px$，则点$(10,10)$在此抛物线上（坐标系取法如图）.]

3.42. 设有一座拱桥的桥拱是抛物线形的，拱高为 a，拱宽为 $2b$，求这抛物线的标准方程.

3.43. 若从抛物线 $y^2=4x$ 上一点 P 到该抛物线的焦点的距离为10单位. 求点 P 的坐标.

3.44. 已知抛物线的焦点为原点，准线为 $x+2y=1$，求抛物线的方程.

3.45. 已知抛物线的轴平行于 x 轴，它的顶点在点(a,b)，焦点参数等于 p，求它的方程.

3.46. 求以直线 $5x+12y+4=0$ 为准线，而以$(2,1)$为焦点的抛物线方程.

3.47. 试求抛物线 $y^2=12x$ 被点 $M(1,2)$ 所平分的弦的方程.

3.48. 求通过一定点且切于一定直线的一切圆的圆心的几何轨迹.

3.49. 在抛物线 $y^2=8x$ 内求作一个内接三角形，已知三角形的一个顶点在坐标原点而垂心与抛物线的焦点重合，写出三角形各边的方

程．[提示：三角形有一边与抛物线的对称轴垂直．因此若(x_1, y_1)是三角形的顶点，则$(x_1, -y_1)$也是三角形的顶点．]

一般二次方程的简化

3.50. 写出下列各抛物线的顶点坐标和准线方程，简化方程，并作图：

(a) $y=2x^2-4x+8$;　　(b) $y^2+8y-2x+12=0$;

(c) $x^2+6x+y+7=0$;　　(d) $2y^2+4y+x+6=0$.

3.51. 简化方程 $x^2+4y^2-2x-16y+1=0$，并作图．

3.52. 简化方程 $9x^2-16y^2-54x-64y-127=0$，并作图．

3.53. 化双曲线方程 $xy=18$ 为标准式；并作图．

3.54. 简化方程 $x^2+2\sqrt{3}xy-y^2=4$，并作图．

3.55. 简化方程 $x^2+3xy+5y^2=11$，并作图．

3.56. 简化方程 $9x^2-24xy+16y^2-20x+110y-50=0$，并作图．

3.57. 简化方程 $14x^2+24xy+21y^2-4x+18y-139=0$，并作图．

3.58. 简化方程 $y^2-xy-5x+7y+10=0$，并作图．

3.59. 试应用判别式判定下列各方程的图形的类型并作出图形：

(a) $5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0$;

(b) $5x^2+6xy+5y^2-16x-16y-16=0$;

(c) $6xy+8y^2-12x-26y+11=0$;

(d) $x^2-8xy+7y^2+6x-6y+9=0$;

(e) $9x^2+24xy+16y^2-40x+30y=0$.

椭圆及双曲线的准线

3.60. 设双曲线的一准线方程为 $x=2$，其相应之焦点为$(8, 0)$，离心率为 $e=1.5$．求该双曲线方程．

3.61. 已知椭圆的一准线方程为 $y=7$，其相应的一焦点为$(0, 4)$，

离心率 $e=\frac{4}{5}$. 求这椭圆方程，中心坐标，长半轴及短半轴.

3.62. 椭圆的焦点间的距离为 2 单位，准线间的距离为 10 单位，求其两个半轴.

3.63. 直线 $x=\pm 8$ 为椭圆的准线，它的短轴之长等于 8 单位，求这椭圆的标准方程.

3.64. 椭圆的两个焦点把准线间的距离分为三等分，求它的离心率.

3.65. 双曲线的两准线分焦点间的距离为三等分，求它的离心率.

3.66. 已知椭圆的准线间的距离等于焦点间的距离的四倍，求椭圆的离心率.

3.67. 求二次曲线 $3x^2-4xy+8x-1=0$ 的准线方程.

杂　题

在题 3.68—3.73 中，根据已知条件，建立各个圆的方程:

3.68*. 半径为 10 单位而切于两直线 $4x-3y=10$ 和 $6x+8y=35$.

3.69. 和圆 $x^2+y^2+4x-4y=1$ 相切，而圆心在点 $P(4, 10)$.

3.70. 外接于下列三直线所成的三角形:

$$x+6y=11,\ x-y=4 \text{ 和 } 5x+2y+1=0.$$

3.71*. 经过两点 (0, 1) 和 (3, 4) 并且和直线 $12x+5y-2=0$ 相切.

3.72*. 切直线 $4x-y-19=0$ 于点(5, 1)并且经过点(0, 5).

3.73*. 切直线 $x-6y-10=0$ 于点 (4, −1), 并且圆心在直线 $5x=3y$ 上.

3.74*. 证明圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 切于 x 轴的条件是 $D^2=4F$.

3.75. P 为一动点，它到一定点的距离的平方同它到一定直线的距离相等. 求它的轨迹.

3.76. 设三角形的三边各为 $3x-4y=5$, $4x-3y=-10$, $y=2$. 求此三角形的内切圆的方程.

3.77. 证明两个椭圆 $2x^2+3y^2+4x-6y=0$ 和 $2x^2+5y^2+4x-10y=0$ 有同一中心,并求它们的共同点的坐标.

3.78. 地球的轨道是一个椭圆，太阳在一焦点上. 若从太阳到长轴的端点相应地是 90 和 93 百万哩,求这轨道的离心率.

3.79. 求双曲线 $xy=32$ 两顶点的坐标.

3.80. 求与椭圆 $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$ 有公共焦点，且离心率为 $e=1.25$ 的双曲线方程.

3.81. 给定抛物线 $y^2=-8x$. 过点$(-1,1)$引一弦使它在这点被平分. 求弦的方程.

3.82. 在双曲线 $x^2-y^2=4$ 上求出这样的点，它与二焦点的联线互相垂直.

3.83. 一圆的圆心在直线 $y=-2x$ 上,且与直线 $x+y=1$ 在点$(2,-1)$相切,求它的方程.

3.84. 写出经过点$(0,0)$, $(0,2)$, $(6,0)$, $(2,2)$及$(4,1)$的二次曲线方程.

3.85. 平面上有一动点,连接它和点$(-a,0)$, $(a,0)$所成的两条直线,其斜率的乘积恒为定量. 试证该点的轨迹或为椭圆,或为双曲线.

第四章　极坐标

4.1. 描出下列各点,它们的极坐标是:

$\left(4, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(6, \frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(-2, \frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$, $\left(-4, \frac{\pi}{3}\right)$, $(6, 0)$.

4.2. 化下列各点的极坐标为直角坐标:

$\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$, $\left(3, -\frac{2}{3}\pi\right)$, $\left(2.5, -\frac{2}{3}\pi\right)$.

4.3. 化下列各点的直角坐标为极坐标:

$(-2, 0)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $(0, 4)$, $(\sqrt{3}, -1)$, $(-3, -5)$.

4.4. 求与下列各点关于极轴对称的点的极坐标:

$\left(-2, \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(2, -\frac{\pi}{6}\right)$, $\left(3, -\frac{\pi}{3}\right)$, $\left(-4, -\frac{\pi}{3}\right)$.

4.5. 求与下列各点关于极点对称的点的极坐标:

$\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(-5, \frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(4, \frac{5\pi}{6}\right)$, $\left(-2, \frac{7\pi}{12}\right)$.

4.6. 导出已知两点(r_1, θ_1)及(r_2, θ_2)间的距离公式.

4.7. 已知三角形 ABC 的顶点的极坐标是:

$$A\left(5, \frac{\pi}{2}\right),\ B\left(8, \frac{5\pi}{6}\right) \text{ 及 } C\left(3, \frac{7\pi}{6}\right).$$

试证这三角形为等边三角形.

4.8. 在极轴上求与点 $A\left(4\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$距离为 5 单位的点.

4.9. 设定长 $2a$ 的线段的两端在一直角的两边上滑动，从直角顶点O引线段的垂线 OM，求这垂足 M 的几何轨迹在极坐标下的方程.

4.10. 极径 $r=10$ 单位的点的轨迹是什么? 写出半径为 a 圆心在极点的圆的极坐标方程.

4.11. 极角 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 的点的轨迹是什么? 写出经过极点的直线的极坐标方程.

4.12. 曲线的直角坐标方程是:

(a) $y^2=12x$;　　(b) $x^2+y^2=4x$;

(c) $x^2-y^2=20$; (d) $4x^2+y^2=4$;

(e) $x^2-2xy+y^2=x-4$; (f) $xy=7$;

(g) $y^2=4(1-x)$; (h) $x^3=y^2(2a-x)$;

(i) $(x^2+y^2)^2=4(x^2-y^2)$.

求极坐标方程.

4.13. 曲线的极坐标方程是:

(a) $r\sin\theta=10$; (b) $r=4\sin 2\theta$;

(c) $r(5+3\cos\theta)=16$; (d) $r(4+5\cos\theta)=9$;

(e) $r^2\cos 2\theta=-1$; (f) $r(\sin\theta+2\cos\theta)=6$.

求直角坐标方程.

4.14. 化直线的法线式方程 $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ 为极坐标方程.

4.15. 描绘下列曲线:

(a) $r=5(1-\cos\theta)$(心形线); (b) $r=5(1+\sin\theta)$(心形线);

(c) $r=2a\sin\theta$; (d) $r\cos\theta=e$;

(e) $r=a\sin 3\theta$(三叶玫瑰线);

(f) $r=10\sin 2\theta$(四叶玫瑰线);

(g) $r^2=100\cos 2\theta$(双纽线);

(h) $r=\dfrac{4}{2-\sin\theta}$(椭圆); (i) $r=2-\cos\theta$;

(j) $r=3-2\cos 2\theta$; (k) $r=2-\sin 3\theta$.

4.16. 求下列两曲线的交点:

(a) $r=2$ 及 $r=4\sin\theta$;

(b) $r=4(1+\cos\theta)$ 及 $r(1+\cos\theta)=9$;

(c) $r=a$ 及 $r=a(1+\sin^2 2\theta)$;

(d) $r=3\cos\theta$ 及 $r=1+\cos\theta$;

(e) $r=\sqrt{2}\sin\theta$ 及 $r^2=\cos 2\theta$.

4.17*. 给定点的极坐标为 $\left(10, \dfrac{\pi}{6}\right)$. 如果极点在直角坐标为(2,

3)的点处,而极轴平行于 x 轴的正向,求给定点的直角坐标.

4.18*. 极点在点(3,5)处,极轴平行于 y 轴的正向. 求点 $M_1(9,-1)$ 和 $M_2(5,5+2\sqrt{3})$ 的极坐标.

第五章　行列式及线性方程组

5.1. 利用对角线法则,计算下列各行列式:

(a) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$;　(b) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$;

(c) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$;　(d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix}$;

(e) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$;　(f) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$.

5.2. 求出满足下列各方程的 x 的值:

(a) $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$;　(b) $\begin{vmatrix} x & 2x & 9 \\ 3 & 5 & 10 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix}=0$.

5.3. 将行列式

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

(a) 按第一列元素展开,并计算之;

(b) 先使第一列的两个元素化为零,然后按第一列的元素展开,并计算之.

5.4. 将行列式

$$\begin{vmatrix} 10 & -5 & 10 \\ -11 & -2 & 10 \\ -2 & -14 & -5 \end{vmatrix}$$

(a) 按第三行的元素展开,并计算之;

(b) 先使第二行的两个元素化为零后,然后按第三行的元素展开,并计算之.

5.5. 将行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

(a) 按第一列元素展开,并计算之;

(b) 先使第一列中两个元素为零,然后再按第一列的元素展开,并计算之.

5.6. 计算下列各行列式:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; (b) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{vmatrix}$;

(c) $\begin{vmatrix} a & 0 & c \\ a & b & 0 \\ 0 & b & c \end{vmatrix}$; (d) $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$;

(e) $\begin{vmatrix} a+b & c & c \\ a & b+c & a \\ b & b & c+a \end{vmatrix}$; (f) $\begin{vmatrix} a+b & a & b \\ a & c+a & c \\ b & c & c+b \end{vmatrix}$;

(g) $\begin{vmatrix} a+2b & a+4b & a+6b \\ a+3b & a+5b & a+7b \\ a+4b & a+6b & a+8b \end{vmatrix}$; (h) $\begin{vmatrix} b+c & a-c & a-b \\ b-c & c+a & b-a \\ c-b & c-a & a+b \end{vmatrix}$;

(i) $\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & cb & a^2+b^2 \end{vmatrix}$.

5.7. 证明下列恒等式:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2-bc \\ 1 & b & b^2-ca \\ 1 & c & c^2-ab \end{vmatrix}=0$;

(b) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\beta_1 & a_1\alpha_2+b_1\beta_2 \\ a_2\alpha_1+b_2\beta_1 & a_2\alpha_2+b_2\beta_2 \end{vmatrix}$;

(c) $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b'+c' & c'+a' & a'+b' \\ b''+c'' & c''+a'' & a''+b'' \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$;

(d) $\begin{vmatrix} 1 & ax & a^2+x^2 \\ 1 & ay & a^2+y^2 \\ 1 & az & a^2+e^2 \end{vmatrix} = a(x-y)(y-z)(z-x)$.

5.8. 解方程组:

(a) $\begin{cases} 3x+5y=13, \\ 2x+7y=81; \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 3x+5y=4, \\ 6x+10y=2; \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 3x-5y=4, \\ 9x-15y=12; \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 3x+4y=2, \\ 2x+3y=7; \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 3x+4y=1, \\ 6x+8y=3; \end{cases}$

(f) $\begin{cases} 3x+4y=1, \\ 6x+8y=2. \end{cases}$

5.9. 解方程组:

(a) $x+2y+3z=6,\ 2x+4y+z=7,\ 3x+2y+9z=14$;

(b) $2x-y+z=-2,\ x+2y+3z=-1,\ x-3y-2z=3$;

(c) $x+y-z=36,\ x-y+z=13,\ -x+y+z=7$;

(d) $2x+y=5,\ x+3y=10,\ 5y-z=10$;

(e) $x+2y+z=4,\ 3x-5y+3z=1,\ 2x+7y-z=8$;

(f) $x-y+z=a,\ x+y-z=b,\ -x+y+z=c$.

5.10. 求下列方程组的所有解:

(a) $\begin{cases}3x-2y+z=0,\\2x-9y+3z=0;\end{cases}$ (b) $\begin{cases}3x-2y+z=0,\\x+2y-z=0;\end{cases}$

(c) $\begin{cases}x-y+z=0,\\x+y-z=0;\end{cases}$ (d) $\begin{cases}x-4y+z=0,\\2x-8y-z=0.\end{cases}$

5.11. 解方程组:

(a) $x+y+z=0,\ 2x+3y+2z=0,\ 4x+5y+4z=0$;

(b) $x-y+z=0,\ x+y-z=0,\ 5x+y-z=0$;

(c) $x+5y-10z=0,\ 2x-3y+6z=0,\ 3x+2y-4z=0$;

(d) $4x-3y+5z=0,\ 3x+y-2z=0,\ x-4y-3z=0$.

5.12. 确定 λ 的值，使方程组: $x-y+\lambda z=0,\ 2x+y-z=0,\ x+z=0$ 有非零解.

5.13. 解方程组:

(a) $4x-3y+2=0,\ 2x+5z-19=0,\ 5x-7z+16=0$;

(b) $2x-z=1,\ 2x+4y-z=1,\ -x+8y+3z=2$.

5.14. 计算下列四阶行列式:

(a) $\begin{vmatrix}0&-1&-1&1\\4&5&1&1\\3&9&4&1\\-4&4&4&1\end{vmatrix}$; (b) $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1+a&1&1\\1&1&1+b&1\\1&1&1&1+c\end{vmatrix}$;

(c) $\begin{vmatrix}-3&0&0&0\\2&-2&0&0\\-1&3&1&0\\1&-5&-3&5\end{vmatrix}$; (d) $\begin{vmatrix}1&-2&-3&4\\-2&-1&4&3\\3&4&1&2\\4&-3&2&1\end{vmatrix}$;

(e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$;　(f) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix}$;

(g) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & 0 \\ -c & -e & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

5.15. 解方程组:

(a) $\begin{cases} 5x+4z+2t=3, \\ x-y+2z+t=1, \\ 4x+y+2z=1, \\ x+y+z+t=0; \end{cases}$　(b) $\begin{cases} x+y+2z+3t=1, \\ 3x-y-z-2t=-4, \\ 2x+3y-z-t=-6, \\ x+2y+3z-t=-4; \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x+2y+3z-2t=6, \\ 2x-y-2z-3t=8, \\ 3x-2y-z+2t=-4, \\ 2x-3y+2z+t=-8. \end{cases}$

第六章　空间直角坐标、矢量代数初步

空間点的直角坐标

6.1. 在空间直角坐标系中作出具有下列坐标的点:

(a) (4, 3, 5);　(b) (1, 2, −1);

(c) (−4, 4, 4);　(d) (4, −4, −4).

6.2. 指出下列各点位置的特殊性质:

(a) (4, 0, 0);　(b) (0, −7, 0);

(c) $(0, -7, 2)$;　　　　(d) $(5, 0, 3)$.

6.3. 一立方体放置在 xOy 平面上，其底面的中心与原点相合，底面的顶点在 x 轴和 y 轴上，已知立方体的边长为 a，求它各顶点的坐标.

6.4. 设某点与给定点$(2, -3, -1)$分别对称于下列坐标平面:

(a) xOy;　　(b) yOz;　　(c) zOx.

求它的坐标.

6.5. 设某点与给定点(a, b, c)分别对称于下列坐标平面:

(a) xOy;　　(b) yOz;　　(c) zOx.

求它的坐标.

6.6. 设某点与给定的点$(2, -3, -1)$分别对称于下列各轴:

(a) x 轴;　　(b) y 轴;　　(c) z 轴.

求它的坐标.

6.7. 设某点与给定的点(a, b, c)分别对称于(a) x 轴; (b) y 轴; (c) z 轴; (d) 原点 O. 求它的坐标.

6.8. 求点 $M(4, -3, 5)$ 与原点及各坐标轴间的距离.

6.9. 求顶点是 $A(2, 5, 0)$, $B(11, 3, 8)$, $C(5, 1, 11)$ 的三角形各边的长.

6.10. 求顶点为 $A(2, 1, 4)$, $B(3, -1, 2)$, $C(5, 0, 6)$ 的三角形各边的长.

6.11. 试证以三点 $A(4, 1, 9)$, $B(10, -1, 6)$, $C(2, 4, 3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

6.12. 根据下列条件求点 B 的未知坐标:

(a) $A(4, -7, 1)$, $B(6, 2, z)$, $|AB| = 11$;

(b) $A(2, 3, 4)$, $B(x, -2, 4)$, $|AB| = 5$.

6.13. 在 z 轴上求与点 $A(-4, 1, 7)$ 和点 $B(3, 5, -2)$ 等距离的点.

6.14. 在 yOz 平面上，求与三已知点 $A(3,1,2)$, $B(4,-2,-2)$ 和 $C(0,5,1)$ 等距离的点.

6.15. 线段 $\overline{AB}$ 被五等分. 已知第一个分点 $C(3,-5,7)$ 和最后一个分点 $F(-2,4,-8)$. 求线段的端点和其他分点的坐标.

6.16. 决定每个坐标平面分点 $A(2,-1,7)$ 和点 $B(4,5,-2)$ 间线段 $\overline{AB}$ 之比，并求分点的坐标. [提示: 在 xOy 面上点的立标 $z=0$, 在 yOz 面上点的横标 $x=0$, 在 zOx 面上点的纵标 $y=0$.]

6.17. 给定点 $M_1(-1,4,1)$ 和 $M_2(1,0,-3)$. 求线段 $\overline{M_1M_2}$ 的中点，以及分线段 $\overline{M_1M_2}$ 成比值 $\lambda=2$ 和 $\lambda=-\frac{1}{2}$ 的点的坐标.

6.18. 求点$(1,-3,2)$关于点$(-1,2,1)$的对称点. [提示: 应用中点公式.]

6.19. 试证连接四面体相对边中点的直线互相平分. [提示: 证明任一相对边中点联线的中点的坐标相同.]

6.20. 四面体的顶点是 $A(-7,3,-2)$, $B(0,2,1)$, $C(4,-1,0)$ 和 $D(-1,0,-3)$. 如将坐标轴平行移动使原点移在点 $M(6,-2,1)$ 处，试求四面体顶点的新坐标.

6.21. 在 $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$, $C(x_3,y_3,z_3)$, $D(x_4,y_4,z_4)$ 四点上分别放置质量相等的质点，求该质点系重心的坐标.

矢量代数

6.22. 在平行四边形 $ABCD$ 内设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$. 试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示矢量 $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ 和 $\overrightarrow{MD}$. 这里 M 是平行四边形对角线的交点.

6.23. 把三角形 ABC 的 BC 边五等分，并把分点 D_1, D_2, D_3, D_4 各与对角 A 连接. 试以 $\overrightarrow{AB}=\mathbf{c}$, $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$ 表示矢量 $\overrightarrow{D_1A}$, $\overrightarrow{D_2A}$, $\overrightarrow{D_3A}$ 和 $\overrightarrow{D_4A}$.

6.24. 若四边形的对角线互相平分，证明它是平行四边形.

6.25. 已知平行四边形的三个顶点 $A(\boldsymbol{r}_1)$, $B(\boldsymbol{r}_2)$ 和 $C(\boldsymbol{r}_3)$. 求与顶点 B 相对的第四个顶点 D.

6.26. 设一矢量 $\boldsymbol{r}$ 的模是 4, 它与投影轴的交角是 $60°$. 求这矢量在该轴上的投影.

6.27. 写出矢量 $\boldsymbol{a}=\frac{1}{3}(2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})$, $\boldsymbol{b}=\frac{1}{3}(-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})$ 的坐标,并分别求出各个矢量的模.

6.28. 分别求出上一习题內矢量 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b}$ 的方向余弦.

6.29. 分别求出矢量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$ 及 $\boldsymbol{c}=-2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 的模,并分别用单位矢量 $\boldsymbol{a}^0$, $\boldsymbol{b}^0$, $\boldsymbol{c}^0$ 表达矢量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$.

6.30. 设已给矢量 $\boldsymbol{a}=\{3, 5, -1\}$, $\boldsymbol{b}=\{2, 2, 3\}$, $\boldsymbol{c}=\{4, -1, -3\}$, 求下列各矢量的坐标:

(a) $2\boldsymbol{a}$; (b) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$;

(c) $2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}$; (d) $m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}$.

6.31. 设矢量与各坐标轴间的角为 α, β, γ. 若已知其中之二角是 (a) $\alpha=60°$, $\beta=120°$; (b) $\alpha=135°$, $\beta=60°$. 求第三角.

6.32. 一矢量与 x 轴和 y 轴组成等角, 而与 z 轴组成的角是它们的两倍. 确定这矢量的方向.

6.33. 求矢量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\sqrt{2}\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 与坐标轴间的夹角.

6.34. 设 $\boldsymbol{m}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{p}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$. 求矢量 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$ 在 x 轴上的投影及在 y 轴上的分矢量.

6.35. 三力 $\boldsymbol{F}_1=\{1, 2, 3\}$, $\boldsymbol{F}_2=\{-2, 3, -4\}$ 及 $\boldsymbol{F}_3=\{3, -4, 5\}$ 同时作用于一点,求合力 $\boldsymbol{R}$ 的大小和方向余弦.

6.36. 求平行于矢量 $\boldsymbol{A}=\{6, 7, -6\}$ 的单位矢量.

6.37. 求证空间四边形相邻各边中点的连线构成平行四边形. [提示: 写出连接四边形相邻两边中点的矢量.]

6.38. 设已知两点 $A(4, 0, 5)$和 $B(7, 1, 3)$. 求方向和 $\overrightarrow{AB}$ 一致的单位矢量.

6.39. 一矢量的终点在点 $B(2,-1,7)$，它在坐标轴上的投影顺次是 4，-4 和 7. 求这矢量的起点 A 的坐标.

6.40. 从点 $A(2,-1,7)$ 沿矢量 $\boldsymbol{a}=8\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}-12\boldsymbol{k}$ 的方向取线段长 $|AB|=34$. 求点 B 的坐标.

6.41. 已知矢量 $\boldsymbol{a}=\alpha\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 和矢量 $\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\gamma\boldsymbol{k}$ 共线，求系数 α 和 γ.

6.42. 给定二点 $M_1(2,5,-3)$ 和 $M_2(3,-2,5)$. 设在线段 $\overline{M_1M_2}$ 上的一点 M 满足 $\overrightarrow{M_1M}=3\overrightarrow{MM_2}$，求矢量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标.

6.43. 设已给矢量 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$.

(a) 求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积； (b) 求 $5\boldsymbol{a}$ 与 $3\boldsymbol{b}$ 的数量积；

(c) 分别求出数量积(i)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i}$； (ii)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{j}$； (iii)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k}$.

6.44. 设给定矢量 $\boldsymbol{a}=\{1,1,-4\}$，$\boldsymbol{b}=\{2,-2,1\}$：

(a) 计算 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$； (b) 求 $|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$ 和 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$；

(c) 求 $\mathrm{prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$.

6.45. 求矢量 $\boldsymbol{A}=\{4,-3,4\}$ 在矢量 $\boldsymbol{B}=\{2,2,1\}$ 上的投影.

6.46. 给定四点 $A(1,-2,3)$，$B(4,-4,-3)$，$C(2,4,3)$ 和 $D(8,6,6)$. 求矢量 $\overrightarrow{AB}$ 在矢量 $\overrightarrow{CD}$ 上的投影.

6.47. 已知三角形 ABC 的两边是矢量 $\overrightarrow{AB}=\{2,1,-2\}$，$\overrightarrow{BC}=\{3,2,6\}$. 求三角形的三内角.

6.48. 已知三角形三顶点的坐标是 $A(-1,2,3)$，$B(1,1,1)$ 和 $C(0,0,5)$. 试证三角形 ABC 是直角三角形，并求角 B.

6.49. 证明两矢量 $\boldsymbol{a}=\{3,2,1\}$ 与 $\boldsymbol{b}=\{2,-3,0\}$ 互相垂直.

6.50. 证明矢量 $2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 和矢量 $4\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 互相垂直.

6.51. 设一平面平行于两矢量 $3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$，证明矢量 $2\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 垂直于这平面.

6.52. 设有一质点开始时位于点 $P(1,2,-1)$处，今有一方向角分别为 $60°$，$60°$，$45°$，而大小为 100 克的力 $\boldsymbol{F}$ 作用于此质点. 求当此质

点自点 P 作直线运动至点 $M(2,5,-1+3\sqrt{2})$ 时力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功(长度单位为厘米).

6.53. 一动点与点 $M_0(1,1,1)$ 所成的矢量与矢量 $\boldsymbol{n}=\{2,2,3\}$ 垂直,求动点的轨迹.

6.54. 设已给矢量 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$:

(a) 求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的矢量积; (b) 求 $2\boldsymbol{a}$ 与 $7\boldsymbol{b}$ 的矢量积;

(c) 求 $7\boldsymbol{b}$ 与 $2\boldsymbol{a}$ 的矢量积;

(d) 分别求出矢量积 (i)$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{i}$; (ii)$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{a}$.

6.55. 已知矢量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$, 计算下列各式:

(a) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$; (b) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$;

(c) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$; (d) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$.

6.56. 求矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的矢量积:

(a) $\boldsymbol{a}=\{1,1,1\}$, $\boldsymbol{b}=\{3,-2,1\}$;

(b) $\boldsymbol{a}=\{0,1,-1\}$, $\boldsymbol{b}=\{1,-1,0\}$.

6.57. 设已知矢量 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$. 计算矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积.

6.58. 求矢量 $\boldsymbol{p}=(3\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})\times(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k})$ 在坐标轴上的分矢量.

6.59. 已给三矢量 $\boldsymbol{a}=\{1,0,1\}$, $\boldsymbol{b}=\{1,-2,0\}$ 和 $\boldsymbol{c}=\{-1,2,1\}$, 试求 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$.

6.60. 求同时垂直于矢量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ 的单位矢量.

6.61. 设已知两矢量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$. 求同时垂直于矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的单位矢量 $\boldsymbol{n}^\circ$.

6.62. 求同时垂直于矢量 $\boldsymbol{a}=\{3,6,8\}$ 和横轴的单位矢量.

6.63. 设平行四边形的二边是矢量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+$

$+3\boldsymbol{k}$. 求平行四边形的面积.

6.64. 已知 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$. 求 $\triangle OAB$ 的面积.

6.65. 已知三角形的顶点是 $A(1,-1,2)$, $B(3,3,1)$ 和 $C(3,1,3)$. 求 $\triangle ABC$ 的面积.

6.66*. 设在 xOy 平面上已知三点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为

$$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

试应用矢量方法证明之.

6.67*. 试用三角形的顶点的矢径表示三角形的面积. 证明如果:

$$\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3+\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_1=0,$$

则点 $A(\boldsymbol{r}_1)$, $B(\boldsymbol{r}_2)$ 和 $C(\boldsymbol{r}_3)$在一直线上.

6.68. 求以矢量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$ 与 $\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 为边所作平行四边形的对角线长及面积.

6.69. 设 $\overrightarrow{OA}=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{k}$, $\overrightarrow{OB}=-4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$, 以 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ 为边作平行四边形 $OACB$:

(a) 求证此平行四边形的对角线互相垂直;

(b) 求此平行四边形的面积.

6.70. 试求以矢量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 为边的平行四边形的对角线间夹角的正弦.

6.71. 已知三点 A, B, C 的矢径分别为 $\boldsymbol{r}_1=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{r}_2=3\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{r}_3=4\boldsymbol{i}+10\boldsymbol{j}+9\boldsymbol{k}$. 证明三点在一直线上.

6.72. 证明矢量 $\boldsymbol{A}=\{3,4,5\}$, $\boldsymbol{B}=\{1,2,2\}$ 和 $\boldsymbol{C}=\{9,14,16\}$ 是共平面的.

6.73. 验证四点 $A(1,0,1)$, $B(4,4,6)$, $C(2,2,3)$ 和 $D(10,14,17)$ 在同一平面上.

6.74*. 求由矢量 $\overrightarrow{OA}=\{1, 1, 1\}$, $\overrightarrow{OB}=\{0, 1, 1\}$ 和 $\overrightarrow{OC}=\{-1, 0, 1\}$ 所决定的平行六面体的体积.

6.75*. 求由矢量 $\overrightarrow{AB}=\{4, -2, 4\}$, $\overrightarrow{AC}=\{10, 2, 12\}$ 和 $\overrightarrow{AD}=\{1, 2, 2\}$所决定的四面体的体积.

6.76*. 给定点 $A(-1, 2, 4)$, $B(6, 3, 2)$, $C(1, 4, -1)$ 和 $D(-1, -2, 3)$, 求四面体$ABCD$的体积.

6.77. 设已知矢量 $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ 和 $\boldsymbol{r}$ 两两垂直, 且 $|\boldsymbol{p}|=1$, $|\boldsymbol{q}|=2$, $|\boldsymbol{r}|=3$, 求矢量 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}$ 的长度和它与三已知矢量间的夹角.

6.78. 如果 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{m}-3\boldsymbol{n}$, 式中 $|\boldsymbol{m}|=2$, $|\boldsymbol{n}|=1$, 又 $(\widehat{\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}})=\frac{\pi}{2}$, 简化表达式 $\boldsymbol{a}^2+3\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}+1$.

6.79. 若 $|\boldsymbol{a}|=5$, $|\boldsymbol{b}|=2$, $(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})=60^\circ$, 求矢量 $\boldsymbol{u}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 的模.

6.80. 求与矢量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 共线且满足方程 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=-18$ 的矢量 $\boldsymbol{x}$.

6.81. 设已知 $|\boldsymbol{p}|=2\sqrt{2}$, $|\boldsymbol{q}|=3$ 又 $(\widehat{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}})=\frac{\pi}{4}$, 试求以矢量 $\boldsymbol{A}=5\boldsymbol{p}+2\boldsymbol{q}$ 和 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{p}-3\boldsymbol{q}$ 为边的平行四边形对角线的长.

6.82. 计算以矢量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{p}-3\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}-3\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{p}+2\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}$ 为棱的平行六面体的体积, 这里 $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ 和 $\boldsymbol{r}$ 是互相垂直的单位矢量.

6.83. 计算以矢量 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{m}+5\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{m}-2\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{m}+7\boldsymbol{n}$ 为棱的平行六面体的体积, 这里 $|\boldsymbol{m}|=\frac{1}{2}$, $|\boldsymbol{n}|=3$, $(\widehat{\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}})=135^\circ$.

6.84. 点 M 的矢径与 x 轴成 45° 角, 与 y 轴成 60° 角, 其长为 6 单位. 若在 z 轴上的坐标是负值, 求点 M 的坐标.

6.85. 已知三角形的一个顶点 $A(2, -5, 3)$ 及二边的矢量 $\overrightarrow{AB}=\{4, 1, 2\}$ 和 $\overrightarrow{BC}=\{3, -2, 5\}$. 求其余的顶点和矢量 $\overrightarrow{CA}$, 并求 $\angle A$.

6.86. 在 xOy 平面上求垂直于矢量 $\boldsymbol{Q}=\{5, -3, 4\}$ 并与它有等长

的矢量 $\boldsymbol{P}$.

6.87. 证明矢量 $(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$ 垂直于矢量 $\boldsymbol{c}$.

6.88. 计算以矢量 $\boldsymbol{p}=2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{B}$ 为边的平行四边形的面积,这里 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是互相垂直的单位矢量.

6.89. 求平行四边形的面积,若已知其对角线为矢量 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$ 及 $\boldsymbol{d}=3\boldsymbol{m}-4\boldsymbol{n}$, 而 $|\boldsymbol{m}|=1$, $|\boldsymbol{n}|=2$, $(\widehat{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}})=30°$.

6.90. 设以矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为边作平行四边形. 求平行四边形中垂直于 $\boldsymbol{a}$ 边的高线矢量.

6.91. 若矢量 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 垂直于矢量 $7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$, 矢量 $\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$ 垂直于矢量 $7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$. 决定两矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 间的夹角.

第七章 曲面方程与空间曲线方程

7.1. 试求各坐标平面的方程.

7.2. 试求各坐标轴的方程.

7.3. 试求下列各点所成的轨迹:

(a) 在 xOy 平面下 4 单位; (b) 在 yOz 平面前 5 单位;

(c) 在 zOx 平面左 3 单位.

7.4. 导出与点 $A(2,1,0)$ 和点 $B(1,-3,6)$ 等距离的点的轨迹方程.

7.5. 一动点与两定点 $(2,3,1)$, $(4,5,6)$ 等距离, 求动点的轨迹方程.

7.6. 建立与定点 $(3,0,-2)$ 的距离等于 4 单位的点所成的几何轨迹的方程.

7.7. 求与二定点 $P(c,0,0)$ 和 $Q(-c,0,0)$ 的距离之和等于定数 $2a(a>c>0)$ 的点的几何轨迹.

7.8. 求与 yOz 平面的距离为 4 单位，且与点 $A(5,2,-1)$ 的距离为 3 单位的点的几何轨迹.

7.9. 导出与 z 轴和点 $(1,3,-1)$ 等距离的点的轨迹方程.

7.10. 求下列各球面的方程:

(a) 中心在点 $(3,-2,5)$ 而半径 $R=4$;

(b) 中心在点 $(-1,-3,2)$ 且通过点 $(1,-1,1)$;

(c) 一条直径的两个端点是 $(2,-3,5)$ 和 $(4,1,-3)$.

7.11. 建立以点 $(1,3,-2)$ 为中心，且通过坐标原点的球面方程.

7.12. 一球面过原点和点 $A(4,0,0)$, $B(1,3,0)$ 和 $C(0,0,-4)$，求其中心和半径.

7.13. 求下列球面的中心和半径:

(a) $x^2+y^2+z^2-6z-7=0$;

(b) $x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z=0$;

(c) $x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z-7=0$.

7.14. 指出下列各方程表示哪种曲面，并作出它们的草图:

(a) $x^2+y^2+z^2=1$; (b) $x^2+y^2=1$;

(c) $x^2=1$; (d) $x^2-y^2=0$;

(e) $x^2+y^2+z^2=0$; (f) $x^2+y^2=0$;

(g) $x^2=0$; (h) $xyz=0$;

(i) $y-\sqrt{3}z=0$; (j) $x^2+x+1=0$;

(k) $y^2-4y+3=0$; (l) $z^2+x^2=-1$;

(m) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$; (n) $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{9}=1$;

(o) $x^2=4y$.

7.15. 一动点离点 $(2,0,-3)$ 的距离与离点 $(4,-6,6)$ 的距离之比等于 3，求此动点的几何轨迹.

7.16. 一动点到二点 $(3,5,-4)$ 和 $(-7,1,6)$ 等距离，又到二点

(4, −6, 3)和(−2, 8, 5)等距离，试求其轨迹方程.

7.17. 求在 xOz 平面内动点的轨迹，此点到原点的距离等于它到点(5, −3, 1)的距离.

7.18. 设有一圆，它的中心在 z 轴上，半径为 3 单位且位于距离 xOy 平面 5 单位的平面上，建立这个圆的方程.

7.19. 求在 xOy 平面上方 3 单位且在 yOz 平面前方 4 单位的点的轨迹方程.

7.20. 求在 zOx 平面右方 2 单位且与 z 轴距离为 5 单位的点的轨迹方程.

7.21. 求在 xOy 平面上方 5 单位且与点 (3, 7, 1) 的距离为 3 单位的点的轨迹方程.

7.22. 求与点(3, 7, 6)的距离为 2 单位，而与点(2, 5, 4)的距离为 4 单位的点的轨迹方程.

7.23. 求与三点(2, 3, 7), (3, −4, 6)及(4, 3, −2)等距离的点的轨迹方程.

7.24. 指出下列方程表示的曲线：

(a) $x^2-4y^2=8z,\quad z=8;$

(b) $x^2+9y^2=9z^2,\quad z=2;$

(c) $x^2-4y^2=4z,\quad y=-2;$

(d) $x^2+y^2+z^2=25,\quad x=3;$

(e) $x^2+4y^2+9z^2=36,\quad y=1;$

(f) $x^2-4y^2+9z^2=36,\quad y=1;$

(g) $x^2-4y^2+z^2=25,\quad x=-3;$

(h) $y^2+z^2-4x+8=0,\quad y=4;$

(i) $(x-1)^2+(y+4)^2+z^2=25,\quad y+1=0;$

(j) $\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{4}=1,\quad x-2=0.$

7.25. 指出下列曲面与坐标面的交线是什么:

(a) $x^2+4y^2+16z^2=64$;　　(b) $x^2+4y^2-16z^2=64$;

(c) $x^2-4y^2-16z^2=64$;　　(d) $x^2+9y^2=10z$;

(e) $x^2-9y^2=10z$;　　(f) $x^2+4y^2-16z^2=0$.

7.26. 分别求母线平行于 x 轴及 y 轴而通过曲线 $2x^2+y^2+z^2=16$, $x^2+z^2-y^2=0$ 的柱面方程.

7.27. 求通过曲线 $-9y^2+6xy-2zx+24x-9y+3z-63=0$, $2x-3y+z=9$ 而母线垂直于 xOy 平面的柱面方程.

7.28. 求曲线 $x^2+z^2+3yz-2x+3z-3=0$, $y-z+1=0$ 在 xOz 平面上的投影.

7.29. 建立曲线 $x^2+y^2-z=0$, $z=x+1$ 在 xOy 平面上的投影方程.

7.30. 求两球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 和 $x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$ 的交线在 xOy 平面上的投影方程.

7.31. 建立平面 $x=2$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=16$ 的交线方程,并判定它表示什么曲线.

7.32. 在上一题内的平面如果换成 $x=5$,则结论如何?

7.33. 指出下列方程在平面几何方面和在立体几何方面所表示的不同意义:

(a) $x=2$;　　(b) $y=x+1$;　　(c) $x^2+y^2=4$;

(d) $x^2-y^2=1$;　　(e) $\begin{cases} y=5x+1, \\ y=2x-3; \end{cases}$　　(f) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}=1, \\ y=3. \end{cases}$

7.34. 曲线 $y^2+z^2-2x=0$, $z=3$ 在 xOy 平面上的投影曲线方程是什么? 指出原曲线是什么曲线.

7.35. 试把曲线方程 $\begin{cases} 2y^2+z^2+4x=4z, \\ y^2+3z^2-8x=12z \end{cases}$ 换成母线平行于 x 轴与 z 轴的柱面的交线的方程,并由此作出柱面的草图.

7.36. 求三曲面 $x^2+y^2+z^2=64$, $x^2+y^2=4$, $x=0$ 的交点.

第八章　平面与空间直线方程

平面方程

8.1. 分别检查(a)点(4, 1, 2), (b)点(2, −1, 3), (c)点(7, 1, 2), (d)点(3, 0, 4)是否位于平面 $3x-5y+2z-17=0$ 上.

8.2. 已知两点 $A(2, -1, 2)$ 和 $B(8, -7, 5)$. 作一平面通过点 B 且垂直于线段 $\overline{AB}$.

8.3. 指出下列各平面位置的特殊性质,并作图:

(a) $2x-3y+20=0$;　　(b) $3x-2=0$;

(c) $4y-7z=0$.

8.4. 求下列平面在坐标轴上的截距,并作图:

(a) $2x-3y-z+12=0$;　　(b) $5x+y-3z-15=0$;

(c) $x-y+z-1=0$.

8.5. 设平面通过点(5, −7, 4)且在 x, y, z 三轴上的截距相等, 求平面方程.

8.6. 一平面通过点(2, 1, −1), 而在 x 轴和 y 轴上截距分别是 2 和 1. 求它的方程.

8.7. 试求经过下列各组三点的平面方程:

(a) (2, 3, 0), (−2, −3, 4), (0, 6, 0);

(b) (4, 2, 1), (−1, −2, 2), (0, 4, −5);

(c) (1, 1, −1) (−2, −2, 2), (1, −1, 2).

8.8. 四面体的顶点在点 $A(1, 1, 1)$, $B(-1, 1, 1)$, $C(1, -1, 1)$和 $D(1, 1, -1)$处. 求各侧面的方程.

8.9. 求点(2, 1, 1)到平面 $x+y-z+1=0$ 的距离.

8.10. 求点(1, 2, 1)到平面 $x+2y+2z-10=0$ 的距离.

8.11. 在 z 轴上求出与两平面 $12x+9y+20z-19=0$ 和 $16x-12y+15z-9=0$ 等距离的点.

8.12. 在 y 轴上求出与平面 $2x+3y+6z-6=0$ 及平面 $8x+9y-72z+73=0$ 等距离的点.

8.13. 求两平行面间的距离:

(a) $19x-4y+8z+21=0$ 及 $19x-4y+8z+42=0$;

(b) $3x+6y-2z-7=0$ 及 $3x+6y-2z+14=0$.

8.14. 求与两平面 $x+y-2z-1=0$ 和 $x+y-2z+3=0$ 等距离的平面.

8.15. 试求下列各组平面所成两个二面角的平分面:

(a) $2x-y+z=7$, $x+y+2z=11$;

(b) $2x-z+12=0$, $x+3y+17=0$.

8.16. 平面 $x+y+z+12=0$ 与一动点的距离,等于动点与原点间的距离,试求其轨迹.

8.17. 平面 $x+y=1$ 与一动点间的距离等于 z 轴与动点的距离,试求其轨迹.

8.18. 求平面 $2x-2y+z+5=0$ 与各坐标平面间夹角的余弦.

8.19. 求下列各对平面的夹角:

(a) $2x-y+z-7=0$, $x+y+2z-11=0$;

(b) $4x+2y+4z-7=0$, $3x-4y=0$;

(c) $2x+y-2z-4=0$, $3x+6y-2z-12=0$.

8.20. 通过点(3, 0, −5)作平面:

(a) 平行于平面 $2x-8y+z-2=0$;

(b) 平行于 xOy 平面; (c) 平行于 yOz 平面;

(d) 平行于 zOx 平面.

8.21. 通过两点(1, 1, 1)和(2, 2, 2),作与平面 $x+y-z=0$ 垂直的

平面.

8.22. 通过点$(1,-1,1)$，作垂直于两平面$x-y+z-1=0$和$2x+y+z+1=0$的平面.

8.23. 作平面通过原点，且垂直于两平面$x-y+z-7=0$和$3x+2y-12z+5=0$.

8.24. 通过两点$(1,2,-1)$和$(-5,2,7)$，作一平面平行于x轴。

8.25. 决定参数k的值，使平面$x+ky-2z=9$适合于下列各条件之一：

(a) 经过点$(5,-4,-6)$；

(b) 与平面$2x+4y+3z=3$垂直；

(c) 与平面$2x-3y+z=0$成$\frac{\pi}{4}$的角；

(d) 与原点相距3单位.

8.26. 作一平面通过x轴且垂直于平面$5x+4y-2z+3=0$.

8.27. 分别按下列条件求平面方程：

(a) 平行于xOz平面并经过点$(2,-5,3)$；

(b) 经过z轴和点$(-3,1,-2)$；

(c) 平行于x轴并经过两点$(4,0,-2)$和$(5,1,7)$.

[提示：(a)平面法线与y轴平行；(b)平面法线与z轴垂直，平面过坐标原点$(0,0,0)$；(c)平面法线与x轴垂直.]

8.28. 经过两平面$4x-y+3z-1=0$和$x+5y-z+2=0$的交线作平面：

(a) 经过原点；　　(b) 经过点$(1,1,1)$；

(c) 与y轴平行；　　(d) 与平面$2x-y+5z-3=0$垂直.

8.29. 分别按下列各组条件求平面方程：

(a) 与平面$6x+3y+2z+12=0$平行，而至原点的距离为单位；

(b) 与平面$6x+3y+2z+12=0$平行，而使点$(0,2,-1)$与这两平面的距离相等.

8.30. 求三平面 $x+y+z-6=0$, $2x-y+z-3=0$ 和 $x+2y-z-2=0$ 的交点.

8.31. 作平面，通过两点$(0, -1, 0)$和$(0, 0, 1)$且与 xOy 平面成 $\frac{\pi}{3}$ 角.

8.32. 作平面通过 z 轴，且与平面 $2x+y-\sqrt{5}z-7=0$ 间的夹角为 $\frac{\pi}{3}$.

空間的直綫方程

8.33. 分别检查(a)点$(5, -2, -3)$, (b)点$(6, 3, 1)$是否在直线 $5x-3y-31=0$, $3x+4y+7z+14=0$ 上.

8.34. 分别按下列条件求直线方程:

(a) 经过点$(3, 4, -4)$, 方向角为 $60°, 45°, 120°$;

(b) 经过点$(1, -2, 3)$, 方向角为 $45°, 90°, 135°$;

(c) 经过两点$(3, -2, -1)$和$(5, 4, 5)$;

(d) 经过两点$(1, 2, 1)$和$(1, 2, 3)$;

(e) 经过点$(0, -3, 2)$而与两点$(3, 4, -7)$和$(2, 7, -6)$的联线平行.

8.35. 试求下列直线的标准方程:

(a) $\begin{cases} x-y+z+5=0, \\ 5x-8y+4z+36=0; \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x=-\frac{1}{2}z+\frac{9}{2}, \\ y=-\frac{1}{8}z+\frac{23}{8}; \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x-5y+2z-1=0, \\ z=2+5y; \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x=3z-5, \\ y=2z-8; \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x=2z-5, \\ y=6z+7. \end{cases}$

[提示: (a) 直线的方向矢量与所给两平面的法线矢量的矢量积平行; (d)化原方程为

$$\begin{cases} x=\dfrac{x+5}{3}, \\ z=\dfrac{y+8}{2}; \end{cases}$$

则得

$$\frac{x+5}{3}=\frac{y+8}{2}=\frac{z}{1}.]$$

8.36. 试求下列各组中所给两直线的夹角的余弦:

(a) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+4}{7}$ 和 $\dfrac{x+6}{5}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{-1}$;

(b) $\begin{cases} 5x-3y+3z-9=0, \\ 3x-2y+z-1=0 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} 2x+2y-z+23=0, \\ 3x+8y+z-18=0; \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x+8y+15=0, \\ 4y+z+8=0 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x+5y+8=0, \\ 2y+11z+1=0. \end{cases}$

8.37. 求直线 $3x-y+2z=0$, $6x-3y+2z=2$ 和各坐标轴间的夹角.

8.38. 求直线$\begin{cases} x+2y+z-1=0, \\ x-2y+z+1=0 \end{cases}$和直线$\begin{cases} x-y-z-1=0, \\ x-y+2z+1=0 \end{cases}$间的夹角.

8.39. 求直线 $x+2y-z-2=0$, $x+y-3z-7=0$ 的方向余弦.

8.40. 证明下列各组直线互相平行:

(a) $\begin{cases} 2y+z=0, \\ 3y-4z=0 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} 5y-2z=8, \\ 4y+z=4; \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x+2y-z=7, \\ -2x+y+z=7 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} 3x+6y-3z=8, \\ 2x-y-z=0; \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 3x+z=4, \\ y+2z=9 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} 6x-y=7, \\ 3y+6z=1. \end{cases}$

8.41. 试证下列各组直线互相垂直:

(a) $\begin{cases} x+2y=1, \\ 2y-z=1 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} x-y=1, \\ x-2z=3; \end{cases}$

(b) $\begin{cases}4x+y-3z+24=0,\\ z-5=0\end{cases}$ 与 $\begin{cases}x+y+3=0,\\ x+2=0;\end{cases}$

(c) $\begin{cases}3x+y-z=2,\\ 2x-z=2\end{cases}$ 与 $\begin{cases}2x-y+2z=4,\\ x-y+2z=3.\end{cases}$

8.42. 分别求出满足下列各组条件的直线的方程:

(a) 经过点(2, −3, 4)而与平面 $3x-y+2z=4$ 垂直;

(b) 经过点(0, 2, 4)而与两平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 平行.

(c) 通过点(−1, 2, 1)且平行于直线 $x+y-2z-1=0$, $x+2y-z+1=0$.

[提示:(a)直线与平面法线平行;(b)直线与两平面法线垂直.]

8.43. 求直线 $x+y+3z=0$, $x-y-z=0$ 和平面 $x-y-z+1=0$ 间的夹角.

8.44. 求直线 $\begin{cases}3x+y-z+1=0,\\ 2x-y+4z-2=0\end{cases}$ 和平面 $x-8y+3z+6=0$ 间夹角的正弦.

8.45. 试定下列各组中直线和平面间的关系:

(a) $\dfrac{x+3}{-2}=\dfrac{y+4}{-7}=\dfrac{z}{3}$ 和 $4x-2y-2z=3$;

(b) $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{7}$ 和 $3x-2y+7z=8$;

(c) $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-3}{-4}$ 和 $x+y+z=3$.

8.46. 分别求出满足下列各组条件的平面的方程:

(a) 通过点(2, 1, 1)而与直线 $x+2y-z+1=0$, $2x+y-z=0$ 垂直;

(b) 通过点(1, 2, 1)而与两直线

$$\begin{cases}x+2y-z+1=0,\\ x-y+z-1=0\end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases}2x-y+z=0,\\ x-y+z=0\end{cases}$$

平行;

(c) 通过点(3, 1, −2)及直线 $\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$;

(d) 经过直线 $\frac{x-2}{5}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{4}$ 且垂直于平面 $x+4y-3z+7=0$;

(e) 通过两相交直线 $\begin{cases}x=2z+1,\\ y=3z+2\end{cases}$ 和 $\begin{cases}2x=2-z,\\ 3y=z+6;\end{cases}$

(f) 通过两平行直线 $\frac{x+3}{3}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{1}$, $\frac{x+3}{3}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z+1}{1}$;

(g) 通过直线 $\begin{cases}x+2z-4=0,\\ 3y-z+8=0\end{cases}$ 而与直线 $\begin{cases}x=y+4,\\ z=y-6\end{cases}$ 平行;

(h) 通过直线 $x+y+z=0$, $2x-y+3z=0$ 而平行于直线 $x=2y=3z$.

8.47. 求直线 $y=-2x+9$, $z=9x-43$ 与平面 $3x-4y+7z-33=0$ 的交点.

8.48. 求直线 $\frac{x+3}{3}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{1}$ 与平面 $x+2y+2z+6=0$ 的交点.

[提示: 化直线的标准方程为参数方程.]

8.49. 求点(−1, 2, 0)在平面 $x+2y-z+1=0$ 上的投影.

8.50. 求点(2, 3, 1)在直线 $x=t-7$, $y=2t-2$, $z=3t-2$ 上的投影.

8.51. 求点 $P(3,-1,2)$ 到直线 $2x-y+z-4=0$, $x+y-z+1=0$ 的距离. [提示: 过点 P 作垂直于所给直线的平面.]

8.52. 求点(1, 2, 3) 到直线 $\frac{x}{1}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z-3}{-2}$ 的距离.

[提示: 设点 $P(1,2,3)$、$Q(0,4,3)$ 及 $\mathbf{s}=\{1,-3,-2\}$, 则距离 $d=\frac{|\overrightarrow{PQ}\times\mathbf{s}|}{|\mathbf{s}|}$.]

8.53. 从点(0, −1, 1)作直线 $y+1=0$, $x+2z-7=0$ 的垂线. 求

垂线的方程和长度.

8.54. 求直线 $6x-6y-z+16=0, 2x+5y+2z+3=0$ 在三坐标面上的投影方程.

8.55*. 求直线 $x=3-t, y=-1+2t, z=5+8t$ 在三坐标面上的投影方程.

8.56^①. 求平面束 $x+3y-5+\lambda(x-y-2z+4)=0$ (λ 是参数)中在 x 轴和 y 轴上截距相等的平面.

8.57^. 通过两平面 $x+5y+z=0$ 和 $x-z+4=0$ 的交线，作平面与已知平面 $x-4y-8z+12=0$ 成 $45°$ 角.

8.58^. 在由平面 $2x+y-3z+2=0$ 和平面 $5x+5y-4z+3=0$ 所决定的平面束内，求两个互相垂直的平面，其中一个平面经过点 $(4, -3, 1)$.

杂　题

8.59. 一动点与两平面 $x+y-z-1=0$ 和 $x+y+z+1=0$ 距离的平方和等于 1 单位，试求其轨迹.

8.60. 试在平面 $x+y+z-1=0$ 与三坐标平面所构成的四面体内求一点，使它与四面体各侧面间的距离相等，并求内切于四面体的球面方程.

8.61. 作平面与原点距离为 6，且在坐标轴上的截距之比为 $a:b:c=1:3:2$.

8.62. 作出平行于平面 $5x-14y+2z+36=0$，且与此平面的距离为 3 的平面方程.

8.63. 在平面 $x-2y+z-2=0$ 和平面 $x-2y+z-6=0$ 间求一平面，使它将这两平面间的距离分成 1:3.

---

① 本书中在题目号码的右上角加"^"时，表示超出大纲之题.

8.64. 求二等分两平面 $x+2y-z-1=0$ 和 $x+2y+z+1=0$ 间夹角的平面的方程.

8.65. 已知三角形的顶点在点 $A(2,1,5)$, $B(0,4,-1)$和 $C(3,4,-7)$处. 通过点$M(2,-6,3)$作一平面平行于此三角形所在的平面.

8.66. 平行六面体三面之方程为 $x-4y=3$, $2x-y+z=3$ 及 $3x+y-2z=0$, 其一顶点为$(3,7,-2)$, 求其他三面的方程.

8.67. 写出垂直于平面 $5x-y+3z-2=0$, 且与它的交线在 xOy 平面上的平面方程.

8.68*. 求原点关于平面 $6x+2y-9z+121=0$ 对称的点的坐标.

8.69*. 通过三平面 $2x+y-z-2=0$, $x-3y+z+1=0$ 和$x+y+z-3=0$ 的交点,作平面平行于平面 $x+y+2z=0$.

[提示: 设所求平面为$2x+y-z-2+\lambda(x-3y+z+1)+\mu(x+y+z-3)=0$.]

8.70*. 在由平面 $x+y-z+2=0$, $4x-3y+z-1=0$ 和 $2x+y-5=0$ 所决定的平面族中求平面:

(a) 经过 x 轴; (b) 与 xOz 平面平行;

(c) 经过原点和点$(1,3,2)$.

8.71*. 求平行于平面 $2x+y+2z+5=0$ 而与三坐标平面所构成的四面体的体积为 1 单位的平面.

8.72. 求通过直线 $x=2t-1$, $y=3t+2$, $z=2t-3$ 和直线 $x=2t+3$, $y=3t-1$, $z=2t+1$ 的平面.

8.73. 设一平面垂直于平面 $z=0$, 并通过从点$(1,-1,1)$到直线 $x=0$, $y-z+1=0$ 的垂线. 求平面的方程. [提示: 求出垂线方程.]

8.74. 通过平面 $x+y+z=1$ 和直线 $y=1$, $z=-1$ 的交点, 求在已知平面上垂直于已知直线的直线方程. [提示: 写出过交点的平面族方程.]

8.75. 求两条平行直线 $x=t+1$, $y=2t-1$, $z=t$ 和 $x=t+2$, $y=2t-1$, $z=t+1$ 间的距离.

8.76*. 求直线 $\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ 2x+y-z-2=0 \end{cases}$ 和直线 $\begin{cases} x+2y-z-2=0, \\ x+2y+2z+4=0 \end{cases}$ 间的最短距离. [提示: 过第一条直线作与第二条直线平行的平面.]

8.77. 决定 λ, 使直线 $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{\lambda}$ 和直线 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$ 相交. [提示: 两直线相交的条件是两直线共平面.]

8.78*. 试证直线 $\frac{x+3}{5}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{4}$ 和直线 $\frac{x-8}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-6}{2}$ 相交,并写出由此两直线决定的平面方程. [提示: 先导出两线共面的条件.]

8.79. 从平面 $x-2y-2z+1=0$ 上的点 $(7,-1,5)$ 出发作长等于 12 单位的垂线. 求此垂线的端点.

8.80. 设一平面过原点及从点 $(1,-1,0)$ 到直线 $x=z+3$, $y=2x-3$ 的垂线,求其方程. [提示: 作出垂线方程.]

8.81. 求过点 $(-1,0,4)$ 且平行于平面 $3x-4y+z-10=0$, 又与直线 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$ 相交的直线方程.

8.82. 在平面 $x+y+z-2=0$ 和平面 $x+2y-z-1=0$ 的交线上,求与平面 $x+2y+z+1=0$ 和平面 $x+2y+z-3=0$ 等距离的点.

8.83. 求直线 $x+y+z-1=0, x-y+z+1=0$ 在平面 $x+y+z=0$ 上的投影方程. [提示: 过直线作平面垂直于已知平面.]

8.84. 在平面 $x+y+z+1=0$ 内, 作直线通过已知直线 $y+z+1=0$, $x+2z=0$ 与平面的交点,且垂直于已知直线. [提示: 过交点作平面与已知直线垂直.]

8.85. 三坐标平面将平面 $3x-y+4z-12=0$ 割出一个三角形. 试求该三角形三条高线的方程和长度. [提示: 求出三角形的顶点的坐标.]

8.86. 证明两组方程

$$\begin{cases} 5x+17y-5z+10=0, \\ x-2y+8z-1=0 \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} 4x+y+17z+1=0, \\ 2x+5y+z+3=0 \end{cases}$$

表示同一直线.

8.87*. 经过平面$x+28y-2z+17=0$和平面$5x+8y-z+1=0$的交线，作切于球面$x^2+y^2+z^2=1$的平面. [提示：球心到切平面的距离等于球半径.]

第九章　二次曲面

9.1. 指出下列方程所表示的曲面，特别指出哪些是旋转曲面，它们是怎样产生出来的：

(a) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{9}=1$;　(b) $x^2+y^2+z^2=1$;

(c) $x^2+2y^2+3z^2=9$;　(d) $x^2-\frac{y^2}{4}+z^2=1$;

(e) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=3z$;　(f) $x^2+y^2=4z$;

(g) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{9}=-1$;　(h) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=-1$;

(i) $x^2-y^2-z^2=1$;　(j) $x^2-y^2=4z$.

9.2. 写出适合下列条件的旋转曲面的方程(同时指出这些曲面的名称)，并作其草图：

(a) 把曲线$4x^2+9y^2=36$, $z=0$绕x轴旋转一周;

(b) 把曲线$4x^2-9y^2=36$, $z=0$绕x轴旋转一周;

(c) 同(b)，但绕y轴旋转一周;

(d) 把曲线$z^2=5x$, $y=0$绕x轴旋转一周;

(e) 把曲线$x^2+z^2=9$, $y=0$绕x轴或z轴旋转一周.

9.3. 建立下列旋转曲面的方程：

(a) 直线$y=kx$绕x轴旋转;

(b) 曲线 $y=\sin x$ 绕 x 轴旋转.

9.4. 分别写出曲面 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{4}=1$ 在下列各平面上的截痕的方程，并指出这些截痕是什么曲线：(a) $x=2$；(b) $y=0$；(c) $y=5$；(d) $z=2$；(e) $z=1$.

9.5. 分别写出曲面 $x^2-y^2=2z$ 在下列各平面上的截痕的方程，并指出这些截痕是什么曲线：(a) $x=0$；(b) $x=2$；(c) $y=0$；(d) $y=1$；(e) $z=0$；(f) $z=3$.

9.6. 指出下列方程表示怎样的曲面，并作出其草图：

(a) $x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$； (b) $36x^2+9y^2-4z=36$；

(c) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=z$； (d) $x^2-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{4}=1$；

(e) $x^2+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=0$； (f) $x^2+y^2-\frac{z^2}{9}=0$；

(g) $y^2+z^2-x=0$； (h) $x^2-y^2+2z=0$.

9.7^. 应用轴的平移，简化下列曲面方程，并指出它们表示什么曲面，再作出其草图：

(a) $x^2+y^2+z^2-6x+8y+10z+1=0$；

(b) $x^2+y^2+2z^2+4x-6y-8z+21=0$；

(c) $x^2+2y^2+3z^2-6z+3=0$.

9.8. 一动点与点(1, 0, 0)的距离为与平面 $x=4$ 距离的一半，试求其所成的轨迹，并定它为何种二次曲面.

9.9*. 求与 xOy 平面成 45° 角，且过点 (1, 0, 0) 的一切直线所成的轨迹. [提示：设所求轨迹上任意一点为 (x, y, z)，则矢量 $\{x-1, y, z\}$ 与 z 轴间的夹角为 $90°\pm45°$.]

9.10. 建立通过两曲面 $x^2+y^2+4z^2=1$ 和 $x^2=y^2+z^2$ 的交线，而母线平行于 z 轴的柱面方程.

9.11. 建立单叶双曲面 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{5}=1$ 与平面 $x-2z+3=0$ 的交线在 xOy 平面上的投影柱面.

9.12. 求曲面 $z^2+xy-yz-5x=0$ 与直线 $\frac{x}{-1}=\frac{y-5}{3}=\frac{z-10}{7}$ 的交点.

9.13. 描绘下列各组曲面所围成立体的图形.

(a) 平面 $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+z=1$ 与三坐标面;

(b) 五个平面 $y=0, z=0, 3x+y=6, 3x+2y=12, x+y+z=6$;

(c) 旋转抛物面 $z=x^2+y^2$, 三坐标面和平面 $x+y=1$;

(d) 两抛物柱面 $y=\sqrt{x}$ 及 $y=2\sqrt{x}$ 和两平面 $z=0$ 及 $x+z=6$;

(e) 抛物柱面 $z=4-x^2$, 三坐标面和平面 $2x+y=4$;

(f) 抛物柱面 $2y^2=x$, 及两平面 $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1, z=0$;

(g) 三坐标面,平面 $x+y=4$ 及抛物面 $z=x^2+y^2+1$;

(h) 旋转抛物面 $x=\sqrt{y-z^2}$, 抛物柱面 $\frac{1}{2}\sqrt{y}=x$ 及平面 $y=1$;

(i) 双曲抛物面 $z=xy$, 圆柱面 $x^2+y^2=x$ 和平面 $z=0$;

(j) 在第一卦限内两圆柱面 $x^2+y^2=r^2$ 及 $x^2+z^2=r^2$ 和三坐标面.

第二編　数学分析

第十章　函数

絕对值的运算

解不等式:

10.1. $|x|<5$.

10.2. $|x-3|<4$.

10.3. $x^2<9$.

10.4. $0<(x-2)^2\leqslant 4$.

10.5. $|x|>x$.

10.6. $\left|\dfrac{x}{1+x}\right|>\dfrac{x}{1+x}$.

10.7. $|x^2-3x+2|>x^2-3x+2$.

求下列方程的实根:

10.8. $|x|=x+1$.

10.9. $|x|=-x$.

10.10. $|\sin x|=\sin x+2$.

10.11. $|2x+3|=x^2$.

函数值的求法

10.12. 若 $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x+1}$, 求 $f(2), f(-2), f(0), f(a), f(a+b)$.

10.13. 若 $\varphi(x)=2^{x-2}$, 求 $\varphi(2), \varphi(-2), \varphi(0), \varphi\left(\dfrac{5}{2}\right)$.

10.14. 若 $\varphi(t)=t^3+1$, 求 $\varphi(t^2), [\varphi(t)]^2$.

10.15. 若 $f(x)=x^2-3x+7$, 求 $f(x+\Delta x), f(x+\Delta x)-f(x)$.

10.16. 若 $f(x)=\dfrac{1}{x}$, 求 $f(x+\Delta x)-f(x)$.

10.17. 若 $\psi(x)=\ln x$①, 证明 $\psi(x)+\psi(x+1)=\psi[x(x+1)]$.

---

① 本书中的对数函数,以 10 为底的一律用"lg"表示; 以 e 为底的一律用"ln"表示; 底为任意数 a 的表为"$\log_a x$".

10.18. 若 $F(z)=a^z$, 证明 (a) $F(-z)\cdot F(z)-1=0$, (b) $F(x)\cdot F(y)=F(x+y)$.

10.19. 若 $\varphi(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$, 证明 $\varphi(y)+\varphi(z)=\varphi\left(\dfrac{y+z}{1+yz}\right)$.

10.20. 若 $\varphi(\theta)=\operatorname{tg}\theta$, 证明 $\varphi(a+b)=\dfrac{\varphi(a)+\varphi(b)}{1-\varphi(a)\cdot\varphi(b)}$.

10.21. 若 $f(t)=2t^2+\dfrac{2}{t^2}+\dfrac{5}{t}+5t$, 证明 $f(t)=f\left(\dfrac{1}{t}\right)$.

10.22. 若 $f(x)=x^5-x^3+2x$, 证明 $f(-2)=-f(2)$, $f(-x)=-f(x)$.

10.23. 若 $F(x)=x^2+\cos x$, 证明 $F(x)=F(-x)$.

10.24. 若 $\varphi(z)=\sin z-5z^3$, 证明 $\varphi(-z)=-\varphi(z)$.

10.25. 若 $\psi(x)=2\sin x-3\cos x$, 证明 $\psi(x+2n\pi)=\psi(x)$, 其中 n 为整数.

10.26. 若 $f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1,\\ \dfrac{1}{2}, & x=1,\\ 1, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ 求 $f(0)$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $f(1)$, $f\left(\dfrac{5}{4}\right)$, $f(2)$.

10.27. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}2^x, & -1<x<0,\\ 2, & 0\leqslant x<1,\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 3,\end{cases}$ 求 $\varphi(3)$, $\varphi(2)$, $\varphi(0)$, $\varphi(0.5)$, $\varphi(-0.5)$.

10.28. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<1,\\ 0, & |x|\geqslant 1,\end{cases}$ 求 $\varphi(1)$, $\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\varphi(-2)$.

函数的定义域

在题 10.29—10.58 中指出函数的定义域:

10.29. $y=\frac{2x}{x^2-3x+2}$.

10.30. $y=\frac{1}{x^2+1}$.

10.31. $y=\sqrt{3x+4}$.

10.32. $y=\sqrt{x^2-1}$.

10.33. $y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$.

10.34. $y=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

10.35. $y=\frac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$.

10.36. $y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{\frac{1}{x-2}}$.

10.37. $y=\sqrt{x^2-4x+3}$.

10.38. $y=\frac{1}{\lg(1-x)}$.

10.39. $y=\lg\frac{1}{1-x}+\sqrt{x+2}$.

10.40. $y=\frac{1}{2}\lg\frac{1+x}{1-x}$.

10.41. $y=\sqrt[3]{\frac{1}{x-2}}-\log_a(2x-3)\quad(a>1)$.

10.42. $y=\lg(\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x})$.

10.43. $y=\sqrt{\lg\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)}$.

10.44. $y=\log_2(\log_2 x)$.

10.45. $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$.

10.46. $y=\frac{1}{\sin x-\cos x}$.

10.47. $y=\operatorname{tg}(x+1)$.

10.48. $y=\operatorname{ctg}\sqrt{x}$.

10.49. $y=\frac{1}{\sqrt{\cos x}}$.

10.50. $y=\arccos\sqrt{2x}$.

10.51. $y=\arcsin\frac{x-3}{2}$.

10.52. $y=\arcsin(2+3^x)$.

10.53. $y=\lg\sin x$.

10.54. $y=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$.

10.55. $y=\sqrt{3-x}+\arccos\frac{x-2}{3}$.

10.56. $f(x)=\begin{cases}-1, & 0<x<1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$

10.57. $y=\begin{cases}x^2+1, & -1<x<2,\\ x^3-3, & 2<x\leqslant 4.\end{cases}$

10.58. $\varphi(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-1}, & x<0,\\ x, & 0<x<1,\\ 2, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$

10.59. 设 $y=f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$，问

(a) $f(x^2)$, (b) $f(\sin x)$,

(c) $f(x+a), (a>0)$, (d) $f(x+a)+f(x-a), (a>0)$

的定义域是什么？

10.60. 已知从高为 h 处落下的重物所经过的路程是由公式 $S=\frac{1}{2}gt^2$ 来确定，问(a) 此函数的定义域为何？(b) 解析式 $S=\frac{1}{2}gt^2$ 的定义域又如何？

在题 10.61—10.64 中，$f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 是否表同一函数？说明其理由，并在哪一区间内，它们是相同的.

10.61. $f(x)=\frac{x}{x}$, $\varphi(x)=1$.

10.62. $f(x)=\lg x^2$, $\varphi(x)=2\lg x$.

10.63. $f(x)=x$, $\varphi(x)=(\sqrt{x})^2$.

10.64. $f(x)=x$, $\varphi(x)=\sqrt{x^2}$.

建立函数关系

10.65. 温度计上摄氏 0 度对应华氏 32 度，摄氏 100 度对应华氏 212 度，试求将摄氏温标表为华氏温标的函数.

10.66. 设 M 为密度不均匀细杆 OB 上的一点，若 OM 的质量与 OM 的长度平方成正比，又已知 $OM=4$ 寸其质量为 8 单位. 试求 OM 的质量与长度间的关系.

10.67. 一物体作直线运动，已知阻力的大小与物体运动的速度成正比，但方向相反. 当物体以 1 米/秒速度运动时阻力为 2 克，建立阻力与速度间的函数关系.

10.68. 电压在某电路上等速下降，在实验开始时电压为 12 伏特，经过 8 秒后电压降落到 6.4 伏特. 试把电压 V 表为时间 t 的函数.

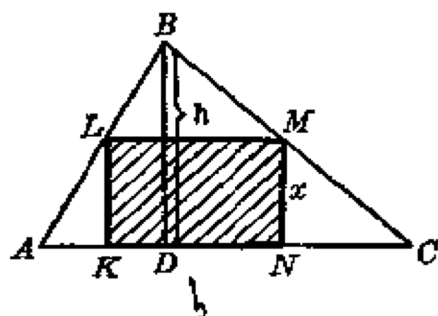
10.69. 已知三角形中有两边长分别为 a 与 b，设 γ 为该两边之间的夹角. 试将三角形的面积表成 γ 的函数，并求其定义域.

10.70. 在半径为 r 的球内嵌入一内接圆柱，试将圆柱的体积表为其高的函数，并求此函数的定义域.

10.71. 已知圆锥的体积为 V，试将圆锥的底半径表为其高的函数，并求此函数的定义域.

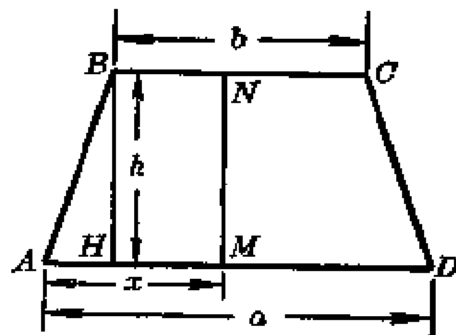
10.72. 一物体受压缩弹簧的推力而运动. 如这弹簧一端固定于原点，原长 $2l$，压缩后长度为 l，弹性系数为 k. 试将物体所受之力表为距离之函数(只考虑弹簧长度由 l 变至 $2l$ 的过程).

10.73. 把一圆形铁片，自中心处剪去中心角为 α 的一扇形后围成一无底圆锥. 试将这圆锥的体积表为 α 的函数.



10.74. 底 $AC=b$，高 $BD=h$ 的三角形 ABC 中(如左图)内接矩形 $KLMN$，其高记为 x，将矩形之周长 p 和其面积 S 表为 x 的函数.

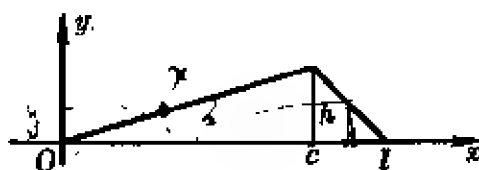
10.75. 在三角形 ABC 中，$AB=6$ 厘米，$AC=8$ 厘米，$\angle BAC==x$. 试将边 $BC=a$ 表为变量 x 的函数.



10.76. 等腰梯形 $ABCD$(如图)，其两底分别为 $AD=a$ 和 $BC=b(a>b)$，高为 $HB=h$. 引直线 $MN\parallel BH$，MN 与顶点 A 的距离 $AM=x(0\leqslant x\leqslant a)$. 将梯形内位于直线 MN 之左的面积 S 表为 x 的函数.

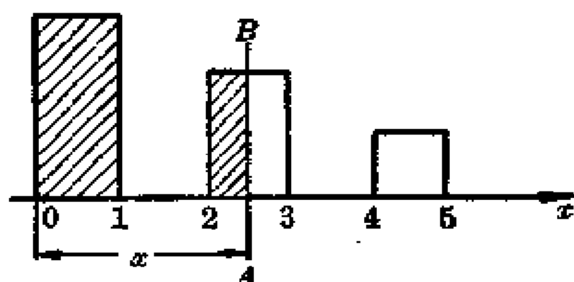
10.77. 长为 l 的弦，两端固定，在 c 点处将弦提高 h 后呈图中的

形状．设提高时弦上各点仅沿着垂直于两端点连结线方向移动．以 x 表示弦上点的位置，y 表 x 点处升高的高度，试建立 x 与 y 间的函数关系．



10.78. 某公共汽车路线全长为 20 里，票价规定如下：乘坐 4 里以下者收费 5 分，乘坐 4—10 里收费 1 角，10 里以上收费 1 角 5 分．试将票价表成路程之函数，并作图．

10.79. 有三个矩形，其高分别等于 3 米、2 米、1 米，而底皆为 1 米，彼此相距一米放着(如图)．假定 $x(-\infty<x<+\infty)$连续变动(即直线 AB 连续地平行移动)．试将阴影部分的面积 S 表为距离x的函数．



10.80. 在区间 $0\leqslant x\leqslant 2$ 上有 3 克重的物质均匀分布着，此外又有一克重的物质集中在 $x=3$ 处．设 x 在 $(-\infty,+\infty)$ 内变化，试将区间 $(-\infty,x)$一段的质量M表为 x 的函数．

函数性质的討論

10.81. 指出下列函数中哪些是奇函数，哪些是偶函数，哪些是非奇非偶的函数(在各函数中 $a>1$)：

(a) $y=x^4-2x^2$;　　(b) $y=x-x^2$;

(c) $y=\cos x$;　　(d) $y=2^x$;

(e) $y=x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}$;　　(f) $y=\sin x$;

(g) $y=\sin x-\cos x$;　　(h) $y=\operatorname{tg} x$;

(i) $y=e^{-x^2}$;　　(j) $y=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$;

(k) $y=\frac{a^x-a^{-x}}{2}$;　　(l) $y=\frac{x}{a^x-1}$;

(m) $y=\frac{a^x+1}{a^x-1}$;　　(n) $y=x\cdot\frac{a^x-1}{a^x+1}$.

10.82. 证明函数 $y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$为奇函数.

10.83. 假设下面所考虑的函数都是定义在$(-l,l)$内，证明:

(a) 两个偶函数的和是偶函数,两个奇函数的和是奇函数;

(b) 两个偶函数的乘积是偶函数,两个奇函数的乘积是偶函数,偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

10.84. 证明: 不论$f(x)$是定义在$(-l, l)$内的什么样的函数，$f(x)+f(-x)$是偶函数,$f(x)-f(-x)$是奇函数.

10.85. 下列各函数中哪些是周期函数? 对于周期函数指出其周期:

(a) $y=\sin^2 x$;　　(b) $y=\sin x^2$;

(c) $y=x\cos x$;　　(d) $y=\cos 2x$;

(e) $y=\sin \pi x$;　　(f) $y=\sin\frac{1}{x}$;

(g) $y=1+\cos\frac{\pi}{2}x$;　　(h) $y=\sin(x+1)$;

(i) $y=\cos(x-2)$;　　(j) $y=\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x)$.

10.86. 验证下列函数在区间$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的:

(a) $y=3x-6$,　(b) $y=2^{x-1}$,　(c) $y=\lg x+x$.

10.87. 证明: (a) $y=10^{\lg y}$, $(y>0)$; (b) $x^3=10^{3\lg x}$, $(x>0)$; (c) $A\cos\omega t+B\sin\omega t=\sin(\omega t+\varphi)$, $\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{A}{B}$.

10.88. 建立下列函数的反函数:

(a) $y=\sqrt[3]{x^2+1}$;　　(b) $y=\frac{2^x}{2^x+1}$;

(c) $y=2\sin 3x$;

(d) $y=1+2\sin\frac{x-1}{x+1}$;

(e) $y=1+\lg(x+2)$;

(f) $y=\frac{10^x+10^{-x}}{10^x-10^{-x}}+1$;

(g) $y=3^{2x+5}$.

10.89. 验证：函数 $y=\frac{1-x}{1+x}$ 的反函数就是它本身.

10.90. 验证：函数 $f(x)=\frac{ax-b}{cx-a}$ 的反函数就是它本身.

函数的图形

在题 10.91—10.107 中画出各函数的图形:

10.91. $y=x+b$, 当 $b=0, b=1, b=-1$ 时.

10.92. $y=ax^2$, 当 $a=1$, $a=-1$, $a=\frac{1}{16}$ 时.

10.93. $y=x^2+cx+1$, 当 $c=-2, c=0, c=2$ 时.

10.94. $y=x^3+d$, 当 $d=0, d=1, d=-2$ 时.

10.95. $y=|x|$.

10.96. $y=-|x-2|$.

10.97. $y=|x^2-1|$.

10.98. $y=x-x^2$.

10.99. $y=\frac{2}{x}$.

10.100. $y=\frac{1}{x^2}$.

10.101. $y=\frac{x^2+1}{x}$.

10.102. $y=x^k$, 当 $k=\frac{1}{3}, k=\frac{2}{3}$ 时.

10.103. $y=a^x$, 当 $a=\frac{1}{2}$, $a=2$ 时.

10.104. $y=3^{ax}$, 当 $a=1, a=-1$ 时.

10.105. $y=\lg ax$, 当 $a=1, a=-2$ 时.

10.106. $y=1-\cos x$.

10.107. $y=|\sin x|$.

10.108. 利用 $y=2^x$ 的图形画出下列函数的图形:

(a) $y=2^x+1$; (b) $y=3\cdot 2^x$; (c) $y=2^{2x}$.

10.109. 利用 $y=\sin x$ 的图形作出下列函数的图形:

(a) $y=\sin 2x$; (b) $y=\sin\left(2x+\frac{3}{2}\right)$;

(c) $y=\frac{1}{2}\sin x$; (d) $y=\frac{1}{2}\sin x-1$.

10.110. 利用图形的加法作下列函数的图形:

(a) $y=x+\sin x$; (b) $y=\sin x+\cos x$.

10.111. 建立下列函数的反函数,并画出两种函数的图形:

(a) $y=2^x+1$; (b) $y=\log_4 x+1$; (c) $y=\sin(x-1)$;

(d) $y=x^2-2x$; (e) $y=\arcsin\frac{1-x}{4}$.

10.112. 画出 $y=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -\frac{1}{2}, & x<0\end{cases}$ 的图形.

10.113. 画出 $y=\begin{cases}|x-1|, & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 0, & x>2 \text{ 或 } x<0\end{cases}$ 的图形.

10.114. 已知 $f(x)$ 以 2 为周期,并且

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & -1<x<0,\\ 0, & 0\leqslant x<1.\end{cases}$$

试在 $(-\infty,+\infty)$ 上绘出 $y=f(x)$ 的图形.

10.115. 作函数 $y=\begin{cases}x^2+1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ x^2-1, & x<0\end{cases}$ 的图形.

双曲函数

10.116. 验证下列关系式:

(a) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$;　(b) $\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x$;

(c) $2\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} 2x$;

(d) $\operatorname{sh}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sh}\alpha \cdot \operatorname{ch}\beta \pm \operatorname{ch}\alpha \cdot \operatorname{sh}\beta$;

(e) $\operatorname{ch}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{ch}\alpha \cdot \operatorname{ch}\beta \pm \operatorname{sh}\alpha \cdot \operatorname{sh}\beta$;

(f) $1 - \operatorname{th}^2 x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;　(g) $1 - \operatorname{cth}^2 x = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$;

(h) $\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x = e^x$;　(i) $\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}$.

第十一章　极限

数列的极限

11.1. 作出下面各数列在数轴上的点,并说出哪些数列有极限?哪些沒有?

(a) $u_n = \dfrac{1}{2^n}$;　(b) $u_n = \dfrac{n}{n+1}$;

(c) $u_n = n(-1)^n$;　(d) $u_n = (-1)^n \dfrac{1}{n}$;

(e) $u_n = n - (-1)^n$;　(f) $u_n = \dfrac{1}{n}\sin\dfrac{\pi}{n}$.

11.2. 设 $u_1 = 0.9$, $u_2 = 0.99$, $u_3 = 0.999$, $\cdots$, $u_n = 0.\underbrace{999\cdots9}_{n\text{个}}$. 问 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = ?$ n 应为何值,才能使 u_n 与其极限之差的绝对值小于 0.0001?

根据极限定义证明:

11.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2} = 0$.　**11.4.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n-1} = \dfrac{3}{2}$.

11.5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$.

11.6. 根据极限定义证明 $u_n=\frac{n-1}{n+1}\to 1$. 问 n 应从何值开始，使 $|1-u_n|<10^{-4}$?

11.7. 设 $u_n=\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}$. 问 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=$? n 从何值开始，才能使 u_n 与其极限之差的绝对值小于正数 ε? 当 $\varepsilon=0.001$ 时 n 应为何值?

11.8. 证明数列 $u_n=\frac{4n^2+1}{3n^2+2}$ 当 $n\to\infty$ 时趋于极限 $\frac{4}{3}$. 问 n 从何值开始，才能使量 $\frac{4}{3}-u_n$ 小于给定的正数 ε?

函数的极限

在题 11.9—11.14 中，根据定义证明下列各极限:

11.9. $\lim\limits_{x\to 3}(3x-1)=8$.

11.10. $\lim\limits_{x\to 2}(5x+2)=12$.

11.11. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=-4$.

11.12. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-6x+5}{x-5}=4$.

11.13. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x+5}{x}=6$.

11.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x^3}{2x^3}=\frac{1}{2}$.

11.15. 当 $x\to\infty$ 时 $y=\frac{x^2-1}{x^2+3}\to 1$. 问 N 应为何值，才能使当 $|x|>N$ 时 $|y-1|<0.01$?

11.16. 当 $x\to 2$ 时 $y=x^2\to 4$. 问 δ 大约等于多少，才能由 $|x-2|<\delta$ 而使 $|y-4|<0.001$? [提示: 因为 $x\to 2$, 所以不妨设 $1<x<3$.]

11.17. 证明函数 $f(x)=|x|$ 当 $x\to 0$ 时极限为零.

11.18. 证明极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{|x|}$ 不存在.

无穷大，无穷小

11.19. 设 $u_n=2n+1$. 验证，当 $n\to\infty$ 时 u_n 是无穷大.

11.20. 当 $x\to 0$ 时，$y=\frac{1+2x}{x}\to\infty$. 问 x 应满足什么条件，才能使不等式 $|y|>10^4$ 成立？

11.21. 验证，当 $x\to 3$ 时，函数 $y=\frac{x-3}{x}$ 是无穷小. 问 x 应满足什么条件，才能使 $|y|<\frac{1}{1000}$？

11.22*. 当 $x\to 0$ 时，$y=\frac{1}{2^x-1}\to\infty$. 问 x 应满足什么条件，才能使 $|y|>100$？

11.23. 在下列各题中指出哪些是无穷小，哪些是无穷大：

(a) $x\to 0, \frac{1+2x}{x^2}$; (b) $x\to 3, \frac{x+1}{x^2-9}$; (c) $x\to 0,\ 2^{-x}-1$;

(d) $x\to +0,\ \lg x$; (e) $\theta\to 0, \frac{\sin\theta}{1+\sec\theta}$.

11.24. 下列函数，当 $x\to\infty$ 时均具有极限，把它表示为一常数(极限值)与一当 $x\to\infty$ 时的无穷小之和的形式：

(a) $y=\frac{x^3}{x^3-1}$; (b) $y=\frac{x^2}{2x^2+1}$; (c) $y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

极限的求法

在题 11.25—11.73 中，试求各极限：

11.25. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+5}{x-3}$.

11.26. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2x+5}{x^2+1}$.

11.27. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^3-3x+1}{x-4}+1\right)$.

11.28. $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$.

11.29. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{2+x}}$.

11.30. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{1-x}$.

11.31. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$.

11.32. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$.

11.33. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$.

11.34. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$.

11.35. $\lim\limits_{x\to10}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$.

11.36. $\lim\limits_{u\to-2}\dfrac{u^3+4u^2+4u}{(u+2)(u+3)}$.

11.37. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$.

11.38. $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$.

11.39. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^n-1}{x-1}$ (n-正整数).

11.40. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$.

11.41. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$.

11.42. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$.

11.43. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x-5}{x+7}$.

11.44. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

11.45. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}$.

11.46. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x}$.

11.47. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

11.48. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$.

11.49. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}$ ($p>0,\ q>0$).

11.50. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2-1}$.

11.51. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$.

11.52. $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

11.53. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$.

11.54. $\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right]$.

11.55. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$.

11.56. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

11.57. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{x^3+1}}$.

11.58. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$.

11.59. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+2}$.

11.60. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(\sqrt{n^2+1}+n)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$.

11.61. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

11.62. $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$.

11.63. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n+1}{(n-1)^2}$.

11.64. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}$.

11.65. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}}{1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}}$.

11.66. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$.

11.67. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} kx}{x}$.

11.68. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}\quad(\beta\neq 0)$.

11.69. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x}$.

11.70. $\lim\limits_{\alpha\to+0}\dfrac{\alpha}{\sqrt{1-\cos\alpha}}$.

11.71. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$.

11.72. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$.

11.73. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+5}$.

11.74. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{-1}{x-1}, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x, & 0<x<1,\\ 1, & 1\leqslant x<2.\end{cases}$

求 $f(x)$ 在 $x\to 0$ 及 $x\to 1$ 时的左极限与右极限，并说明在这两点的极限是否存在.

11.75. 求 $f(x)=\dfrac{x}{x}$，$\varphi(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 在 $x\to 0$ 时的左、右极限，并说明它们在 $x\to 0$ 时的极限是否存在.

11.76. 求 $f(x)=\begin{cases}3x, & -1<x<1,\\ 2, & x=1,\\ 3x^2, & 1<x<2\end{cases}$ 在 $x\to0$ 及 $x\to1$ 时的极限.

11.77. 设 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\geqslant3,\\ 7-x, & x<3.\end{cases}$ 求 x 趋近下列各点时 $f(x)$ 的极限:

(a) $x\to3$; (b) $x\to0$; (c) $x\to4$; (d) $x\to-10$.

11.78. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-3, & x\leqslant1,\\ x, & 1<x<2,\\ 2x-2, & x\geqslant2.\end{cases}$

求(a) $\lim\limits_{x\to1}f(x)$; (b) $\lim\limits_{x\to2}f(x)$; (c) $\lim\limits_{x\to3}f(x)$.

11.79*. 证明 $y=\cos\dfrac{2\pi}{x}$ 当 $x\to0$ 时的左、右极限均不存在.

11.80*. 设 $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & -\infty<x<0,\\ \sin\dfrac{1}{x}, & 0<x<\infty.\end{cases}$

求 $f(x)$ 在 $x\to0$ 时之左极限,并说明它在 $x\to0$ 时的右极限是否存在.

无穷小的比较,等价无穷小

11.81. 当 $x\to1$ 时,两无穷小 $\dfrac{1-x}{1+x}$ 和 $1-\sqrt{x}$ 中哪一个是高阶的?

11.82. 当 $x\to1$ 时,无穷小 $1-x$ 和 (a) $1-\sqrt[3]{x}$, (b) $2(1-\sqrt{x})$ 是否同阶的? 是否等价的?

11.83. 当 $x\to0$ 时,试决定下列各无穷小对于 x 的阶数:

(a) $x^3+1000x^2$; (b) $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}$ $(x>0)$;

(c) $\frac{x(x+1)}{1+\sqrt{x}}$ $(x>0)$;　　(d) $\sqrt{a+x^3}-\sqrt{a}$ $(a>0)$;

(e) $2\sin^3 x$;　　(f) $\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}$;

(g) $\ln(1+x)$;　　(h) $1-\cos x$;　　(i) $x+\sin x$.

杂　　题

在题 11.84—11.112 中求各极限:

11.84. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(5x+1)^{50}}$.

11.85. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$.

11.86. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}$.　　**11.87.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}$.

11.88. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{a}}{x-a}$ ($a>0$, $m\geqslant 2$ 的整数).

11.89. $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$.　　**11.90.** $\lim\limits_{x\to-1}\frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt[3]{2+x}+x}$.

11.91. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $(a>0)$.

11.92. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2\left(\frac{x}{3}\right)}$.

11.93*. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}$. [提示: 将$\operatorname{tg} x$ 写成 $\frac{\sin x}{\cos x}$, 并注意 $\sin x\sim x$.]

11.94*. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$.　　**11.95.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\arcsin x}{3x}$.

11.96. $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg} x$.　　**11.97.** $\lim\limits_{v\to\frac{\pi}{3}}\frac{1-2\cos v}{\sin\left(v-\frac{\pi}{3}\right)}$.

11.98*. $\lim_{z\to 1}(1-z)\operatorname{tg}\frac{\pi z}{2}$. [提示: 令 $\frac{\pi}{2}(1-z)=x$.]

11.99. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$.

11.100. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$.

11.101. $\lim_{n\to\infty}\{n[\ln(n+1)-\ln n]\}$.

11.102. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{3\sec x}$. 11.103. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{x}$.

11.104. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$. 11.105. $\lim_{x\to 0}(1+3\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

11.106*. $\lim_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}$. [提示: $1=\ln e$.]

11.107*. $\lim_{n\to\infty}n[a^{\frac{1}{n}}-1]$. [提示: 令 $a^{\frac{1}{n}}-1=u$.]

11.108*. $\lim_{\alpha\to\beta}\frac{e^\alpha-e^\beta}{\alpha-\beta}$. [提示: 令 $\alpha-\beta=u$.]

11.109*. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}$. 11.110. $\lim_{n\to\infty}2^n\sin\frac{x}{2^n}$.

11.111*. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x-\sin\beta x}{x}$.

11.112*. $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]$.

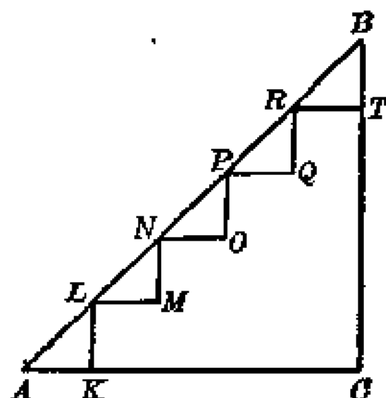
[提示: 注意 $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$.]

11.113. 若 $f(x)=\frac{1}{x}$, 求 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

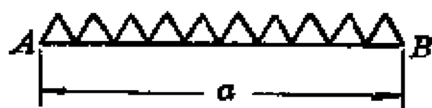
11.114. 若 $f(x)=\cos 2x$, 求 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

11.115. 等腰直角三角形的直角边长为 a, 分斜边为 n 等分，并由分点引平行于直角边之直线成折线（如图）. 对于任意数 n, 这个折线

长都是 $2a$. 但另一方面，当 n 无限增加时，折线就无限接近三角形的斜边，因此斜边长就等于两直角边长之和. 问上述推理错误何在？



11.116. 用 n 个点等分长为 a 的线段 AB，以每个小段为底，做底角为 $\frac{2\pi}{n}$ 的等腰三角形，这些三角形的两腰组成一折线(如图). 试求当 n 无限增大时所得折线长的极限，并与上题做比较.





11.117. 分长为 a 的线段 AB 为 n 等分，在每个小段上做弧长为 $\frac{\pi}{n}$ 的圆弧，这些圆弧组成一曲线(如图). 试求 $n\to\infty$ 时所得曲线长之极限，若在每个小段上做半圆弧，则结果如何？

第十二章　函数的连续性

12.1. 求函数 $y=-x^2+\frac{1}{2}x$ 当 $x=1, \Delta x=0.5$ 时的增量.

12.2. 求函数 $y=\sqrt{1+x}$ 当 $x=3, \Delta x=-0.2$ 时的增量.

12.3. 求下列函数的连续区间，并求极限：

(a) $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$，并求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$；

(b) $f(x)=\lg(2-x)$，并求 $\lim\limits_{x\to -8} f(x)$；

(c) $f(x)=\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}$，并求 $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$；

(d) $f(x)=\ln \arcsin x$，并求 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x)$.

12.4. 求下列函数 $y=f(x)$ 的间断点，并说明这些间断点是属于哪一类，如果是可去间断点，则补充函数的定义使它连续：

(a) $y=\dfrac{1}{(x+2)^2}$;　(b) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$; ✓

(c) $y=\dfrac{\sin 2x}{x}$;　(d) $y=\dfrac{x}{\sin x}$; ✓

(e) $y=x\cos\dfrac{1}{x}$;　(f) $y=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; ✓

(g) $y=\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$; ✓　(h) $y=\dfrac{3x^2-5x}{2x}$;

(i) $y=\sin x\sin\dfrac{1}{x}$;　(j) $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$;

(k) $y=\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{x}$.

12.5. 设 $f(x)=\begin{cases} x-1, & 0<x\leqslant 1, \\ 2-x, & 1<x\leqslant 3. \end{cases}$ ✓

(a) $f(x)$在 $x\to 1$ 时的左、右极限为何？当 $x\to 1$ 时 $f(x)$的极限存在吗？

(b) $f(x)$在 $x=1$ 处连续吗？

(c) 求函数的连续区间.

(d) 求 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x)$.

12.6. 设 $f(x)=\begin{cases} x, & 0<x<1, \\ 1, & 1\leqslant x<2. \end{cases}$

(a) 求 $f(x)$在 $x\to 1$ 时的左、右极限. $f(x)$ 在 $x\to 1$ 时的极限存在吗？

(b) 求 $f(1)$. $f(x)$在 $x=1$ 处连续吗？

(c) 求 $f(x)$的连续区间.

12.7. 设 $f(x)=\begin{cases} x, & 0<x<1, \\ \frac{1}{2}, & x=1, \\ 1, & 1<x<2. \end{cases}$

(a) 求 $f(x)$在 $x\to1$ 时的左、右极限. 这函数在 $x\to1$ 时的极限存在吗?

(b) 求 $f(x)$在 $x=1$ 处的函数值,它在这点连续吗?

(c) 求 $f(x)$的连续区间.

12.8. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & 0\leqslant x\leqslant1, \\ x+3, & x>1. \end{cases}$

当 $x=\frac{1}{2}$, 1, 2 时 $f(x)$是否都连续? 试述函数的定义域,并作出它的图形.

12.9. 设函数 $y=\begin{cases} 0, & x<0, \\ x, & 0\leqslant x<1, \\ -x^2+4x-2, & 1\leqslant x<3, \\ 4-x, & x\geqslant3. \end{cases}$

(a) 试述函数的定义域,并作出函数的图形.

(b) 当 $x=0$, 1, 3 时,函数是否连续?

(c) 这函数在其定义域上是否连续?

12.10. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x, & 0<x<1, \\ 2, & x=1, \\ 2-x, & 1<x\leqslant2. \end{cases}$

(a) 试述函数的定义域,并作出函数的图形.

(b) 间断点 $x=1$ 是函数的什么间断点?如何改变定义使函数在这点连续?

12.11*. 函数 $f(x)=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}$ 当 $x=0$ 时没有定义,能否在点 $x=0$ 处定义函数 $f(x)$使函数在这点变成连续? 何故?

12.12*. $x=0$ 是函数 $y=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$ 的哪一类间断点？ 这间断点是否可去的？

12.13. 根据连续函数的性质，验证方程 $x^5-3x=1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间.

12.14. 试证方程 $x\cdot 2^x=1$ 至少有一个小于 1 的正根.

12.15. 试证方程 $x=a\sin x+b$, 其中 $a>0$, $b>0$, 至少有一个正根，并且它不超过 $b+a$.

12.16. 已知 $y=\arcsin u$, $u=e^v$, $v=-\sqrt{x}$. 试将 y 表为 x 的函数.

12.17. 已知 $y=\sqrt{1+u^2}$, $u=\sin v$, $v=\log_a x$. 试将 y 表为 x 的函数.

12.18. 指出下列函数是怎样复合而成的:

(a) $y=(1+x)^{20}$;

(b) $y=(\arcsin\sqrt{1-x^2})^2$;

(c) $y=\sec^3\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$;

(d) $y=\log_a\sin e^{x+1}$;

(e) $y=2^{\sin^2 x}$;

(f) $y=\arccos\sqrt{\ln(x^2-1)}$;

(g) $y=a^{\sqrt{x^2+1}}$;

(h) $y=\operatorname{arc\,tg}\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{2}}$.

第十三章 导数及微分

导数概念

13.1. 试对下列函数求增量之比 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$:

(a) $y=2x^3-x^2+1$, 当 $x=1, \Delta x=0.1$ 时;

(b) $y=\frac{1}{x}$，　　当 $x=2, \Delta x=0.01$ 时；

(c) $y=\sqrt{x}$，　　当 $x=4, \Delta x=0.4$ 时.

并据定义求(a) $y'(1)$；(b) $y'(2)$；(c) $y'(4)$.

13.2. 根据导数定义，求下列函数的导数：

(a) $y=x^2+3x-1$；　　(b) $y=\sin(3x+1)$；

(c) $y=\cos(2x-3)$.

13.3. 求三次抛物线 $y=x^3$ 在点(2, 8)处的切线的斜率.

13.4. 在三次抛物线 $y=x^3$ 上哪一点的切线的斜率等于 3?

13.5. 在抛物线 $y=x^2$ 上哪一点的切线有下面的性质：

(a) 平行于 Ox 轴；　　(b) 与 Ox 轴构成 45°.

13.6. 一质点作直线运动，它所经过的路程和时间的关系是 $s=$ $=3t^2+1$. 求 $t=2$ 时的瞬时速度.

13.7. 一锥形的细铁杆，它在$[0, x]$一段的质量为

$$M=\frac{1}{3}\left[\pi\rho\,\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}\right]x^3\ (\text{其中 } \rho, \theta \text{ 为常数}),$$

求 $x=2$ 处该物体的线密度.

13.8. 如果一个轴的热膨胀是均匀的，则当温度升高 1°C 时其单位长的增量就称为该轴的线性热膨胀系数. 若过程是非均匀的，设 $l=$ $=f(T)$（这里 l 是轴长，T 是温度），试给出 $T=T_0$ 时的线性热膨胀系数的定义.

13.9. 如果 $f(x)$为偶函数，且 $f'(0)$存在，证明 $f'(0)=0$.

13.10. 已给函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

试求这函数在点 $x=0$ 处的导数.

13.11. 证明函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，但

在 $x=0$ 处导数不存在.

13.12. 证明函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，但在 $x=0$ 处导数不存在.

13.13. 证明函数 $f(x)=\begin{cases}x\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，但在 $x=0$ 处导数不存在.

13.14. 函数 $y=|\sin x|$ 在 $x=0$ 处的导数是否存在. 为什么?

求函数的导数

13.15. 求下列各函数的导数(其中 x, z, v 是变量，a, b, c, m, n, p, q 是常量):

(a) $y=3x^2-5x+1$; (b) $y=2\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}+\sqrt[4]{3}$;

(c) $y=\dfrac{mz^2+nz+4p}{p+q}$; (d) $y=\sqrt{2}(x^3-\sqrt{x}+1)$;

(e) $y=(v+1)^2(v-1)$; (f) $y=\dfrac{ax^3+bx^2+c}{(a+b)x}$.

13.16. $f(t)=\dfrac{t^2-5t+1}{t^3}$, 试求 $f'(-1)$, $f'(2)$, $f'\left(\dfrac{1}{a}\right)$.

13.17. $f(z)=\dfrac{2z^3-3z+\sqrt{z}-1}{z}$, 试求 $f'\left(\dfrac{1}{4}\right)$.

13.18. $s(t)=\dfrac{3}{5-t}+\dfrac{t^2}{5}$, 试求 $s'(0)$, $s'(2)$.

13.19. $F(x)=\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{3}{x^2+1}$, 试求 $F'(0)$, $F'(-1)$.

13.20. $y(x)=(1+x^3)\left(5-\dfrac{1}{x^2}\right)$, 试求 $y'(1)$, $y'(a)$.

13.21. $P(\varphi)=\frac{\varphi}{1-\varphi^2}$, 试求 $P'(2)$, $P'(0)$.

在题 13.22—13.196 中求各函数的导数:

13.22. $y=(x^3-3x+2)(x^4+x^2-1)$.

13.23. $y=(\sqrt{x}+1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)$.

13.24. $y=(1+\sqrt{x})(1+\sqrt{2x})(1+\sqrt{3x})$.

13.25. $y=\frac{x+1}{x-1}$.

13.26. $y=\frac{x}{x^2+1}$.

13.27. $u=\frac{v^5}{v^3-2}$.

13.28. $y=\frac{1-x^3}{\sqrt{\pi}}$.

13.29. $s=\frac{1}{t^2-3t+6}$.

13.30. $y=\frac{3}{(1-x^3)(1-2x^3)}$.

13.31. $y=\frac{x^2+x-1}{x^3+1}$.

13.32. $y=\frac{x^2+1}{3(x^2-1)}+(x^2+1)(1-x)$.

13.33. $y=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$.

13.34. $y=\frac{2}{x^3-1}$.

13.35. $y=\frac{x}{1-\cos x}$.

13.36. $\rho=\varphi\sin\varphi+\cos\varphi$.

13.37. $y=\frac{1+\sin^2 x}{\cos(x^2)}$.

13.38. $y=x\ln x$.

13.39. $y=x\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x$.

13.40. $y=\frac{x+\sqrt{x}}{x-2\sqrt[3]{x}}$.

13.41. $y=\frac{1}{1+\sqrt{t}}-\frac{1}{1-\sqrt{t}}$.

13.42. $y=\frac{1-\ln x}{1+\ln x}$.

13.43. $y=\frac{\ln x}{x^n}$.

13.44. $y=x\sin x\ln x$.

13.45. $s=\frac{\sin t}{1+\cos t}$.

13.46. $y=\frac{x}{4^{x}}$.

13.47. $\omega=z\cdot 10^{z}$.

13.48. $y=(x^{3}-x)^{6}$.

13.49. $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$.

13.50. $y=\left(\frac{1+x^{2}}{1+x}\right)^{5}$.

13.51. $s=\frac{t^{3}}{(1-t)^{2}}$.

13.52. $y=\sqrt[3]{\frac{1}{1+x^{2}}}$.

13.53. $u=(v^{2}+v+2)^{\frac{3}{2}}$.

13.54. $y=3\sin(3x+5)$.

13.55. $y=\frac{x}{\sqrt{1-x^{2}}}$.

13.56. $y=\frac{x}{2}\sqrt{x^{2}-a^{2}}$.

13.57. $y=x^{5}\cdot\sqrt[3]{x^{6}-8}$.

13.58. $y=\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$.

13.59. $y=\frac{x^{2}}{\sqrt{x^{2}+a^{2}}}$.

13.60. $y=\frac{1-\sqrt[3]{2x}}{1+\sqrt[3]{2x}}$.

13.61. $y=\cos^{2}x$.

13.62. $y=\frac{\sin x}{x}+\frac{x}{\sin x}$.

13.63. $y=x\sec^{2}x-\operatorname{tg}x$.

13.64. $y=\frac{x\sin x}{1+\operatorname{tg}x}$.

13.65. $y=5\operatorname{tg}\frac{x}{5}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$.

13.66. $y=\sin^{2}\frac{x}{3}\cdot\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

13.67. $y=\operatorname{arc\,tg}(x^{2})$.

13.68. $y=\operatorname{tg}x-\frac{1}{3}\operatorname{tg}^{3}x+\frac{1}{5}\operatorname{tg}^{5}x$.

13.69. $y=\frac{\sin^{2}x}{\sin x^{2}}$.

13.70. $y=\sin^{n}x\cos nx$.

13.71. $y=\sqrt{1+\ln^{2}x}$.

13.72. $y=\sin^{2}(2x-1)$.

13.73. $y=(1+\sin^{2}x)^{4}$.

13.74. $y=\sin\sqrt{1+x^{2}}$.

13.75. $y=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$.

13.76. $y=e^{\sqrt{x+1}}$.

13.77. $y=\sqrt{1+e^x}$.　　13.78. $y=\log_2(x^3-3x^2+x)$.

13.79. $y=\dfrac{1}{\ln x}$.　　13.80. $y=\sqrt{x}+\ln x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

13.81. $y=\ln^3(x^2)$.　　13.82. $y=\ln[\ln(\ln x)]$.

13.83. $y=x^n\ln x$.　　13.84. $y=3^{\sin x}$.

13.85. $y=\log_5\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$.　　13.86. $y=\csc\sqrt{1+2x}$.

13.87. $y=2^{\frac{x}{\ln x}}$.　　13.88. $y=\ln\operatorname{tg}x$.

13.89. $y=\sin(2^x)$.　　13.90. $y=\operatorname{ctg}\sqrt[3]{1+x^2}$.

13.91. $y=\ln\dfrac{a+x}{a-x}$.　　13.92. $y=-\csc^2(e^{3x})$.

13.93. $y=\ln(1+x+\sqrt{2x+x^2})$.

13.94. $y=\sec^3(\ln x)$.　　13.95. $y=\sec^2(e^{x^2+1})$.

13.96. $y=\sin^2(\cos 3x)$.　　13.97. $y=x^2\sin\dfrac{1}{x}$.

13.98. $y=\sqrt{1+\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}$.　　13.99. $y=\sin\dfrac{1}{x}\cdot e^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}$.

13.100. $y=\operatorname{arc\,ctg}(1-x^3)$.　　13.101. $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

13.102. $y=x\cdot e^x(\sin x+\cos x)$.　13.103. $y=e^{-x}\cdot\cos 3x$.

13.104. $y=e^{-x^2}\cdot\cos(e^{-x^2})$.

13.105. $y=\operatorname{ctg}^2\dfrac{x+1}{3}+\operatorname{ctg}\dfrac{x^2+1}{4}$.

13.106. $y=\arccos\dfrac{2}{x}$.　　13.107. $y=\arccos\sqrt{1-3x}$.

13.108. $y=\operatorname{arc\,ctg}\sqrt{x^3-2x}$.　　13.109. $y=(\arcsin x)^2$.

13.110. $y=\dfrac{\arccos x}{x}$.　　13.111. $y=\dfrac{1}{\arcsin x}$.

13.112. $y=\sqrt{x}\operatorname{arc\,tg}x$.　　13.113. $y=\dfrac{x^2}{\operatorname{arc\,tg}x}$.

13.114. $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

13.115. $y=x\sin x\cdot \operatorname{arc\,tg} x$.

13.116. $y=x\cdot\arccos x-\sqrt{1-x^2}$.

13.117. $y=\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$.

13.118. $y=\left(\arccos\frac{1}{x}\right)^2 e^{-x}$.

13.119. $y=e^x\cdot\sqrt{1-e^{2x}}+\arcsin e^x$.

13.120. $y=\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{x-1}$.

13.121. $y=\sqrt{4x-x^2}+4\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2}$.

13.122. $y=e^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$.

13.123. $y=\operatorname{Ar\,sh}(x^2+1)$.

13.124. $y=\arcsin\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

13.125. $y=\operatorname{Ar\,ch}(e^{2x})$.

13.126. $y=\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)^2$.

13.127. $y=\frac{\arcsin x}{\arccos x}$.

13.128. $y=\operatorname{th}(\ln x)$.

13.129. $y=\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{th} x)$.

13.130. $y=\operatorname{th}(1-x^2)$.

13.131. $y=\operatorname{ch}(\operatorname{sh} x)$.

13.132. $y=xe^{1-\cos x}$.

13.133. $y=2x^{\sqrt{x}}$.

13.134. $y=(\ln x)^x$.

13.135. $y=x^{\frac{1}{x}}$.

13.136. $y=x^{x^x}$.

13.137. $y=(1+x^2)^{\sin x}$.

13.138. $y=(\sin x)^{\cos x}$.

13.139. $y=\lg\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{2+x}}$.

13.140. $y=\sqrt{\frac{3x-2}{(5-2x)(x-1)}}$.

13.141. $y=\sqrt{\frac{x-1}{x(x+3)}}$.

13.142. $y=x\cdot\sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}$.

13.143. $y=\sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$.

杂　题

13.144. $y=\ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$. 13.145. $y=(x^2-2x+3)e^x$.

13.146. $r=\theta\cdot\operatorname{th}\theta$. 13.147. $y=\operatorname{sh}^3 x+\operatorname{ch}^2 x$.

13.148. $y=\operatorname{sh} x\cdot e^{\operatorname{ch} x}$. 13.149. $y=\arcsin\sqrt{\sin x}$.

13.150. $y=\sin^2\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)$. 13.151. $y=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

13.152. $y=3\cos^2 x-\cos^3 x$. 13.153. $y=x\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}$.

13.154. $y=\ln\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{x}$. 13.155. $y=x\arcsin(\ln x)$.

13.156. $y=\frac{1}{\operatorname{tg}^2 2x}$. 13.157. $y=\ln\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{1+x}$.

13.158. $y=x^2\sqrt{1+\sqrt{x}}$. 13.159. $y=\sin^2 x\sin x^2$.

13.160. $y=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x$.

13.161. $y=\cos\frac{\arcsin x}{2}$.

13.162. $y=\frac{1}{18}\sin^6 3x-\frac{1}{24}\sin^8 3x$.

13.163. $y=\ln\cos\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{sh} x)$. 13.164. $y=10^{x\operatorname{tg}2x}$.

13.165. $y=e^x\cos^3 x\cdot\ln x$. 13.166. $y=\ln[\ln^2(\ln^3 x)]$.

13.167. $y=\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$. 13.168. $y=(\operatorname{tg}2x)^{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}$.

13.169. $y=\sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}$. 13.170. $y=\frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}$.

13.171. $y=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$.

13.172. $y=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$.

13.173. $y=\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$.

13.174. $y=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x^2-1}-\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$.

13.175. $y=\ln \operatorname{ch} x+\frac{1}{2\operatorname{ch}^2 x}$.

13.176. $y=(\sin x)^{\cos x}+(\cos x)^{\sin x}$.

13.177. $y=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$.

13.178. $y=\ln\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$.

13.179. $y=x+x^x+x^{x^x}$.

13.180. $y=\frac{(2x+3)^4\cdot\sqrt{x-6}}{\sqrt[3]{x+1}}$.

13.181. $y=\cos^2\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$.

13.182. $y=\frac{1}{2a}\left(\ln\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a+x}-\frac{a}{a+x}\right)$.

13.183. $y=\frac{-\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}\ln \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

13.184. $y=\sqrt{4x+\sin^4 x}$.

13.185. $y=\sqrt[3]{1+\cos 6x}$.

13.186. $y=\sin^2(x^3)$.

13.187. $y=\sqrt{1+\cos^2(x^2)}$.

13.188. $y=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$.

13.189. $y=\ln\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$.

13.190. $y=\ln\frac{1-e^x}{e^x}$.

13.191. $y=\frac{1}{\cos(x-\cos x)}$.

13.192. $y=x-\ln(2e^x+1+\sqrt{e^{2x}+4e^x+1})$.

13.193. $y=\ln \operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{ctg} x\cdot\ln(1+\sin x)-x$.

13.194. $y=x\cdot\sqrt{(x^2+a^2)^3}$.

13.195. $y=3x^3\cdot\arcsin x+(x^2+2)\sqrt{1-x^2}$.

13.196. $y=e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$.

在题 13.197—13.205 中，求各隐函数的导数：

13.197. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

13.198. $x^3+y^3-3a\,xy=0$.

13.199. $y^3-3y+2ax=0$.

13.200. $y^2-2xy+b^2=0$.

13.201. $x^y=y^x$.

13.202. $y^2\cos x=a^2\sin 3x$.

13.203. $\cos(xy)=x$.

13.204. $y=1+xe^y$.

13.205. $y\sin x-\cos(x-y)=0$.

导数的应用

13.206. 在抛物线 $y=x^2$ 上取横坐标 $x_1=1$ 及 $x_2=3$ 的二点，过这二点引割线，抛物线上哪一点的切线平行于所引的割线？

13.207. 在曲线 $y=x^3+x-2$ 上哪一点的切线与直线 $y=4x-1$ 平行？

13.208. 在曲线 $y=x^2(x-2)^2$ 上哪一点的切线与横轴平行？

13.209. 试写出曲线 $y=x-\frac{1}{x}$ 与横轴交点处的切线方程.

13.210. 试写出垂直于直线 $2x-6y+1=0$ 且与曲线 $y=x^3+3x^2-5$ 相切的直线方程.

13.211. 试写出曲线 $y=\frac{x^2-3x+6}{x^2}$ 在横坐标 $x=3$ 处的法线方程.

13.212. 试写出曲线 $y=-\sqrt{x}+2$ 与第 I 象限分角线的交点处的法线方程.

13.213. 试写出与曲线 $y=x^4-3$ 相切于点(1, −2)的切线方程.

13.214. 在曲线 $y=x-e^x$ 上求一点，使这点处的切线平行于 x 轴.

13.215. 求曲线 $y=\sin x$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处的切线方程和法线方程.

13.216. 求曲线 $y=x\ln x$ 的平行于直线 $2x-2y+3=0$ 的法线方程.

13.217. 抛物线 $y=x^2$ 上哪一点的切线和直线 $3x-y+1=0$ 构成角 $45°$?

13.218. 作曲线 $y=e^{2x}+x^2$ 上横坐标 $x=0$ 处的法线,试求从原点到这法线的距离.

13.219. 求抛物线 $y=x^2$ 与直线 $3x-y-2=0$ 的交角.

13.220. 求双曲线 $y=\frac{1}{x}$ 与抛物线 $y=\sqrt{x}$ 的交角.

13.221. 求二曲线的交角:

(a) $x^2+y^2=8$ 与 $y^2=2x$;

(b) $x^2-y^2=5$ 与 $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1$; (c) $x^2+y^2=8ax$ 与 $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$.

13.222*. 试证抛物线 $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$ 上任一点的切线所截二坐标轴的截距之和等于 a.

13.223*. 试证星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 上任一点的切线介于二坐标轴间的一段长度等于常数 a.

13.224*. 在直线 $x-y+1=0$ 与抛物线 $y=x^2-4x+5$ 的交点上引抛物线的法线. 试求由二法线及联结二交点的弦所成的三角形的面积.

13.225*. 试求经过原点且与曲线 $y=\frac{x+9}{x+5}$ 相切的切线方程.

[提示: 设所求的切线方程为 $y=kx$, 设法求出切点的坐标,然后代入 $y=kx$ 求出 k.]

13.226*. 证明双曲线 $xy=a^2$ 上任一点的切线与二坐标轴组成的三角形的面积等于常数.

13.227. 一物体按规律 $s=1+2t-t^2$ (s 的单位为米, t 为秒)作直

线运动，求它在 $t=2$ 时的速度.

13.228. 一点沿直线运动，由始点起经过 t 秒后的距离 s（s 的单位为米）为

$$s=\frac{1}{4}t^4-4t^3+16t^2.$$

(a) 这点何时在始点？　(b) 何时它的速度为 0？

13.229. 将一物体垂直抛上，设其运动规律为 $s=9.6t-1.6t^2$（s 的单位为米），试求物体之速度：

(a) 在一秒钟末了时；　(b) 在 5 秒钟末了时.

13.230. 一球在斜面上向上而滚，在 t 秒之终与开始的距离为 $s=3t-t^2$（s 的单位为米），问其初速为若干？何时开始向下滚？

13.231. 一气球从离开观察员 500 米处离地铅直上升，其速率为 140 米/分，当此气球之高度为 500 米时，此观察员之视线的斜角增加率为多少？

13.232. 旗竿高 100 米，一人以每秒 3 米的速度向竿前进，当此人距竿脚 50 米时，其与竿顶之距离之改变率为多少？

13.233. 有一个长度为 5 米的梯子贴靠在铅直的墙上，假设其下端沿地板以 3 米/秒的速率离开墙脚而滑动，则

(a) 当其下端离开墙脚 1.4 米时，梯子的上端下滑之速率为多少？

(b) 何时梯子的上下端能以相同的速率移动？

(c) 何时其上端下滑之速率为 4 米/秒？

13.234. 一人走过一桥之速率为 4 公里/小时，同时一船在此人底下以 8 公里/小时之速率划过，此桥比船高 200 米，问 3 分钟后人与船相离之速率为多少？

13.235. 在中午十二点正甲船以 6 公里/小时之速率向东行，乙船在甲船之北 16 公里，以 8 公里/小时之速率向南行，在下午一点正两船相离之速率为多少？

13.236. 落在平静水面上之石头,产生同心波纹,若最外一圈波半径增大率总是6米/秒.问在2秒钟末被扰动水面面积之增大率为多少?

13.237. 求等边三角形当高为8厘米时,其面积对高的改变率.

13.238. 一截面为倒置等边三角形的水槽,长20米,若以每秒3立方米的速度将水注入.求在水面高为4米时水面上升的速度.

13.239. 注水入深8米上顶的直径为8米之锥形漏斗中,其速度为每分钟4立方米,当水深为5米时,其表面上升的速度为多少?

13.240. 一气体储存器装有1000立方厘米的气体,其压力每平方厘米5公斤,若压力以每小时每平方厘米0.05公斤之速率减少.试求其体积的增加率.[提示: $PV=C$,其中C为常数,P为压力,V为体积.]

13.241. 溶液自深18厘米顶直径12厘米的正圆锥形漏斗中漏入一直径为10厘米之圆柱形筒中.开始时漏斗中盛满了水.已知当溶液在漏斗中之深为12厘米时,其水平面下落之速率为1厘米/分.问此时圆柱形筒中之水平面上升之速率为多少?

微分及其应用

13.242. 已知$y=x^3-x$,在$x=2$时计算当Δx分别等于1, 0.1, 0.01时的Δy及dy.

13.243. 函数$y=f(x)$在某点x处增量$\Delta x=0.2$,对应的函数增量的主部等于0.8,试求在点x处的导数.

13.244. 已给函数$f(x)=x^2$,在某点处自变量的增量$\Delta x=0.2$,对应的函数增量的主部$df(x)=-0.8$.试求自变量的始值.

13.245. 求下列各函数的微分:

(a) $y=\frac{1}{0.5x^2}$; (b) $y=\frac{\sqrt[3]{x}}{0.2}$;

(c) $y=\frac{m+n}{\sqrt{x}}$; (d) $y=\frac{p}{q^x}$;

(e) $y=(x^2+4x+1)(x^2-\sqrt{x})$;

(f) $y=(1+x-x^2)^3$;　　(g) $y=\operatorname{tg}^2 x$;

(h) $y=5^{\ln \operatorname{tg} x}$;　　(i) $y=\dfrac{\cos x}{1-x^2}$;

(j) $y=2^{-\frac{1}{\cos x}}$;　　(k) $y=3^{-\frac{1}{x^2}}+3x^3-4\sqrt{x}$;

(l) $y=\cos(x^2)$;　　(m) $y=e^x\sin^2 x$;

(n) $y=x^{5x}$;　　(o) $y=\operatorname{ch} 3x$;

(p) $y=\operatorname{arc\,tg}(e^x)$;　　(q) $y=\dfrac{x^3-1}{x^3+1}$.

13.246. 计算下列各函数的微分值:

(a) $y=\dfrac{1}{(\operatorname{tg} x+1)^2}$ 当自变量 x 由 $\dfrac{\pi}{6}$ 变到 $\dfrac{61\pi}{360}$ 时;

(b) $y=\cos^2\varphi$ 当自变量 φ 由 60° 变到 $60^\circ 30'$ 时.

13.247. 试求当 x 由 45° 变到 $45^\circ 10'$ 时函数 $y=\operatorname{tg} x$ 的增量的近似值.

13.248. 试计算 $\operatorname{arc\,tg} 1.02$, $\operatorname{arc\,tg} 9.7$ 的近似值.

13.249. 试计算 $\sqrt{\dfrac{(2.037)^2-1}{(2.037)^2+1}}$ 的近似值.

13.250. 试计算 $\arcsin 0.4983$ 的近似值.

13.251. 试计算 $e^{1.01}$ 的近似值.

13.252. 试计算 $\sqrt[3]{1.02}$ 的近似值.

13.253. 试计算 $\log_{10} 11$ 的近似值.

13.254. 试计算 $\cos 151^\circ$ 的近似值.

13.255. 试计算 $\sin 29^\circ$ 的近似值.

13.256. 设有 $f(x)=e^{0.1x(1-x)}$, 试计算 $f(1.05)$的近似值.

13.257. 试作出两个图形，它们分别表示函数的微分大于增量及函数的微分小于增量的两种不同情形.

13.258. 当$|x|$不大时，证明:

(a) $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{x}{2}$; (b) $\operatorname{tg} x\approx x$.

13.259. 设 $A>0$，且 $|B|$ 与 A^n 相比是很小的，证明：

$$\sqrt[n]{A^n+B}\approx A+\frac{B}{nA^{n-1}}.$$

13.260. 试利用 $\sqrt[n]{A^n+B}\approx A+\frac{B}{nA^{n-1}}$ 计算 $\sqrt[10]{1000}$ 的近似值.

13.261. 试求函数 $y=x^2-x$ 当 $x=10$，且 $\Delta x=0.1$ 时的增量及微分. 计算用微分代替增量时的绝对误差和相对误差.

13.262. 设 $u=\frac{x}{10-x}$ 若度量 x 的值为 0.2 ± 0.001，求计算 u 所引起的相对误差.

13.263. 有一圆柱，高为 25 厘米，半径为 20 ± 0.05 厘米，试求这圆柱的体积的相对误差及圆柱侧面积的相对误差.

13.264. 计算球的体积精确至 1%，若根据所得体积的值推算球的半径 R，问相对误差为多少？

13.265. 正方形的边长为 2.4 ± 0.05 米，求正方形的面积并估计绝对误差与相对误差.

在题 13.266—13.269 中，计算各复合函数的微分：

13.266. $y=\sqrt[3]{x^2+5x}$，$x=t^3+2t+1$.

13.267. $y=3^{-\frac{1}{x}}$，$x=\frac{t^2-1}{4}$.

13.268. $y=e^z$，$z=\frac{1}{2}\ln t$，$t=2u^2-3u+1$.

13.269. $y=\ln\operatorname{tg}\frac{u}{2}$，$u=\arcsin v$，$v=\cos 2s$.

高阶导数

13.270. $y=1-x^2-x^4$，$y''=?$ $y'''=?$

13.271. $f(x)=(x+10)^6$, $f'''(2)=?$

13.272. $y=x\cos x$, $y''=?$ $y'''=?$

13.273. $y=2^x$, $y''=?$ $y'''=?$

13.274. $f(x)=e^{2x-1}$, $f''(0)=?$

13.275. $f(x)=\operatorname{arc\,tg} x$, $f''(1)=?$

13.276. $y=x^3\ln x$, $y^{(4)}=?$

13.277. $\rho=a\sin 2\varphi$, $\frac{d^4\rho}{d\varphi^4}=?$

13.278. $x^2+y^2=r^2$, $y'''=?$

在题 13.279—13.296 中，求各函数的二阶导数：

13.279. $y=xe^{x^2}$.

13.280. $y=\frac{1}{x^3+1}$.

13.281. $y=\sqrt{a^2-x^2}$.

13.282. $y=\frac{1}{a+\sqrt{x}}$.

13.283. $y=(1+x^2)\operatorname{arc\,tg} x$.

13.284. $y=e^{\sqrt{x}}$.

13.285. $y=\operatorname{tg} x$.

13.286. $y=\cos^2 x\ln x$.

13.287. $y=\frac{e^x}{x}$.

13.288. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

13.289. $y=\sin x\sin 3x\sin 2x$.

13.290. $y=\ln\sin x$.

13.291. $y=\arcsin(a\sin x)$.

13.292. $y=x^x$.

13.293. $y=\sin(x+y)$.

13.294. $xy=e^{x+y}$.

13.295. $s=1+te^s$.

13.296. $e^y+xy=e$, $y''(0)=?$

13.297. 已知简谐运动的距离 s 与时间 t 的关系为 $s=a\sin\omega t$ (其中 a, ω 是常数). 试求加速度与时间 t 的关系，并验证

$$\frac{d^2s}{dt^2}+\omega^2 s=0.$$

13.298. 设 $y=f[\varphi(x)]$, 其中 f 与 φ 皆为三次可微分函数，试求 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 及 $\frac{d^3y}{dx^3}$.

在题 13.299—13.303 中，求各函数的 n 阶导数的一般表达式：

13.299. $y=\frac{1-x}{1+x}$. 13.300. $y=x\ln x$.

13.301. $y=\sin^2 x$. 13.302. $y=xe^x$.

13.303. $y=\cos x$.

13.304. 验证函数 $y=a\cos\ln x+b\sin\ln x$ 满足关系式 $x^2y''+$ $+xy'+y=0$.

13.305. 验证函数 $y=e^x\sin x$ 满足关系式 $y''-2y'+2y=0$.

13.306. 验证函数 $y=\frac{x-3}{x+4}$ 满足关系式 $2y'^2=(y-1)y''$.

13.307. 验证函数 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 满足关系式 $y^3y''+1=0$.

13.308. 验证函数 $y=e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}$ 满足关系式

$$xy''+\frac{1}{2}y'-\frac{1}{4}y=0.$$

13.309. 验证函数 $y=\cos e^x+\sin e^x$ 满足关系式 $y''-y'+ye^{2x}=0$.

13.310*. 试证:

(a) $(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n)}=(-1)^n\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}$;

(b) $(\sin^4 x+\cos^4 x)^{(n)}=4^{n-1}\cdot\cos\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right)$.

[提示: (a) 用数学归纳法证明本题。在证明过程中，注意有 $(x^n e^{\frac{1}{x}})^{(n+1)}=$ $=[(x^n e^{\frac{1}{x}})']^{(n)}$ 及 $(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n)}=\left[(-1)^{n-1}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^n}\right]$. (b) $\sin^4 x+\cos^4 x=1-\frac{\sin^2 2x}{2}$, 令 $y=1-\frac{\sin^2 2x}{2}$ 则有

$$y'=-2\sin 2x\cos 2x=-\sin 4x=\cos\left(4x+\frac{\pi}{2}\right).]$$

参变量方程的导数

在题 13.311—13.317 各参变量方程中求 y 关于 x 的导数:

13.311. $x=a\cos\varphi,\ \ y=b\sin\varphi.\ \ \dfrac{dy}{dx}=?\ \ \dfrac{d^2y}{dx^2}=?\ \ \dfrac{d^3y}{dx^3}=?$

13.312. $x=a\cos^3\varphi,\ \ y=a\sin^3\varphi.\ \ \dfrac{dy}{dx}=?\ \ \dfrac{d^2y}{dx^2}=?\ \ \dfrac{d^3y}{dx^3}=?$

13.313. $x=a(\varphi-\sin\varphi),\ y=a(1-\cos\varphi).\ \dfrac{dy}{dx}=?\ \ \dfrac{d^2y}{dx^2}=?$

13.314. $x=1-t^2,\ \ y=t-t^3.\ \ \dfrac{dy}{dx}=?\ \ \dfrac{d^2y}{dx^2}=?\ \ \dfrac{d^3y}{dx^3}=?$

13.315. $x=\ln(1+t^2),\ \ \ y=t-\operatorname{arc\,tg} t.\ \ \dfrac{dy}{dx}=?\ \ \dfrac{d^2y}{dx^2}=?\ \ \dfrac{d^3y}{dx^3}=?$

13.316. $x=at^2,\ \ y=bt^3.\ \ \dfrac{d^2x}{dy^2}=?\ \ \dfrac{d^3x}{dy^3}=?$

13.317. $x=at\cos t,\ \ \ y=at\sin t.\ \ \dfrac{dy}{dx}=?\ \ \dfrac{d^2y}{dx^2}=?$

13.318. 设 $x=\sqrt{1+t},\ y=\sqrt{1-t}$. 求证: $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$;
$\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{2}{y^3}$.

13.319. 验证 $y=e^t\cos t,\ \ x=e^t\sin t$ 所确定的函数 $y=f(x)$ 满足关系式 $y''(x+y)^2=2(xy'-y)$.

13.320. $x=a\cos^2 t,\ \ \ y=a\sin^2 t.\ \ \dfrac{d^3y}{dx^3}=?$

在题 13.321—13.323 中，写出各曲线在已给点处的切线方程及法线方程:

13.321. $x=2e^t,\ \ y=e^{-t}$ 在 $t=0$ 处.

13.322. $x=\sin t,\ \ y=\cos 2t$ 在 $t=\dfrac{\pi}{6}$ 处.

13.323. $x=\dfrac{3at}{1+t^2},\ \ y=\dfrac{3at^2}{1+t^2}$ 在 $t=2$ 处.

13.324. 一物体以初速 v_0 和水平方向成 α 角抛出，它的轨迹若以

时间 t 为参数来表示时，其方程为 $\begin{cases} x=v_0t\cos\alpha, \\ y=v_0t\sin\alpha-\dfrac{1}{2}gt^2. \end{cases}$

求 $t=t_0$ 时 (a)该物体的水平方向的分速度和铅直方向的分速度；(b)该物体的速度的大小和方向；(c)水平方向加速度和铅直方向加速度.

第十四章 中值定理，导数在函数研究上的应用

中值定理

14.1. 验证罗尔定理对函数 $y=x^3+4x^2-7x-10$ 在区间 $[-1,2]$ 上的正确性.

14.2. 验证罗尔定理对函数 $y=\ln\sin x$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上的正确性.

14.3. 验证拉格朗日定理对于函数 $y=\ln x$ 在区间 $[1,e]$ 上的正确性.

14.4. 验证拉格朗日定理对于函数 $f(x)=\operatorname{arc\,tg} x$ 在区间 $[0,1]$ 上的正确性.

14.5. 对于函数 $f(x)=4x^3-5x^2+x-2$ 在区间$[0,1]$上验证拉格朗日定理的正确性.

14.6. 对函数 $f(x)=x^3$ 及 $\varphi(x)=x^2+1$ 在区间 $[1,2]$ 上验证柯西中值定理的正确性.

14.7. 对函数 $f(x)=\sin x$ 及 $\varphi(x)=x+\cos x$, 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上验证柯西中值定理的正确性.

14.8. 试证明对函数 $y=px^2+qx+r$ 应用拉格朗日中值定理时所求得的点 ξ 总是位于区间的正中间.

14.9. 证明在$[-1, +1]$上 $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$ 恒能成立.

[提示: 因在 $(-1, 1)$ 内, $(\arcsin x+\arccos x)'=0$, 故在 $(-1, 1)$ 内, $\arcsin x+\arccos x=C$, 然后再决定常数 C.]

14.10. 不用求出函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 的导数,说明方程 $f'(x)=0$ 有几个实根,并指出它们所在的区间.

14.11. 应用拉格朗日定理证明,当 $a>b>0$ 时,不等式 $nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$ 在 $n>1$ 时成立.

14.12. 若 $0<b\leqslant a$, 试证

$$\frac{a-b}{a}\leqslant\ln\frac{a}{b}\leqslant\frac{a-b}{b}.$$

14.13. 若 $x>0$, 试证

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$$

14.14. 如果 $0<\beta\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$, 试证

$$\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\beta}\leqslant\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta\leqslant\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\alpha}.$$

14.15. 证明下列不等式:

(a) $|\sin x-\sin y|\leqslant|x-y|$;

(b) $|\operatorname{arc\,tg} a-\operatorname{arc\,tg} b|\leqslant|a-b|$;

(c) 当 $x>1$ 时, $e^x>e\cdot x$. [提示: 考察 $f(x)=\ln x$, 在$[1, x]$上应用拉格朗日定理便可得证.]

罗彼塔法则

在题 14.16—14.56 中求各极限时,应先判定函数是属于何种不定式:

14.16. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$.

14.17. $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$.

14.18. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^n-1}$.

14.19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

14.20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$.

14.21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-x}{x-\sin x}$.

14.22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$.

14.23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x}$.

14.24. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x}$.

14.25. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{tg} x-1}{\sin 4x}$.

14.26. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$.

14.27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}$.

14.28*. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}$.

14.29. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

14.30. $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{e^y+\sin y-1}{\ln(1+y)}$.

14.31. $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln\operatorname{tg} 7x}{\ln\operatorname{tg} 2x}$.

14.32. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\operatorname{arc\,ctg} x}$.

14.33. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}$.

14.34. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

14.35. $\lim\limits_{x\to \infty}\left[x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\right]$.

14.36. $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg} 2x$.

14.37. $\lim\limits_{x\to \infty} x\sin\dfrac{k}{x}$.

14.38. $\lim\limits_{x\to 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$.

14.39. $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln\sin 3x}{\ln\sin x}$.

14.40. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right]$.

14.41. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right]$.

14.42. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right]$.

14.43. $\lim\limits_{x\to +0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

14.44. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$.

14.45. $\lim\limits_{x\to +0}(\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

14.46. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}-0}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$.

14.47. $\lim\limits_{\varphi\to 0}\left(\dfrac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^{\frac{1}{\varphi^2}}$.

14.48. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$.

14.49. $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\cos\frac{x}{m}\right)^m$.

14.50. $\lim\limits_{x\to+0} x^{\sin x}$.

14.51. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$.

14.52. $\lim\limits_{x\to+0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$.

14.53. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$.

14.54. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x\cos x}$.

14.55. $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln x}{\ln\sin x}$.

14.56. $\lim\limits_{\varphi\to 1}(a^2-\varphi^2)\operatorname{tg}\frac{\pi\varphi}{2a}$.

14.57. 验证极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$ 存在，但不能用罗彼塔法则计算.

14.58. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$. [提示: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$.]

泰勒公式

14.59. 按$(x-4)$的乘幂展开多项式 $x^4-5x^3+x^2-3x+4$.

14.60. 按$(x+1)$的乘幂展开多项式 x^3+3x^2-2x+4.

14.61. 应用麦克劳林公式，按 x 乘幂展开函数

$$f(x)=(x^2-3x+1)^3.$$

14.62. 按$(x-1)$的乘幂展开函数 $f(x)=x^5$.

14.63. 将 $P(x)=x^4-2x^3+1$ 展开为$(x-1)$的多项式.

14.64. 当 $x_0=-1$ 时，求函数 $y=\frac{1}{x}$ 的 n 阶泰勒展开式.

14.65. 求函数 $y=xe^x$ 的 n 阶麦克劳林展开式.

14.66. 求函数 $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ 的 $2n$ 阶麦克劳林展开式.

14.67. 求函数 $y=\sin^2 x$ 的 $2n$ 阶麦克劳林展开式.

14.68. 当 $x_0=2$ 时，求函数 $y=\frac{x}{x-1}$ 的三阶泰勒展开式.

14.69. 求函数 $y=\operatorname{tg} x$ 的二阶麦克劳林展开式.

14.70. 当 $x_0=0$ 时，求函数 $y=\arcsin x$ 的三阶泰勒展开式.

14.71. 写出函数 $f(x)=x^2\ln x$ 在点 $x=1$ 处的 n 阶泰勒展开式 $(n>3)$.

14.72. 当 $x_0=4$ 时，求函数 $y=\sqrt{x}$ 的三阶泰勒展开式.

14.73. 证明 $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{x^3}{16(1+\theta x)^{\frac{5}{2}}}$，其中 $0<\theta<$ <1.

14.74. 当 $x_0=0$ 时，求函数 $y=e^{\sin x}$ 的二阶泰勒展开式.

14.75. 验证当 $0<x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，按公式 $e^x\approx1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$ 计算 e^x 的近似值时，所产生的误差小于 0.01. 并求 $\sqrt{e}$ 的近似值，使误差小于 0.01.

14.76. 设 $f(x)=x^{10}-3x^6+x^2+2$，在 $x_0=1$ 处应用泰勒展开式的前三项来计算 $f(1.03)$ 的近似值.

14.77. 设 $f(x)=x^8-2x^7+5x^6-x+3$，在 $x_0=2$ 处应用泰勒展开式的前三项来计算 $f(2.02)$ 及 $f(1.97)$ 的近似值.

14.78. 设 $f(x)=x^{80}-x^{40}+x^{20}$. 试求按 $(x-1)$ 的乘幂展开 $f(x)$ 所得展开式的前三项，并用来计算 $f(1.005)$ 的近似值.

14.79. 写出函数 $y=\ln(1-x)$ 在点 $x=\frac{1}{2}$ 处的 n 阶泰勒展开式.

14.80. 应用三阶泰勒公式求下列各数的近似值，并估计误差：

(a) $\sqrt[3]{30}$;　　　　(b) $\sin 18°$.

函数的单调性

14.81. 证明函数 $y=2x^3+3x^2-12x+1$ 在区间 $(-2,1)$ 上单调减小.

14.82. 证明函数 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 在区间 $(0,1)$ 上单调增大，而在区间 $(1,2)$ 上单调减小.

14.83. 证明函数 $y=x^3+x$ 到处都是增大的.

14.84. 证明函数 $y=\operatorname{arc\,tg} x-x$ 到处都是减小的.

14.85. 证明函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x}$ 在不包含点 $x=0$ 的任何区间内都是增大的.

14.86. 判定函数 $y=x^3-3x^2-9x+14$ 的单调区间.

14.87. 判定函数 $y=x^4-2x^2-5$ 的单调区间.

在题 14.88—14.99 中，求各函数的单调区间：

14.88. $y=(x-2)^5(2x+1)^4$.

14.89. $y=\sqrt[3]{(2x-a)(a-x)^2}\quad(a>0)$.

14.90. $y=\dfrac{10}{4x^3-9x^2+6x}$.　　14.91. $y=x-e^x$.

14.92. $y=2x^2-\ln x$.

14.93. $y=x-2\sin x\quad(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$.

14.94*. $y=2\sin x+\cos 2x\quad(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$.

14.95. $y=x+\cos x$.　　14.96. $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

14.97. $y=x\sqrt{ax-x^2}\quad(a>0)$.

14.98. $y=x-\ln(1+x)$.　　14.99. $y=(x-1)(x+1)^3$.

在题 14.100—14.105 中，证明各不等式的正确性：

14.100. $2\sqrt{x}>3-\dfrac{1}{x}\quad(x>1)$.

14.101. $x>\ln(1+x)\quad(x>0)$.

14.102. $\ln x>\dfrac{2(x-1)}{x+1}\quad(x>1)$.

14.103. $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}\quad(x>0)$.

14.104. $\ln(1+x)\geqslant\dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x}\quad(x\geqslant 0)$.

14.105. $\operatorname{arc\,tg} x\leqslant x\quad(x\geqslant 0)$, $\operatorname{arc\,tg} x\geqslant x\quad(x\leqslant 0)$.

14.106. 方程 $\ln x=ax$（其中 $a>0$）有几个实根？[提示：先求出

$f(x)=\ln x-ax$ 的唯一极大值为$\left(\ln\frac{1}{a}\right)-1$, 然后由$\left(\ln\frac{1}{a}\right)-1>0$, $\left(\ln\frac{1}{a}\right)-1=0$ 及$\left(\ln\frac{1}{a}\right)-1<0$ 三种情况分别决定 $\ln x=ax$ 有几个实根.]

14.107. 试证方程 $\sin x=x$ 只有一个实根.

14.108. 试证方程 $\operatorname{tg} x=x$ 在各个区间 $\left(n\pi,\ (n+\frac{1}{2})\pi\right)$ 内只有唯一的实根,其中 $n=1, 2, 3\cdots$.

函数的极值

在题 14.109—14.145 中,求各函数的极值:

14.109. $y=2x^3-3x^2$.

14.110. $y=2x^3-6x^2-18x+7$.

14.111. $y=\frac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$.

14.112. $y=\frac{x^3+x}{x^4-x^2+1}$.

14.113. $y=\frac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$.

14.114. $y=\sqrt[3]{(x^2-a^2)^2}$.

14.115. $y=x-\ln(1+x)$.

14.116. $y=x-\ln(1+x^2)$.

14.117. $y=(x-5)^2\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2}$.

14.118. $y=x^2\ln x$.

14.119*. $y=e^x\cos x$.

14.120. $y=x+\frac{a^2}{x}\quad(a>0)$.

14.121. $y=x+\sqrt{1-x}$.

14.122. $y=x^2e^{-x}$.

14.123. $y=\frac{x}{\ln x}$.

14.124. $y=x^{\frac{1}{x}}$.

14.125. $y=(x-1)^3(2x+3)^2$.

14.126. $y=\sqrt[3]{(2x-x^2)^2}$.

14.127. $y=x-\sin x$.

14.128. $y=\sin x$.

14.129. $y=2x-\ln(4x)^2$.

14.130. $y=x^2e^{-x^2}$.

14.131. $y=2x^3+3x^2-12x+1$.

14.132. $y=x^2-2x+3$.

14.133. $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$.

14.134. $y=x^3-9x^2+15x+3$.

14.135. $y=-x^4+2x^2$.

14.136. $y=x^4-8x^2+2$.

14.137. $y=3x^5-125x^3+2160x$.

14.138. $y=2-(x-1)^{\frac{2}{3}}$. 14.139. $y=3-2(x+1)^{\frac{1}{3}}$.

14.140. $y=\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$. 14.141. $y=\frac{(x-2)(3-x)}{x^2}$.

14.142. $y=2e^x+e^{-x}$.

14.143. $y=\cos x+\sin x \quad \left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

14.144. $y=x+\operatorname{tg} x$. 14.145. $y=e^x\sin x$.

14.146. 试证明如果函数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 满足条件 $b^2-3ac<0$ (其中 $a>0$)，那么这个函数没有极值.

14.147. 试问 a 为何值时，函数 $f(x)=a\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处具有极值？它是极大还是极小？并求此极值.

在题 14.148—14.161 中，求各函数在所给区间上的最大值和最小值：

14.148. $y=x^4-2x^2+5$, $[-2, 2]$.

14.149. $y=x+2\sqrt{x}$, $[0, 4]$.

14.150. $y=x^5-5x^4+5x^3+1$, $[-1, 2]$.

14.151. $y=x^3-3x^2+6x-2$, $[-1, 1]$.

14.152. $y=\sqrt{100-x^2} \quad (-6\leqslant x\leqslant 8)$.

14.153. $y=\frac{1-x+x^2}{1+x-x^2} \quad (0\leqslant x\leqslant 1)$.

14.154. $y=\frac{x-1}{x+1} \quad (0\leqslant x\leqslant 4)$.

14.155. $y=\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{1-x} \quad (0<x<1), (a>0, b>0)$.

14.156. $y=\sin 2x-x \quad \left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

14.157. $y=2\operatorname{tg} x-\operatorname{tg}^2 x \quad \left(0\leqslant x<\frac{\pi}{2}\right)$.

14.158. $y=x^x \quad (0.1\leqslant x<\infty)$.

14.159. $y=\sqrt[3]{(x^2-2x)^2} \quad (0\leqslant x\leqslant 3)$.

14.160. $y=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1-x}{1+x} \quad (0\leqslant x\leqslant 1)$.

14.161. $y=-3x^4+6x^2-1 \quad (-2\leqslant x\leqslant 2)$.

最大值和最小值应用杂题

14.162. 将 8 分为两数之和，使其立方之和为最小.

14.163. 要作一个底面为长方形的带盖的箱子，其体积为 72 厘米^3，其底边成 1:2 的关系. 问各边的长怎样，才能使表面积为最小？

14.164. 有一面积为 8×5 厘米^{2}的长方形的厚纸，在各角剪去相同的小正方形，把四边折起成一个无盖盒子. 要使纸盒的容积为最大，问剪去的小正方形的边长应为多少？

14.165. 设有底为等边三角形的直柱体，体积为 V，要使其总面积为最小，问底边的长应为多少？

14.166. 一个无盖的圆柱形大桶，已规定体积为 V，要使其表面积为最小，问圆柱的底半径及高应是多少？

14.167. 要做一个圆锥形的漏斗，其母线长 20 厘米，要使其体积为最大，问其高应为多少？

14.168. 试求内接于半径为 R 的球的体积最大的圆柱体的高.

14.169*. 试求内接于半径为 R 的球的体积最大的圆锥体的高.

14.170. 三个点 A, B 和 C 不在同一直线上，$\angle ABC=60°$. 汽车以 80 公里/小时的速度由 A 向 B 进行，同时火车以 50 公里/小时的速度由 B 向 C 进行. 如 $AB=200$ 公里，问运动开始几小时后汽车与火车的距离为最小？

14.171. 试求内接于半径为 R 的半圆的周长最大的矩形的边长.

14.172. 要使内接于一个半径为 R 的球内的圆锥体的侧面积为最

大，问圆锥体的高应为多少？

14.173. 平面上通过一个已知点 $P(1, 4)$ 引一条直线，要使它在两个坐标轴上的截距都为正，且它们的和为最小，求这直线的方程.

14.174. 试求内接于椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 而面积最大的矩形的各边之长.

14.175. 从圆上截下中心角为 α 的扇形卷成一圆锥形. 问当 α 是何值时，所得圆锥体的体积为最大？

14.176. 求作一具有体积 V 而全部表面积为最小的圆柱体.

14.177. 某窗之形状系由半圆置于矩形上面所形成的. 若此窗框的周长为一定，试确定半圆的半径和矩形的高，使所通过的光线最为充足.

14.178. 在一页书上所印的文字要占 S 平方公分，上下页边空白处要留 a 厘米宽，左右要留 b 厘米宽. 若只注意节约纸张，则以如何尺寸的篇幅最为有利？

14.179. 一屋撑，其形状为 Y，总高为 $\frac{16}{3}$ 米，顶端阔为 4 米. 问干长与臂长各须若干，才能使其下干的长及两臂之长的和为最小？

14.180. 在一半径为 R 的圆形广场中心挂一灯，问要挂多么高，才能使广场周围的路上照得最亮？（灯光的亮度与光线投射角的余弦成正比，与光源距离的平方成反比，而投射角是经过灯所作垂直于地面的直线与光线所夹的角.）

14.181. 一张 1.4 米高的图片挂在墙上，它的底边高于观察者的眼 1.8 米. 问观察者应站在距离墙多么远处看图，才能最清晰（即视角最大. 而视角是观察图片的上底的视线与观察图片的下底的视线所夹的角）.

14.182. 轮船甲位于轮船乙以东 75 浬处，以每小时 12 浬的速率向西驶行，而轮船乙则以每小时 6 浬的速率向北行驶. 问经过多少时间，两船相距最近？

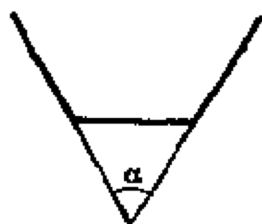
14.183. 有甲乙二城，甲城位于一直线形的河岸，乙城离岸40公里，乙城到岸的垂足与甲城相距50公里．两城在此河边合设一水厂取水，从水厂到甲城和乙城之水管费用分别为每公里500元和700元．问此水厂应设在河边何处，才能使水管费用为最省？

14.184. 从南到北的铁路干线经过甲城与乙城，两城之间的距离为15公里，某工厂位于乙城正西2公里处．现要从甲城把货物运往工厂，在铁路线上的运费每公里3元，而沿公路上的运费每公里5元．为了使货物从甲城运到工厂的运费最省，应该从铁路干线上的何处起修筑通到工厂的公路较为恰当？

14.185. 用某种仪器测量某零件的长度n次，所得的数据(长度)为$x_1, x_2, \cdots, x_n$．验证：应由表达式$x=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$算得的长度$x$才能较好地表达该零件的长度，亦即使$x$与$n$个数据的差的平方和$(x-x_1)^2+(x-x_2)^2+\cdots+(x-x_n)^2$为最小．

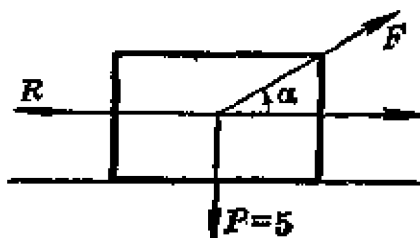
14.186. 两动点以速度v_1和v_2在两坐标轴上运动，速度方向与坐标轴正向相反．开始时它们的位置分别是$(a, 0)$和$(0, b)$，求两点间最短的距离．

14.187. 一渔艇停泊在距岸9公里处．今需派人送信给距渔艇$3\sqrt{34}$公里处的海岸渔站．如果送信人步行每小时5公里，船速每小时4公里，问应在何处登岸再走才可使抵达渔站的时间为最省？

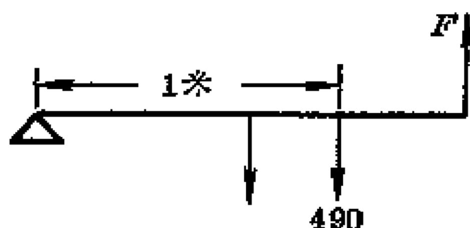


14.188. 侧壁倾斜的水槽用三块等宽的木板钉成．问侧壁之间的夹角α(如图)等于何值时，斜槽有最大的容积？

14.189. 设有重量为$P=5$公斤的物体，置于水平面上，受力F的作用而开始移动(如图)．设摩擦系数$\mu=0.25$．问力F与水平线的交角α为多少时，才可使力F的大小为最小．



14.190. 有一杠杆的支点在它的一端，而在距支点 1 米处挂一重为 490 公斤的物体，同时加力于杆的他端使杠杆保持水平．若杠杆本身每米长的重量为 5 公斤，求最省力的杆长(如图)．



14.191. 一火车锅炉每小时消耗煤的费用与火车行驶的速度之立方成正比，已知当速度为每小时 20 公里时，每小时消耗之煤价值 40 元．至于其他费用每小时需 200 元．问火车行驶的速度如何才能使火车从甲城开往乙城的总费用为最省．

14.192*. 一弹在空中射击（不计空气阻力），其弹道方程为 $y=$ $=mx-\frac{(m^2+1)x^2}{800}$，这里原点取在此弹发射之点，其中 m 为曲线在原点处之切线斜率．

(a) 若要此弹击中同一水平面上最远距离的目标；

(b) 若要此弹击中 300 米远处一直立墙壁上的最大高度．问 m 之值各为多少？

曲线的凹性和拐点

14.193. 试说明曲线 $y=x^5-5x^3-15x^2+30$ 在点 (1, 11) 及点(3, 3)邻近的凹性．

14.194. 试说明曲线 $y=\operatorname{arc\,tg} x$ 在点 $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ 及点 $\left(-1, -\frac{\pi}{4}\right)$ 邻近的凹性．

14.195. 试说明曲线 $y=x^2\ln x$ 在点(1, 0)及点 $\left(\frac{1}{e^2}, -\frac{2}{e^4}\right)$ 邻近的凹性．

14.196. 试证明函数 $y=x\operatorname{arc\,tg} x$ 的图形是处处向上凹的．

14.197. 试证明函数 $y=\ln(x^2-1)$ 的图形是处处向下凹的．

在题 14.198—14.216 中，求各函数的图形的拐点及向上凹向下凹的区间：

14.198. $y=x^3-5x^2+3x-5$.　**14.199.** $y=(x+1)^4+e^x$.

14.200. $y=x+36x^2-2x^3-x^4$.　**14.201.** $y=(x+2)^6+2x+2$.

14.202. $y=\dfrac{x^3}{x^2+3a^2}$ $(a>0)$.　**14.203.** $y=a-\sqrt[3]{x-b}$.

14.204. $y=\ln(x^2+1)$.　**14.205.** $y=\dfrac{a}{x}\ln\dfrac{x}{a}$ $(a>0)$.

14.206. $y=a-\sqrt[5]{(x-b)^2}$.　**14.207.** $y=e^{\operatorname{arc\,tg} x}$.

14.208. $y=x^4(12\ln x-7)$.　**14.209.** $y=x^5$.

14.210. $y=1-x^2$.　**14.211.** $y=x^3-3x^2-9x+9$.

14.212. $y=(x-b)^3$.　**14.213.** $y=x^4$.

14.214. $y=\dfrac{1}{x^2+1}$.　**14.215.** $y=\operatorname{tg} x$.

14.216. $y=xe^{-x}$.

14.217. 求曲线 $x=t^2, y=3t+t^3$ 的拐点.

14.218. 试证明曲线 $y=\dfrac{x-1}{x^2+1}$ 有三个拐点位于同一直线上.

14.219. 问 a 及 b 为何值时，点 (1, 3) 为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点？

14.220. 设 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域内具有三阶连续导数. 如果 $f'(x_0)=0, f''(x_0)=0$, 而 $f'''(x_0)\neq 0$, 试问 $x=x_0$ 是否为极值点？为什么？又 $(x_0, f(x_0))$ 是否为拐点？为什么？

渐近线

在题 14.221—14.237 中，求各曲线的渐近线：

14.221. $y=\dfrac{1}{x^2-4x+5}$.　**14.222.** $y=c+\dfrac{a^3}{(x-b)^2}$.

14.223$^{\triangle}$. $2y(x+1)^2=x^3$.　14.224$^{\triangle}$. $y^3=a^3-x^3$.

14.225$^{\triangle}$. $y^3=6x^2+x^3$.

14.226$^{\triangle}$. $y^2(x^2+1)=x^2(x^2-1)$.

14.227$^{\triangle}$. $(y+x+1)^2=x^2+1$.

14.228$^{\triangle}$. $y=x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)$.　14.229$^{\triangle}$. $y=xe^{\frac{1}{x^2}}$.

14.230$^{\triangle}$. $y=xe^{\frac{2}{x}}+1$.　14.231$^{\triangle}$. $y=x\operatorname{arc\,sec} x$.

14.232$^{\triangle}$. $y=2x+\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}$.　14.233. $y=\frac{1}{x-1}$.

14.234. $y=\frac{1}{(x+2)^3}$.　14.235. $y=e^{\frac{1}{x}}-1$.

14.236. $y=\ln x$.　14.237$^{\triangle}$. $y^2(x-2a)=x^3-a^3$.

函数研究及其图形的描繪

在题 14.238—14.267 中，对各函数进行全面讨论并绘出它们的图形：

14.238. $y=x^4-2x+10$.　14.239. $y=\frac{8a^3}{x^2+a^2}$.

14.240. $y=e^{-\frac{1}{x}}$.　14.241. $y=\ln\sin x$.　14.242. $y=\frac{x^2}{1+x}$.

14.243. $y=xe^{-x}$.　14.244. $y=\frac{x}{3-x^2}$.　14.245. $y=\sqrt[3]{x^2}+2$.

14.246. $y=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.　14.247. $y=\frac{\ln x}{x}$.

14.248. $y=x-\ln(x+1)$.　14.249. $y=x^3-3x^2-9x+14$.

14.250. $y=x^4-2x^2-5$.　14.251. $y=x+\frac{\ln x}{x}$.

14.252. $y=2x^3-3x^2$.　14.253. $y=3x^5-5x^3$.

14.254. $y=\frac{x}{1+x^2}$.　14.255. $y=\frac{1}{1-x^2}$.

14.256. $y=\frac{x}{x^2-1}$.

14.257. $y=x-2\ \mathrm{arc\ tg}\ x$.

14.258. $y=\frac{1}{x}+4x^2$.（牛顿三叉载线）

14.259. $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$.

14.260. $y=xe^{-\frac{1}{4}x^2}$.

14.261. $y=x^2e^{-x}$.

14.262. $y=\frac{e^x}{x}$.

14.263. $y=\ln(x^2+1)$.

14.264. $y=\frac{1}{e^x-1}$.

14.265. $y^2=x^3+1$.

14.266. $y^2=x(x-1)^2$.

14.267. $y=\frac{\cos 2x}{\cos x}$.

平面曲线的曲率

在题 14.268—14.274 中，求已知曲线在指定点处的曲率：

14.268. 双曲线 $xy=4$，在点$(2, 2)$处.

14.269. 抛物线 $y=4x-x^2$，在其顶点处.

14.270. $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，在坐标原点处.

14.271. $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$，在 $t=t_1$ 处.

14.272. $x=a(\cos t+t\sin t)$，$y=a(\sin t-t\cos t)$，在 $t=\frac{\pi}{2}$ 处.

14.273. $r=a\theta$，在任意点 (r,θ) 处.

14.274. $y=\int_0^x(2t+1)dt$，在 $x=1$ 处.

14.275. 求$\begin{cases}x=3t^2,\\ y=3t-t^3\end{cases}$ 在 $t=1$ 处的曲率半径.

14.276. 求曲线 $y=a\ln\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)(a>0)$的曲率半径为最小的点的坐标.

14.277. 求曲线 $y=\ln x$ 上曲率取极值的点.

14.278. 设 $f(x)$ 为二阶可微的函数. 证明曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x,y)$ 处的曲率可以用表达式 $K=\left|\frac{d\sin\alpha}{dx}\right|$ 来表示,其中 α 是曲线在点 P 的切线与横轴正向所夹的角.

14.279. 求曲线 $y=\ln x$ 在与 x 轴交点处的曲率圆的方程.

14.280. 求曲线 $y=\operatorname{tg} x$ 在点 $\left(\frac{\pi}{4},1\right)$ 处的曲率圆的方程.

方程的近似解

14.281. 验证方程 $x^3-x^2-8x+12=0$ 有一个单根 $x_1=-3$ 和一个二重根 $x_2=2$.

14.282. 试证明方程 $x^3-3x^2+6x-1=0$ 在区间 $(0, 1)$ 内有唯一的实根,并求这根准确到 0.01.

14.283. 试证明方程 $x^4+3x^2-x-2=0$ 只有两个实单根,分别位于区间 $(-1,0)$ 及 $(0,1)$ 内,并求出这些根精确到 0.01.

14.284. 试证明方程 $x^4+2x^2-6x+2=0$ 只有两个实单根,分别位于区间 $(0,1)$ 及 $(1,2)$ 内,并结合弦位法及切线法求这二根精确到 0.01.

14.285. 试证明方程 $x^5+5x+1=0$ 在区间 $(-1, 0)$ 内有唯一的实单根,并结合弦位法及切线法求这根精确到 0.01.

14.286. 计算方程 $x^3-4x+2=0$ 的根,要求精确到 0.001.

14.287. 决定方程 $f(x)=x^5-x-0.2=0$ 包含在区间 $(1, 1.1)$ 内的根的近似值.

14.288. 求方程 $x-\operatorname{tg} x=0$ 包含在 0 和 $\frac{3\pi}{2}$ 之间的根的近似值.

14.289. 计算方程 $\sin x=1-x$ 的根,要求精确到 0.0001.

第十五章　不定积分

15.1. 一曲线过原点，且在每一点的切线的斜率等于 $2x$，试求这曲线的方程.

15.2. 在积分曲线族 $y=\int 5x^2 dx$ 中，求一通过点$(\sqrt{3}, 5\sqrt{3})$的曲线.

15.3. 试证函数 $y=\ln(ax)$和 $y=\ln x$ 是同一函数的原函数.

15.4. 试证函数 $y=(e^x+e^{-x})^2$ 和 $y=(e^x-e^{-x})^2$ 是同一函数的原函数.

15.5. 验证函数 $\frac{1}{2}e^{2x}$，$e^x \operatorname{sh} x$ 和 $e^x \operatorname{ch} x$ 各差一个常数，并证明所给的每一个函数都是 $\frac{e^x}{\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x}$ 的原函数.

15.6. 一质点作直线运动，已知其速度为 $v=\sin \omega t$，而且 $s|_{t=0}=$ $=s_0$. 求时间为 t 时物体和原点间的距离 s.

15.7. 一质点作直线运动，已知其加速度为 $a=12t^2-3\sin t$. 如果 $v_0=5$, $s_0=-3$, 求:

(a) v 和 t 间的函数关系;

(b) s 和 t 间的函数关系.

15.8. 在平面上有一运动着的质点，如果它在 x 轴方向和 y 轴方向的分速度分别为 $v_x=5\sin t$, $v_y=2\cos t$, 又 $x|_{t=0}=5$, $y|_{t=0}=0$, 求:

(a) 时间为 t 时质点所在的位置;

(b) 运动的轨迹方程.

簡单不定积分

在题 15.9—15.31 中，求出各不定积分:

15.9. $\int \frac{1}{x^3} dx$.

15.10. $\int x\sqrt{x}\, dx$.

15.11. $\int \frac{dh}{\sqrt{2gh}}$.

15.12. $\int \sqrt[m]{y^n}\, dy$.

15.13. $\int (3x^{0.4}-5x^{-0.7}+1)\, dx$.

15.14. $\int (a-bx^2)^3\, dx$.

15.15. $\int \frac{(1-x)^2}{\sqrt[3]{x}} dx$.

15.16. $\int (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x^3}-\sqrt{x}+1)\, dx$.

15.17. $\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}} dx$.

15.18. $\int \frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3} dx$.

15.19. $\int \frac{x^3-27}{x-3} dx$.

15.20. $\int \frac{x^2-2\sqrt{2}x+2}{x-\sqrt{2}} dx$.

15.21. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx$.

15.22. $\int \frac{3x^2}{1+x^2} dx$.

15.23. $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx$.

15.24. $\int 3^x\, dx$.

15.25. $\int 3^x e^x\, dx$.

15.26. $\int \frac{2\cdot 3^x-5\cdot 2^x}{3^x} dx$.

15.27. $\int \mathrm{tg}^2 x\, dx$.

15.28. $\int 2\sin^2 \frac{x}{2} dx$.

15.29. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$.

15.30. $\int \frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x} dx$.

15.31. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx$.

换元积分法

在题 15.32—15.89 中，求出各不定积分：

15.32. $\int (2x-3)^{100}\, dx$.

15.33. $\int \frac{3}{(1-2x)^2} dx$.

15.34. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3-2x}}$.　　15.35. $\int \frac{dx}{3x-5}$.

15.36. $\int (a+bx)^k\, dx,\ b\neq 0$.　　15.37. $\int \sin 3x\, dx$.

15.38. $\int \cos(\alpha-\beta x)\, dx,\ \beta\neq 0$.　　15.39. $\int \operatorname{tg} 5x\, dx$.

15.40. $\int e^{-3x}\, dx$.　　15.41. $\int 10^{2x}\, dx$.

15.42. $\int a^{mx+n}\, dx,\ \ m\neq 0$.　　15.43. $\int \operatorname{sh} 3x\, dx$.

15.44. $\int \operatorname{ch}(2x-5)\, dx$.　　15.45. $\int \frac{dx}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}$.

15.46. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}}$.　　15.47. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$.

15.48. $\int \frac{1}{1+9x^2}\, dx$.　　15.49. $\int \frac{1}{2x^2+9}\, dx$.

15.50. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+16x^2}}$.　　15.51. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+9x^2}}$.

15.52. $\int \frac{(2x-3)\, dx}{x^2-3x+8}$.　　15.53. $\int \frac{x\, dx}{x^2+1}$.

15.54. $\int \frac{x^2\, dx}{x^3+1}$.　　15.55. $\int x\sqrt{1-x^2}\, dx$.

15.56. $\int 2x\sqrt{x^2+1}\, dx$.　　15.57. $\int x^2\sqrt[5]{x^3+2}\, dx$.

15.58. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{x^2+1}}$.　　15.59. $\int \frac{x^3\, dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$.

15.60. $\int \frac{x^2\, dx}{x^6+4}$.　　15.61. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{4-x^4}}$.

15.62. $\int e^x(\sin e^x)\, dx$.　　15.63. $\int e^{x^2} x\, dx$.

15.64. $\int e^{-x^3} \cdot x^2\, dx.$

15.65. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\, dx.$

15.66. $\int \frac{dx}{x \ln x}.$

15.67. $\int \frac{\operatorname{ctg}\theta}{\sqrt{\sin\theta}}\, d\theta.$

15.68. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg} x}}.$

15.69. $\int \frac{(\operatorname{arc\,tg} x)^2}{1+x^2}\, dx.$

15.70. $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}}.$

15.71. $\int \cos^2 x\, dx.$

15.72. $\int \sin^4 x\, dx.$

15.73. $\int \cos^2 x \sin^2 x\, dx.$

15.74. $\int \sin 3x \sin 5x\, dx.$

15.75. $\int \cos^3 x\, dx.$

15.76. $\int \sin^3 x \cos^5 x\, dx.$

15.77. $\int \sec^4 x\, dx.$

15.78. $\int \operatorname{tg}^4 x\, dx.$

15.79. $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$

15.80. $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$

15.81. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}.$

15.82. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\, dx.$

15.83. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}.$

15.84. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}.$

15.85. $\int \frac{x^3\, dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$

15.86. $\int x^3(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\, dx.$

15.87. $\int x^5 \sqrt[3]{(1+x^3)^2}\, dx.$

15.88. $\int \frac{x^4\, dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$

15.89. $\int \frac{dx}{x(x^6+4)}.$ [提示: $\int \frac{dx}{x(x^6+4)} = \frac{1}{4}\int \frac{(4+x^6)-x^6}{x(x^6+4)}\, dx.$]

分部积分法

在题 15.90—15.104 中,求出各不定积分:

15.90. $\int x\sin 2x\,dx$.

15.91. $\int x\,\mathrm{sh}\,x\,dx$.

15.92. $\int xe^{-x}\,dx$.

15.93. $\int x^2\cos\omega x\,dx$.

15.94. $\int x^2a^x\,dx$.

15.95. $\int \ln x\,dx$.

15.96. $\int \ln^2 x\,dx$.

15.97. $\int x^n\ln x\,dx,\ n\neq -1$.

15.98. $\int \mathrm{arc\,tg}\,x\,dx$.

15.99. $\int x\,\mathrm{arc\,tg}\,x\,dx$.

15.100. $\int \mathrm{arc\,cos}\,x\,dx$.

15.101. $\int e^{ax}\cos nx\,dx$.

15.102. $\int x^2\ln(1+x)\,dx$.

15.103. $\int \frac{\ln^3 x}{x^2}\,dx$.

15.104. $\int (\mathrm{arc\,sin}\,x)^2\,dx$.

换元积分法和分部积分法杂题

在题 15.105—15.169 中,求出各不定积分:

15.105. $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}\,dx$.

15.106. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$.

15.107. $\int x^5e^{x^3}\,dx$.

15.108. $\int \frac{\cos^3\theta}{\sin^4\theta}\,d\theta$.

15.109. $\int \frac{1}{\cos^2 x\sin^2 x}\,dx$.

15.110. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}\,dx$.

15.111. $\int (\mathrm{tg}^2 x+\mathrm{tg}^4 x)\,dx$.

15.112. $\int \left(\frac{\sec x}{1+\mathrm{tg}\,x}\right)^2 dx$.

15.113. $\int \frac{\cos 2t}{\sin^4 t}\, dt.$

15.114. $\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{\sin 2x}\, dx.$

15.115. $\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\, dx.$

15.116. $\int e^{e^x+x}\, dx.$

15.117. $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\, dx.$

15.118. $\int \frac{dx}{x[1+\ln^2 x]}.$

15.119. $\int \frac{2+\ln x}{x}\, dx.$

15.120. $\int x \sin x \cos x\, dx.$

15.121. $\int x \cos^2 x\, dx.$

15.122. $\int x \operatorname{tg}^2 x\, dx.$

15.123. $\int x^2 \cos^2 x\, dx.$

15.124. $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^3 x\, dx.$

15.125. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}.$

15.126. $\int \frac{(3x+1)\, dx}{x^2+2x+17}.$

15.127. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{2+4x}}.$

15.128. $\int \frac{\lg x}{x^3}\, dx.$

15.129. $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x}\, dx.$

15.130. $\int \cos^4 x\, dx.$

15.131. $\int \frac{\ln \cos x}{\cos^2 x}\, dx.$

15.132. $\int \frac{x^7\, dx}{(1+x^4)^2}.$

15.133. $\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-9}}.$

15.134. $\int \frac{dx}{(2x-1)^2+4}.$

15.135. $\int \frac{1}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}\, dx.$

15.136. $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}.$

15.137. $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}.$

15.138. $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}.$

15.139. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}.$

15.140. $\int \frac{dx}{4x^2+4x-3}.$

15.141. $\int \frac{dx}{\sqrt{16x^2+8x+5}}.$

15.142. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x-1}}.$

15.143. $\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

15.144. $\int \frac{3x-1}{x^2+9}\,dx.$

15.145. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{9x^2-4}}\,dx.$

15.146. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$

15.147. $\int \frac{(6x-5)\,dx}{2\sqrt{3x^2-5x+6}}.$

15.148. $\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{a^3-x^3}}.$

15.149. $\int \sin \ln x\,dx.$

15.150. $\int \cos x \cos 2x \cos 3x\,dx.$

15.151. $\int \operatorname{ctg}(2x+1)\,dx.$

15.152. $\int \sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)dx.$

15.153. $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\,dx.$

15.154. $\int \operatorname{tg}^5 x \sec^3 x\,dx.$

15.155. $\int \operatorname{ctg}^5 x \csc^4 x\,dx.$

15.156. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$

15.157. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx.$

15.158. $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx.$

15.159. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx.$

15.160. $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

15.161. $\int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^2}.$

15.162. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}.$

15.163. $\int \frac{\sqrt{(9-x^2)^3}}{x^6}\,dx.$

15.164. $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx.$

15.165. $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx.$

15.166. $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx.$

15.167. $\int e^{\sqrt{x}}\,dx.$

15.168. $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

15.169. $\int \frac{x \operatorname{arc\,tg} x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$

分式有理函数的积分

在题 15.170—15.189 中,求出各不定积分:

15.170. $\int \frac{x^3}{3+x} dx$.　　15.171. $\int \frac{(x+1)}{x^2+4x+13} dx$.

15.172. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-x} dx$.　　15.173. $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x} dx$.

15.174. $\int \frac{(2x^2-5)dx}{x^4-5x^2+6}$.

15.175. $\int \frac{x^6-2x^4+3x^3-9x^2+4}{x^5-5x^3+4x} dx$.

15.176. $\int \frac{4x+3}{(x-2)^3} dx$.　　15.177. $\int \frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)} dx$.

15.178. $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2} dx$.　　15.179. $\int \frac{dx}{x^4-x^2}$.

15.180. $\int \frac{x^5}{(x-1)^2(x^2-1)} dx$.　　15.181. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$.

15.182. $\int \frac{x^4 dx}{x^2+1}$.　　15.183. $\int \frac{x\,dx}{x^3-1}$.

15.184. $\int \frac{x^2 dx}{1-x^4}$.　　15.185. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$.

15.186. $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$.

15.187. $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)} dx$.

15.188. $\int \frac{x^6+x^4-4x^2-2}{x^3(x^2+1)^2} dx$.　　15.189. $\int \frac{du}{(u^2+4)^3}$.

三角函数有理式的积分

在题 15.190—15.198 中,求出各不定积分:

15.190. $\int \frac{dx}{3+\cos x}$.

15.191. $\int \frac{dx}{2+\sin x}$.

15.192. $\int \frac{dx}{4+5\cos x}$.

15.193. $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$.

15.194. $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$.

15.195. $\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$.

15.196. $\int \frac{dx}{3+\sin^2 x}$.

15.197. $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx$.

15.198. $\int \frac{dx}{\sin x+\operatorname{tg} x}$.

简单代数无理式的积分

在题 15.199—15.223 中,求出各不定积分:

15.199. $\int \frac{(\sqrt{x})^3+1}{\sqrt{x}+1}\,dx$.

15.200. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$.

15.201. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\,dx$.

15.202. $\int \frac{dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2})}$.

15.203. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}+m}$, $a\neq 0$.

15.204. $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x^2}\,dx$.

15.205. $\int \frac{x\,dx}{(x+1)^{\frac{1}{2}}+(x+1)^{\frac{1}{3}}}$.

15.206. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}\,dx$.

15.207. $\int \frac{2-\sqrt{2x+3}}{1-2x}\,dx$.

15.208. $\int \frac{x}{\sqrt[3]{1-3x}}\,dx$.

15.209. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

15.210. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$.

15.211. $\int \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)}\,dx$.

15.212. $\int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}}$.

15.213. $\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\,dx$.

15.214. $\int \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

15.215. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5+x-x^2}}$.　　15.216. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+3x-4}}$.

15.217. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}}$.　　15.218. $\int \frac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

15.219. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}$.　　15.220. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^2}}$.

15.221. $\int \sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})^4\,dx$.　　15.222. $\int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt[3]{x}}\,dx$.

15.223. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$.

杂　　题

在题 15.224—15.280 中,求出各不定积分:

15.224. $\int \frac{\cos 2x}{1+\sin x\cos x}\,dx$.　　15.225. $\int \sin^3 \pi x\sqrt{\cos \pi x}\,dx$.

15.226. $\int \frac{\operatorname{tg}\varphi\cos^6\varphi}{\sin^4\varphi}\,d\varphi$.　　15.227. $\int \frac{d\varphi}{\sqrt[4]{\sin^3\varphi\cos^5\varphi}}$.

15.228. $\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x}$.　　15.229. $\int \frac{\sin^2 x\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$.

15.230. $\int \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}\,dx$.　　15.231. $\int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin x\cos x}\,dx$.

15.232. $\int \frac{dx}{1+\cos x}$.　　15.233. $\int \frac{dx}{1+\sin x}$.

15.234. $\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}\,dx$.　　15.235. $\int \frac{1+\sin x}{1-\sin x}\,dx$.

15.236. $\int \sqrt{1+\sin x}\,dx$.　　15.237. $\int \frac{2^x\,dx}{\sqrt{1-4^x}}$.

15.238. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.　　15.239. $\int \frac{dx}{e^x+1}$.

15.240. $\int \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx.$　　15.241. $\int \frac{dx}{(1+e^x)^2}.$

15.242. $\int e^{2x^2+\ln x}\,dx.$　　15.243. $\int \sqrt{e^x-1}\,dx.$

15.244. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}.$　　15.245. $\int \frac{x\,dx}{x-\sqrt{x^2-1}}.$

15.246. $\int \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}}\,dx.$　　15.247. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$

15.248. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}.$　　15.249. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}.$

15.250. $\int \frac{\operatorname{ctg} x}{\sin x+\cos x-1}\,dx.$　　15.251. $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\,dx.$

15.252. $\int \frac{dx}{(\sin x+\cos x)^2}.$　　15.253. $\int \frac{dx}{\sin 2x-2\sin x}.$

15.254. $\int \frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3}\,dx.$　　15.255. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}\,dx.$

15.256. $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx.$　　15.257. $\int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}\,dx.$

15.258. $\int x\ln(1+x^3)\,dx.$　　15.259. $\int xe^{x^2}(x^2+1)\,dx.$

15.260. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx.$

15.261*. $\int \frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}\,dx.$ [提示：令 $u=x,\ dv=\frac{e^x\,dx}{\sqrt{1+e^x}}$.]

15.262. $\int \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{(1+x)^3}\,dx.$　　15.263. $\int \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}\,dx.$

15.264. $\int x\sin\sqrt{x}\,dx.$

15.265. $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\,dx.$ [提示：令 $u=xe^x,\ dv=\frac{dx}{(1+x)^2}$.]

15.266. $\int \frac{x^2 \operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2} dx$. [提示：令 $x=\operatorname{tg} t$.]

15.267. $\int \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x^2(1+x^2)} dx$. 15.268. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx$.

15.269. $\int \frac{e^{2x}\,dx}{\sqrt[4]{1+e^x}}$. $\left[\text{提示：令}\sqrt[4]{1+e^x}=t.\right]$

15.270. $\int \frac{e^{\operatorname{arc\,tg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$.

15.271. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$. [提示：令$\sqrt{x}=t$.]

15.272. $\int \sqrt{x}\ln^2 x\,dx$. 15.273. $\int \sin\sqrt[3]{x}\,dx$.

15.274. $\int \operatorname{arc\,tg}(1+\sqrt{x})dx$. 15.275. $\int \frac{dx}{a\cos x+b\sin x}$.

15.276. $\int \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}} dx$. $\left[\text{提示：}\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx=\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{(a-x)}\,dx,\right.$

$\left.\text{令 } x=a\sin t.\right]$

15.277. $\int \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}} dx$.

15.278. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}}$. $\left[\text{提示：令}\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}=t.\right]$

15.279. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$. [提示：令 $x-a=(b-a)\sin^2 t$.]

15.280. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$. [提示：令 $x+a=(b-a)\operatorname{sh}^2 t$.]

15.281. 求出 $\int \arcsin x\,dx+\int \arccos x\,dx$，并解释所获得的结果.

15.282. 对于 $\int \sin 2x\,dx$ 可以这样来求：

$$\int \sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\,d(2x)$$

故有 $\int \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + c$. 但另一方面也可以这样来求:

$$\int \sin 2x\,dx = 2\int \sin x\,d(\sin x) = \sin^2 x + c.$$

试说明这两个结果并不矛盾.

第十六章 定积分

定积分概念

16.1. 用积分和式表示抛物线 $y=\frac{x^2}{2}$, 直线 $x=3$, $x=6$ 和横轴所围成的曲边梯形的面积的近似值,并取和式的极限求其准确值。

16.2. 应用定积分定义计算抛物线 $y=x^2+1$, 直线 $x=a$, $x=b$, $(b>a)$及横轴所围成的面积.

16.3. 自由落体的速度 v 等于 gt, 试应用积分定义求前 5 秒钟内所落下的距离.

16.4. 把质量为 m 的物体从地球表面升高到高度为 h 的位置, 需作功多少? 用定积分表示之. [地球吸引物体的力按以下的规律来确定: $f=mg\frac{R^2}{r^2}$, 其中 m 表物体的质量, R 表地球的半径, r 表地球中心至物体的距离].

16.5. 放射性物体的分解速度 v 是时间 t 的函数 $v=v(t)$. 试表示放射性物体由时间 T_0 到 T_1 所分解的质量 m:

(a) 用积分和式表示其近似值;

(b) 用积分表示其准确值.

16.6. 直接应用定积分定义计算下列积分:

(a) $\int_a^b x\,dx \quad (a<b)$; (b)* $\int_0^1 e^x\,dx$;

(c)* $\int_1^2 \frac{dx}{x}$. [提示：(b) 将积分区间分成 n 等分. (c) 使分点的坐标成几何级数 $1, m, m^2, \cdots, m^n$, 其中 $m=2^{\frac{1}{n}}$.]

定积分的性质

16.7. 说明(不计算它们的值)下列积分哪一个较大：

(a) $\int_0^1 x^2\,dx$ 还是 $\int_0^1 x^3\,dx$? (b) $\int_1^2 x^2\,dx$ 还是 $\int_1^2 x^3\,dx$?

(c) $\int_1^2 \ln x\,dx$ 还是 $\int_1^2 (\ln x)^2\,dx$?

(d) $\int_3^4 \ln x\,dx$ 还是 $\int_3^4 (\ln x)^2\,dx$?

16.8. 估计下列各积分的值：

(a) $\int_1^4 (x^2+1)\,dx$; (b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (1+\sin^2 x)\,dx$;

(c) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} x \operatorname{arc\,tg} x\,dx$; (d) $\int_0^2 e^{x^2-x}\,dx$.

16.9. 试计算函数 $y=2x^2+3x+3$ 在区间 $[1, 4]$ 上的平均值.

16.10. 试计算函数 $y=\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}$ 在区间 $[1, 8]$ 上的平均值.

上限(或下限)为变量的定积分

16.11. 试求函数 $y=\int_0^x \sin x\,dx$, 当 $x=0, x=\frac{\pi}{4}$ 及 $x=\frac{\pi}{2}$ 时的导数.

16.12. 试求函数 $y=\int_0^{z^2} \frac{dx}{(1+x^3)}$ 对 z 的二阶导数当 $z=1$ 时的值.

16.13. 下限为变量上限为常量的定积分，对其下限的导函数为何？求函数 $y=\int_x^5 \sqrt{1+x^2}\,dx$ 对 x 的导数.

16.14. 求由参数表示式 $x=\int_0^t \sin t\,dt$, $y=\int_0^t \cos t\,dt$ 所给定的函数 y 对 x 的导函数.

16.15. 试求由 $\int_0^y e^t\,dt+\int_0^x \cos t\,dt=0$ 所决定的隐函数对于 x 的导数 y'.

16.16. 当 x 为何值时函数 $I(x)=\int_0^x xe^{-x^2}\,dx$ 有极值？

16.17. 物体运动的速度与时间的平方成正比. 设从时间 $t=0$ 开始3秒钟后，物体经过18厘米. 试求距离 s 和时间 t 的函数关系。

16.18. 一质点作直线运动，已知其速度 $v=2t+4$ (厘米/秒). 试求在前10秒钟内质点所经过的路程.

16.19. 一曲边梯形是由抛物线 $y=x^2$，横轴和变动着的但始终平行于纵轴的直线所围成的. 试求曲边梯形面积的增量 Δs 及微分 ds 当 $x=10$ 且 $\Delta x=0.1$ 时的值. 并求用微分代替增量所发生的绝对误差与相对误差.

計算定积分(应用牛頓-萊布尼茲公式)

在题16.20—16.38中，计算各定积分：

16.20. $\int_1^3 x^3\,dx$.

16.21. $\int_0^a (3x^2-x+1)\,dx$.

16.22. $\int_1^2\left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)dx$.

16.23. $\int_1^2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$.

16.24. $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$.

16.25. $\int_4^9 \sqrt{4}(1+\sqrt{x})\,dx$.

16.26. $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}$.

16.27. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

16.28. $\int_a^{a\sqrt{3}} \frac{dx}{a^2+x^2}$.　　16.29. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

16.30. $\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx$.　　16.31. $\int_{-1}^0 \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}\,dx$.

16.32. $\int_0^a \left(\frac{bc}{2a^2}x^2 - \frac{bc}{a}x + \frac{bc}{2}\right) dx$.

16.33. $\int_0^2 (4-2x)(4-x^2)\,dx$.　　16.34. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^2\theta\,d\theta$.

16.35. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^3\theta\,d\theta$.　　16.36. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos^3\varphi\,d\varphi$.

16.37. $\int_0^{\pi} (1-\sin^3\theta)\,d\theta$.　　16.38. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\,du$.

16.39. 设 k 为正整数，证明 $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\,dx = 0$ 与 $\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\,dx = 0$.

16.40. 设 k, l 为正整数，且 $k \neq l$，证明

(a) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin lx\,dx = 0$;　　(b) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos lx\,dx = 0$;

(c) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin lx\,dx = 0$.

16.41. 设 k 为正整数，证明 $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx\,dx = \pi$ 及 $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx\,dx = \pi$.

在题 16.42—16.52 中，用**分部积分法**计算各定积分：

16.42. $\int_0^1 te^t\,dt$.　　16.43. $\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$.

16.44. $\int_1^e x\ln x\,dx$.　　16.45. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx$.

16.46. $\int_0^{e-1} \ln(x+1)\,dx$.　　16.47. $\int_0^1 x\,\mathrm{arc\,tg}\,x\,dx$.

16.48. $\int_0^{\ln 2} xe^{-x}dx$.

16.49. $\int_0^{\pi} x^3 \sin x\, dx$.

16.50. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x\, dx$.

16.51. $\int_1^2 x \log_2 x\, dx$.

16.52. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$.

在题 16.53—16.80 中，用**换元积分法**计算下列定积分：

16.53. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$.

16.54. $\int_2^{-13} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}$.

16.55. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos^4 x}{2}\, dx$.

16.56. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin 2x\, dx$.

16.57. $\int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}-\varphi_0\right)dt$.

16.58. $\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \sin^2(\omega t+\varphi_0)\, dt$.

16.59. $\int_0^1 (e^x-1)^4 e^x\, dx$.

16.60. $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}\, dx$.

16.61. $\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}$.

16.62. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.

16.63. $\int_{-2}^0 \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

16.64. $\int_1^3 \frac{dx}{x+x^2}$.

16.65. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

16.66. $\int_0^1 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x}\, dx$.

16.67. $\int_{-1}^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}$.

16.68. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$.

16.69. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

16.70. $\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$.

16.71. $\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\, dx$.

16.72. $\int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3}\, dx$.

16.73. $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$.　　16.74. $\int_0^{a\sqrt{2}}\frac{r\,dr}{\sqrt{3a^2-r^2}}$.

16.75. $\int_1^{e^2}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.　　16.76. $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$.

16.77. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2\cos x+3}$.　　16.78. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2+\sin x}$.

16.79. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^7 2x\,dx$.　　16.80. $\int_0^{\pi}\sin^6\frac{x}{2}\,dx$.

16.81. 证明：若在$[-a,a]$上$f(x)$连续且为偶函数，则

$$\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx.$$

16.82. 证明：若在$[-a,a]$上$f(x)$连续且为奇函数，则

$$\int_{a}^{a}f(x)\,dx=0.$$

16.83. 利用函数的奇偶性计算$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

16.84. 利用函数的奇偶性计算$\int_{-5}^{5}\frac{x^3\sin^2 x}{(x^4+2x^2+1)}\,dx$.

16.85. 试证明$\int_{-a}^{a}\Phi(x^2)\,dx=2\int_0^a\Phi(x^2)\,dx$，其中$\Phi(u)$为连续函数.

16.86. 设$f(x)$在$[-b,b]$上连续，试证

$$\int_{-b}^{b}f(x)\,dx=\int_{-b}^{b}f(-x)\,dx.$$

16.87. 求$\int_{-\pi}^{\pi}x^4\sin x\,dx$.　　16.88. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4\cos^4\theta\,d\theta$.

16.89. 证明$\int_x^1\frac{dx}{1+x^2}=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{dx}{1+x^2}$　$(x>0)$.

16.90. 证明$\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx=\int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx$.

杂 题

在题 16.91—16.116 中，计算各定积分：

16.91. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$.　　16.92. $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}\,dx}{x^2}$.

16.93. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)dt$.

16.94. $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2}\,dx$.　　16.95. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2\cos 2\theta-1)\,d\theta$.

16.96. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4a^2\cos^6\theta\,d\theta$.　　16.97. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-x\sin x)\,dx$.

16.98. $\int_0^1 \left[x^2-x^3+\frac{(1-x)^3}{3}\right]dx$.

16.99. $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt[5]{1+x^2}\,dx$.　　16.100. $\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}$.

16.101. $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos^2 2x}$.　　16.102. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,dx$.

16.103. $\int_0^{-\ln 2} \sqrt{1-e^{2x}}\,dx$.　　16.104. $\int_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

16.105. $\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{dx}{(x-a)(x-2a)}$.　　10.106. $\int_1^e \ln^3 x\,dx$.

16.107. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^4\varphi\,d\varphi$.　　16.108. $\int_1^2 \frac{dx}{x+x^3}$.

16.109. $\int_0^{\sqrt[n]{\frac{a}{2}}} \frac{x^{n-1}\,dx}{a^2-x^{2n}}$.　　16.110. $\int_0^{\frac{1}{2}} (\arcsin x)^2\,dx$.

16.111. $\int_a^x \ln(x+\sqrt{x^2-a^2})\,dx$.

16.112. $\int_0^1 \frac{r-r^2}{r^2+1}\,dr$.

16.113. $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\,r\,dr$.

16.114. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\frac{1}{6}\sin^2 x}$.

16.115. $\int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$.

16.116. $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\,dx$.

16.117. 求函数 $y=\int_0^x (x-1)(x-2)^2\,dx$ 的极值和它的图形上的拐点.

16.118. 求函数 $I(x)=\int_0^x \frac{3x+1}{x^2-x+1}\,dx$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最大值与最小值。

16.119*. 设 $f(x)$ 为连续函数，验证

$$\int_0^\pi x f(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,dx.$$

并应用所得的结果计算积分 $\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$. [提示：令 $x=\pi-y$.]

16.120. 利用适当的代换证明 $\int_0^1 \frac{dx}{\arccos x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

16.121. 若 $f(t)$ 是连续函数且为奇函数，证明 $\int_0^x f(t)\,dt$ 是偶函数；若 $f(t)$ 是连续函数且为偶函数，证明 $\int_0^x f(t)\,dt$ 是奇函数.

16.122. 设 $f(x)$ 是以 l 为周期的连续函数，证明 $\int_a^{a+l} f(x)\,dx$ 的值与 a 无关.

16.123. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且不取负值。证明：若

$$\int_a^b f(x)\,dx=0,$$

则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上恒等于零.

16.124. 按牛顿二项式展开及用代换 $x=\sin t$ 两种方法计算积分 $\int_0^1 (1-x^2)^n dx$(n 为正整数). 并由此证明:

$$1-\frac{C_n^1}{3}+\frac{C_n^2}{5}-\frac{C_n^3}{7}+\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)}.$$

計算定积分(应用近似积分公式)

16.125. 中心在原点的单位圆的面积为 $\pi=4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$. 试把积分区间 $[0, 1]$ 分成十等分,分别用矩形法、梯形法和辛卜生法的近似积分公式计算 π 的近似值,计算到小数点后三位。

16.126. 已知 $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$. 试把积分区间 $[0, 1]$ 分成十等分,分别用矩形法、梯形法和辛卜生法的近似积分公式计算 π 的近似值,计算到小数点后三位.

16.127. 把积分区间分成十等分,用辛卜生公式计算下列积分的近似值,计算到小数点后三位:

(a) $\int_0^1 \sqrt{1-x^3}\,dx$;　　(b) $\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx$;

16.128. 根据辛卜生公式,用下表所列的函数 $f(x)$ 的值计算积分 $\int_{1.05}^{1.35} f(x)\,dx$ 的近似值:

x	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30	1.35
$f(x)$	2.36	2.50	2.74	3.04	3.46	3.98	4.60

广义积分

在题 16.129—16.154 中,计算下列各广义积分的值或判断它的发散性:

16.129. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^4}$.

16.130. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

16.131. $\int_0^{+\infty}e^{-ax}\,dx\ (a>0)$.

16.132. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2x\,dx}{x^2+1}$.

16.133. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

16.134. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$.

16.135. $\int_e^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\,dx$.

16.136. $\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}$.

16.137. $\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^2}$.

16.138. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2(x+1)}$.

16.139. $\int_0^{+\infty}\frac{x}{(1+x)^3}\,dx$.

16.140. $\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}\,dx$.

16.141. $\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin x\,dx$.

16.142. $\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x^2}\,dx$.

16.143. $\int_0^{+\infty}x^ne^{-x}\,dx$, 其中 n 为正整数.

16.144. $\int_0^1\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

16.145. $\int_0^2\frac{dx}{(1-x)^2}$.

16.146. $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

16.147. $\int_a^{2a}\frac{dx}{(x-a)^{\frac{3}{2}}}$.

16.148. $\int_1^2\frac{x\,dx}{\sqrt{x-1}}$.

16.149. $\int_1^2\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

16.150. $\int_0^2\frac{dx}{x^2-4x+3}$.

16.151. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x}$.

16.152. $\int_1^e\frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$.

16.153. $\int_a^b\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\quad(a<b)$.

16.154. $\int_a^b\frac{x\,dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\quad(a<b)$.

16.155. 当 k 为何值时，积分 $\int_0^{+\infty} e^{-kx}\cos bx\,dx$ 为收敛？又何时为发散？

16.156. 当 k 为何值时，积分 $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^k}$收敛？又何时为发散？

16.157. 当 k 为何值时，积分 $\int_a^b\frac{dx}{(x-a)^k}(b>a)$收敛？又何时为发散？

第十七章 定积分的应用

平面图形的面积

17.1. 求由抛物线 $y=x^2-4x+5$，横轴及直线 $x=3, x=5$ 所围成的图形的面积.

17.2. 求由曲线 $y=xe^{-x^2}$，横轴及直线 $x=0$, $x=1$ 所围成的图形的面积.

17.3. 求由曲线 $y=\ln x$，纵轴与直线 $y=\ln a, y=\ln b(b>a>0)$ 所围成图形的面积.

17.4. 求由抛物线 $y=3-2x-x^2$ 与横轴所围成的图形的面积。

17.5. 求由抛物线 $(x-1)^2=-8(y-8)$ 与横轴所围成的图形的面积.

17.6. 求曲线 $y^2=(4-x)^3$ 与纵轴所围成的图形的面积.

17.7. 求三次抛物线 $y=x^3$ 及直线 $y=2x$ 所围成的图形的面积.

17.8. 求抛物线 $y=-x^2+4x-3$ 及其在点$(0, -3)$和点$(3, 0)$处的切线所围成的图形的面积.

17.9. 求抛物线 $y^2=2px$ 及其在点$\left(\frac{p}{2}, p\right)$处的法线所围成的图形的面积.

17.10. 求由曲线 $y=e^x$, $y=e^{-x}$ 及直线 $x=1$ 所围成的图形的面积。

17.11. 求抛物线 $y^2=4(x+1)$ 及 $y^2=4(1-x)$ 所围成的图形的面积.

17.12. 求曲线 $y=x^2$ 与直线 $y=x$, $y=2x$ 所围成的图形的面积.

17.13. 抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 分割圆 $x^2+y^2\leqslant 8$ 成两部分，分别求这两部分的面积.

在题 17.14—17.21 中，求各曲线所围成的图形的面积:

17.14. $x^2+y^2=a^2$.

17.15. $y^2=x^2-x^4$.

17.16. $x=a\cos t$,　$y=a\sin t$.

17.17. $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.

17.18. $r=2a\cos\theta$.

17.19. $r=a\sin 3\theta$.

17.20. $r^2=a^2\sin 2\theta$.

17.21. $r=2a(2+\cos\theta)$.

17.22. 求摆线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ 的一拱与横轴所围成的图形的面积.

17.23. 求对数螺线 $r=ae^{\theta}$ 及矢径 $\theta=-\pi$, $\theta=\pi$ 所围成的图形的面积.

17.24. 求抛物线 $r(1+\cos\theta)=a$ 与直线 $\theta=0$ 及 $\theta=\frac{2\pi}{3}$ 所围成的图形的面积.

17.25. 求由双曲线 $r^2\cos 2\theta=a^2$ 和直线 $\theta=0$ 及 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 所围成的图形的面积.

在题 17.26—17.28 中，求两曲线所围成的图形的公共部分的面积:

17.26. $r=3\cos\theta$ 及 $r=1+\cos\theta$.

17.27. $r=\sqrt{2}\cos\theta$ 及 $r^2=\sqrt{3}\sin 2\theta$.

17.28. $r=\sqrt{2}\sin\theta$ 及 $r^2=\cos 2\theta$.

17.29. 求两曲线 $r=a$ 及 $r=a(1+\sin^2 2\theta)$所围成的图形的面积.

17.30. 圆 $r\leqslant 1$ 被心形线 $r=1+\cos\theta$ 分割成两部分,求这两部分的面积.

17.31. 求由双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 所围成且在圆周 $x^2+y^2=\frac{a^2}{2}$内部的图形的面积. [提示:先化成极坐标.]

在题 17.32 和 17.33 中,求已知曲线和它的渐近线之间的图形的面积:

17.32. $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$.　　　　**17.33.** $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$.

体　积

在题 17.34—17.38 中,求已知诸曲线所围成的图形按指定的轴旋转所产生的旋转体的体积:

17.34. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, y=\pm b, x=0$, 绕 y 轴.

17.35. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 分别绕 x 轴及 y 轴.

17.36. $y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}), x=0, x=a$, 绕 x 轴.

17.37. $y=x^2, x=y^2$, 绕 x 轴.

17.38. $x^2+(y-5)^2=16$, 绕 x 轴.

17.39. 证明圆锥体的体积为其底面积与高的乘积的三分之一.

17.40. 以一平面截半径为 r 的球,截体高为 h. 求被截下部分之体积.

17.41. 求摆线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$ 的一拱与横轴围成的图形绕 x 轴旋转所成旋转体的体积.

17.42. 求曲线 $xy=a\ (a>0)$ 与直线 $x=a$, $x=2a$ 及 $y=0$ 所围成的图形绕 Ox 轴旋转一周所产生的旋转体的体积.

17.43*. 上题(17.42)中的图形,若绕 y 轴旋转,则体积为多少?

17.44*. 求心形线 $r=4(1+\cos\theta)$ 和直线 $\theta=0$ 及 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 围成的图形绕极轴旋转所成旋转体的体积。[提示: $V=\pi\int_0^8 y^2\,dx$, 令 $x=r\cos\theta=4(1+\cos\theta)\cos\theta$, 则 $y=r\sin\theta=4(1+\cos\theta)\sin\theta$.]

在题 17.45 和 17.46 中，求已知曲线所围成的图形绕指定直线旋转所成旋转体的体积:

17.45. $x^2+y^2=a^2$, 绕 $x=-b$ $(b>a>0)$.

17.46*. $x^2-y^2=2$, $x+y=\sqrt{2}$, $x+y=3\sqrt{2}$ 及 $y=x$, 绕 $y=x$. [提示: 将坐标轴旋转 $\frac{\pi}{4}$.]

17.47. 有一立体，以长半轴 $a=10$, 短半轴 $b=5$ 的椭圆为底，而垂直于长轴的截面都是等边三角形. 求其体积.

17.48. 有一立体以抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $x=2$ 所围成的图形为底，而垂直于抛物线轴的截面都是等边三角形，求其体积.

17.49. 设有半径为 a 的正圆柱体被通过其底的直径而与底面成 α 角的平面所截，得一个圆柱楔，求其体积.

17.50. 以椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$ 为底的柱体，被一个通过短轴而与底面成 α 角的平面所截，求截得部分的体积.

17.51*. 二个相等圆柱体相交成直角，求两圆柱体公共部分的体积. [提示: 设两个柱面方程为 $x^2+y^2=a^2$ 及 $x^2+z^2=a^2$, 则垂直于 x 轴的平面截立体得正方形.]

17.52. 求椭球体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$ 的体积.

17.53. 求平面 $z=c$ $(c>0)$ 与椭圆抛物面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$ 之间的部分的体积.

17.54. 求球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与旋转锥面 $x^2+y^2=8z^2$ 之间的部分的体积.

平面曲线的弧长

在题 17.55—17.63 中，求已知曲线上指定两点间的一段曲线弧长：

17.55. $y^2=2px$，自点$(0,0)$至点$\left(\frac{p}{2},\ p\right)$.

17.56. $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x$，自 $x=1$ 至 $x=e$.

17.57. $y=\ln(1-x^2)$，自 $x=0$ 至 $x=\frac{1}{2}$.

17.58. $x=a(\cos t+t\sin t)$，$y=a(\sin t-t\cos t)$，自 $t=0$ 至 $t=\pi$.

17.59. $x=\operatorname{arc\,tg} t, y=\frac{1}{2}\ln(1+t^2)$，自 $t=0$ 至 $t=1$.

17.60. $x=e^t\sin t$，$y=e^t\cos t$，自 $t=0$ 至 $t=\frac{\pi}{2}$.

17.61. 抛物线 $\rho=\frac{m}{1-\cos\theta}$，从 $\theta=\pi$ 至 $\theta=\varphi$.

17.62. $r\theta=1$，自 $\theta=\frac{3}{4}$ 至 $\theta=\frac{4}{3}$.

17.63. $r=a\theta$，自 $\theta=0$ 至 $\theta=2\pi$.

在题 17.64—17.67 中，求已知曲线的全长：

17.64. $x=a\cos t, y=a\sin t$.　　**17.65.** $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

17.66. $r=a(1+\cos\theta)$.　　**17.67.** $y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\sqrt{\cos x}\,dx$.

17.68. 在摆线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$ 上求分摆线第一拱的长成 1:3 的点的坐标.

17.69. 在星形线 $x=a\cos^3 t$，$y=a\sin^3 t$ 上已知两点 $A(a,0)$ 及 $B(0,a)$，求 M 点使 $\overset{\frown}{AM}=\frac{1}{4}\overset{\frown}{AB}$.

定积分在力学及物理学上的应用

功

17.70. 按万有引力定律，两质点间的吸引力为 $F=k\frac{m_1m_2}{r^2}$，k 为常数，m_1，m_2 为两质点的质量，r 为其间之距离．若两质点 m_1, m_2 起始之距离为 a，质点 m_1 沿直线移动至离 m_2 为 b 之处，试求所作之功($b>a$).

17.71. 两带电小球，中心相距为 r，各带电荷 Q_1 与 Q_2，其相互推拒之力可由库伦定律 $F=k\frac{Q_1Q_2}{r^2}$ (k 为常数)计算．设当 $r=50$ 厘米时，$F=20$ 克重，今两球之距离自 $r=75$ 厘米变为 $r=100$ 厘米，求所作的功．

17.72. 弹性体所受压缩之力 F 与缩短距离 x 之间关系按虎克定律 $F=kx$ 计算．今有弹簧一个，原长为一米，每压缩一厘米需力 5 克。若自 80 厘米缩至 60 厘米，问作功若干？

17.73. 物体按规律 $x=ct^3$ 作直线运动，式中 x 为时间 t 内所通过的距离，媒质的阻力正比于速度的平方．试求物体由 $x=0$ 至 $x=a$ 点时阻力所作的功．

17.74. 半径等于 r 米的半球形水池，其中充满了水，把池内的水完全吸尽，需作多少功？

17.75. 有锥形贮水池，深 15 米，口径 20 米，满盛水，今以唧筒将水吸尽，问作功若干？

17.76. 有一水桶形如圆锥台，盛满了水．如果桶高为 3 米，其上下底的半径分别为 1 米及 2 米，试计算将桶中水吸尽所耗费的功．

17.77. 若沙的比重为 2，为要倒满一个半径为 r 米，高为 h 米的圆锥形沙堆，问需作多少功？

17.78*. 半径为 r 的球沉入水中，它与水面相接，球的比重为 1，

现将球从水中取出,要作多少功? [提示:取球心为原点.]

液体的压力

17.79. 水闸的门为矩形,宽 20 米,高 16 米,铅直立于水中,若它的上边与水平面相齐,求水作用在闸门上的压力.

17.80. 闸门的形状为等腰梯形,铅直立于水中,闸门的二水平的边的长分别为 200 米和 50 米,而高等于 10 米.若较长的上底与水的自由表面相齐,试计算水对闸门压力的大小.

17.81. 求水对垂直壁上的压力,这壁的形状为半圆形,半径为 a 米,且直径与水的表面相齐.

17.82. 薄板形状为一椭圆形,其轴为 $2a$ 和 $2b(a>b)$,此薄板的一半铅直沉入水中,而其短轴与水的表面相齐.计算液体对此薄板每面压力的大小.

17.83. 一块高为 a,底为 b 的等腰三角形薄板,垂直地沉没在水中,顶在下,底与水面相齐.试计算薄板每面所受压力.如果把它倒放,使它的顶与水面相齐,而底与水面平行,则压力又如何?

17.84. 一底为 8 厘米,高为 6 厘米的等腰三角形片,铅直地沉没在水中,顶在上,底在下且与水面平行,而顶离水面 3 厘米,试求它每面所受的压力.

17.85. 水坝中有一直立的矩形闸门,阔 10 米,深 6 米,闸门的上边平行于水面.试求:(a)水面在闸门顶上 8 米时闸门所受之压力;(b)如欲使所受之压力加倍,则水面应升高若干?

17.86. 边长为 a 和 b 的矩形薄板,与液面成 α 角斜沉于液体内,长边平行于液面而位于深 h 处.设 $a>b$,液体的比重为 w,求薄板每面上的液体压力.

17.87. 将一平面薄板垂直放置水中,证明此薄板所受的压力等于该薄板的重心处的压强与平面薄板的面积的乘积.

其他的应用

17.88. 一物体作直线运动，其速度由公式 $v=\sqrt{1+t}$ 米/秒给出，试求物体运动开始后 10 秒内所经过的路程.

17.89. 细直杆 AB 是均匀的，粗细到处一样，其长为 l，质量为 M，在其中垂线上距杆 a 单位处有质量为 m 的质点 w，试求该杆与 w 点之间的引力.

17.90. 一导线长为 $2l$，均匀带电，电荷线密度为 σ. 求在导线的中垂线上与导线距离为 a 处的电场强度.

17.91. 一均匀带电的圆板，其半径为 a，电荷密度为 σ，在过板的中心且垂直于板的直线上有一点，此点距板的距离为 b，求在此点的电场强度. 当 $a\gg b$ 时，电场强度如何？

第十八章 级数

在题 18.1—18.7 中，写出已给级数的前五项：

18.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

18.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}$.

18.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$.

18.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.

18.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$.

18.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}$.

18.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n(n+1)}}$.

在题 18.8—18.17 中，写出已给级数的一般项：

18.8. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$.

18.9. $\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\frac{1}{4\ln 4}+\cdots$.

18.10. $\frac{2}{1}-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{5}{4}+\frac{6}{5}-\cdots$.

18.11. $-\frac{1}{2}+0+\frac{1}{4}+\frac{2}{5}+\frac{3}{6}+\cdots$.

18.12. $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\frac{4}{17}+\cdots$. 18.13. $\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots$.

18.14. $1+\frac{1\cdot 3}{1\cdot 4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 4\cdot 7}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10}+\cdots$.

18.15. $\frac{2}{1}+\frac{2\cdot 5}{1\cdot 5}+\frac{2\cdot 5\cdot 8}{1\cdot 5\cdot 9}+\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot 11}{1\cdot 5\cdot 9\cdot 13}+\cdots$.

18.16. $\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{x}{2\cdot 4}+\frac{x\sqrt{x}}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{x^2}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots$.

18.17. $\frac{a^2}{3}-\frac{a^3}{5}+\frac{a^4}{7}-\frac{a^5}{9}+\cdots$.

在题 18.18—18.32 中,利用几何级数、调和级数的敛散性,以及无穷级数的基本性质,判定已给级数的敛散性:

18.18. $-\frac{8}{9}+\frac{8^2}{9^2}-\frac{8^3}{9^3}+\cdots$. 18.19. $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\cdots$.

18.20. $\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{\sqrt[4]{3}}+\cdots$.

18.21. $1!+2!+3!+4!+\cdots$. 18.22. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots$.

18.23. $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\cdots$. 18.24. $\frac{3}{2}+\frac{3^2}{2^2}+\frac{3^3}{2^3}+\cdots$.

18.25. $\frac{1}{11}+\frac{2}{12}+\frac{3}{13}+\cdots$. 18.26. $\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln^2 2}{2^2}+\frac{\ln^3 2}{2^3}+\cdots$.

18.27. $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+\cdots$. 18.28. $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots$.

18.29. $2+\frac{2}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\cdots$.

18.30. $\left(\frac{1}{6}+\frac{8}{9}\right)+\left(\frac{1}{6^2}+\frac{8^2}{9^2}\right)+\left(\frac{1}{6^3}+\frac{8^3}{9^3}\right)+\cdots$.

18.31. $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\cdots$.

18.32. $\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{10\cdot n}+\cdots$.

在题 18.33—18.40 中，根据级数收敛的定义判定已给级数的敛散性：

18.33. $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

18.34. $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[2n+1]{a}-\sqrt[2n-1]{a})$，其中 $a>0$.

18.35. $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

18.36. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots$.

18.37. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$.

18.38. $\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 16}+\cdots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}+\cdots$.

[提示：将一般项分解为 $\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}=\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right)$.]

18.39. $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots$.

[提示：将一般项分解为 $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n(n+1)}-\frac{A}{(n+1)(n+2)}$.]

18.40* $\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{2\pi}{6}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{6}+\cdots$.

[提示：先乘以 $2\sin\frac{\pi}{12}$. 再将一般项分解为二余弦函数之差.]

在题 18.41—18.49 中，利用比较判定法，判定已给级数的敛散性：

18.41. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$. 18.42. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots$.

18.43. $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{17}+\cdots$. 18.44. $1+\frac{1+2}{1+2^2}+\frac{1+3}{1+3^2}+\cdots$.

18.45. $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\cdots+\frac{n}{2n-1}+\cdots$.

18.46. $\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+4)}+\cdots$.

18.47*. $1+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\frac{4!}{4^4}+\cdots+\frac{n!}{n^n}+\cdots$.

18.48. $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2^2}+\sin\frac{\pi}{2^3}+\cdots$.

18.49. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$, 设 $a>0$.

在题 18.50—18.57 中，利用比值判定法，判定已给级数的敛散性：

18.50. $\frac{3}{2}+\frac{4}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{6}{2^4}+\cdots$. 18.51. $\frac{5}{1!}+\frac{5^2}{2!}+\frac{5^3}{3!}+\cdots$.

18.52. $\frac{1}{10}+\frac{2!}{10^2}+\frac{3!}{10^3}+\cdots$. 18.53. $\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+\frac{9}{27}+\cdots$.

18.54. $\frac{3}{1\cdot 2}+\frac{3^2}{2\cdot 2^2}+\frac{3^3}{3\cdot 2^3}+\cdots$. 18.55. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$.

18.56. $\frac{2}{1}+\frac{2\cdot 5}{1\cdot 5}+\cdots+\frac{2\cdot 5\cdots(3n-1)}{1\cdot 5\cdots(4n-3)}+\cdots$.

18.57. $\sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

在题 18.58—18.73 中，用适当的方法判定已给级数的敛散性：

18.58. $\frac{3}{4}+2\left(\frac{3}{4}\right)^2+3\left(\frac{3}{4}\right)^3+4\left(\frac{3}{4}\right)^4+\cdots$.

18.59. $\frac{1^4}{1!}+\frac{2^4}{2!}+\frac{3^4}{3!}+\frac{4^4}{4!}+\cdots$.

18.60. $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{3a+b}+\cdots\quad(a>0,b>0)$.

18.61. $\frac{2}{3}+\frac{3}{6}+\frac{4}{11}+\cdots+\frac{n+1}{n^2+2}+\cdots$.

18.62. $\frac{1}{2}+\frac{1\cdot2}{3\cdot4}+\frac{1\cdot2\cdot3}{4\cdot5\cdot6}+\cdots$. 18.63. $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{3\cdot2^3}+\frac{1}{5\cdot2^5}+\cdots$.

18.64. $\frac{1}{2\cdot1^2}+\frac{(2!)^2}{2\cdot2^2}+\frac{(3!)^2}{2\cdot3^2}+\cdots$.

18.65. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$.

18.66. $\frac{1000}{1}+\frac{1000\cdot1001}{1\cdot3}+\frac{1000\cdot1001\cdot1002}{1\cdot3\cdot5}+\cdots$.

18.67. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)}$.

18.68. $\frac{1000}{1!}+\frac{1000^2}{2!}+\frac{1000^3}{3!}+\cdots$.

18.69. $\sqrt{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}+\cdots+\sqrt{\frac{n+1}{n}}+\cdots$.

18.70. $\frac{1}{1001}+\frac{2}{2001}+\cdots+\frac{n}{1000\cdot n+1}+\cdots$.

18.71. $\frac{1}{1+1^2}+\frac{2}{1+2^2}+\cdots+\frac{n}{1+n^2}+\cdots$.

18.72. $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$. 18.73. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}$.

在题 18.74—18.84 中,判定已给级数是否收敛,如果是收敛的,是绝对收敛呢,还是条件收敛?

18.74. $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$.

18.75. $1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\cdots$.

18.76. $1-\frac{1}{3}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}+\cdots$.

18.77. $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 5}+\cdots$.

18.78. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{3^{n-1}}$.

18.79. $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^4}+\cdots$.

18.80. $\frac{1}{2}-\frac{8}{4}+\frac{27}{8}-\frac{64}{16}+\cdots$. 18.81. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{n^2}}{n!}$.

18.82. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\frac{n^{10}}{2^n}=$

$$=\frac{1^{10}}{2}-\frac{2^{10}}{2^2}-\frac{3^{10}}{2^3}+\frac{4^{10}}{2^4}+\frac{5^{10}}{2^5}-\frac{6^{10}}{2^6}-\frac{7^{10}}{2^7}+\cdots.$$

18.83. $\frac{1}{\pi^2}\sin\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\pi^3}\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{\pi^4}\sin\frac{\pi}{4}-\cdots$.

18.84*. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$. [提示：如果 $|a|>|b|>0$，则 $\frac{1}{|a|}<\frac{1}{|b|}$.]

18.85*. 研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 的绝对收敛和条件收敛性。

在题 18.86—18.94 中，不经过求积分，判定广义积分的敛散性：

18.86*. $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+x^2+1}dx$. 18.87*. $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$.

18.88. $\int_1^2\frac{dx}{\ln x}$. 18.89. $\int_1^2\frac{dx}{(\ln x)^3}$.

18.90. $\int_0^1\frac{x^4}{\sqrt{1-x^4}}dx$. 18.91. $\int_1^2\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$.

18.92. $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$. [提示：$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2-3x+2}}=$

$$=\int_2^3\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2-3x+2}}+\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2-3x+2}}.\Big]$$

18.93. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}dx$. [提示：$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}dx=$

$=\int_0^1\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}dx$，又当 $x\to\infty$ 时 $|\sin x|\leqslant 1$.]

18.94. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^p x\cdot\cos^q x}$ $(p,q>0)$. [提示：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^p x\cdot\cos^q x}=$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sin^p x\cdot\cos^q x}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^p x\cdot\cos^q x}$.]

18.95. 计算积分 $\int_0^{+\infty}x^4e^{-x^4}dx$.

18.96. 计算积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-x^4}dx$.

18.97. 计算积分 $\int_0^{+\infty}x^ne^{-h^2x^2}dx$ $(n\geqslant 0)$.

18.98. 计算积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}x^ne^{-h^2x^2}dx$ （n 是非负整数）.

18.99. 计算积分 $\int_1^{+\infty}xe^{-x^2+2x}dx$. [提示：令 $t=(x-1)^2$.]

18.100. 计算积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-x^2+2x}dx$. [提示：$\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-x^2+2x}dx=$

$=\int_{-\infty}^{1}xe^{-x^2+2x}dx+\int_1^{+\infty}xe^{-x^2+2x}dx$，

计算 $\int_{-\infty}^{1}xe^{-x^2+2x}dx$ 时先令 $\xi=-x$，次令 $t=(\xi+1)^2$.]

18.101. 计算积分 $\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\ln x\,dx$. [提示：令 $x=e^{-t}$.]

18.102. 计算积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx$.

18.103. 计算积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}dx \quad (\alpha>1)$.

在题 18.104—18.122 中,求已给级数的收敛区间:

18.104. $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$. 18.105. $\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n$.

18.106. $\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2\cdot 4}+\frac{x^3}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots$. 18.107. $1-x+\frac{x^2}{2^2}-\frac{x^3}{3^2}+\cdots$.

18.108. $\frac{x}{1\cdot 3}+\frac{x^2}{2\cdot 3^2}+\frac{x^3}{3\cdot 3^3}+\frac{x^4}{4\cdot 3^4}+\cdots$.

18.109. $\frac{2}{2}x+\frac{2^2}{5}x^2+\frac{2^3}{10}x^3+\cdots+\frac{2^n}{n^2+1}x^n+\cdots$.

18.110. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x+1)^n}{n}$. 18.111. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$.

18.112. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{5n}$. 18.113. $\sum_{n=1}^{\infty}(x-3)^n$.

18.114. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. 18.115. $x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\frac{x^5}{5\cdot 5!}-\cdots$.

18.116. $\frac{x-3}{1-3}+\frac{(x-3)^2}{2-3^2}+\cdots+\frac{(x-3)^n}{n-3^n}+\cdots$.

18.117. $(2x+1)+\frac{(2x+1)^2}{2}+\frac{(2x+1)^3}{3}+\cdots$.

18.118. $1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\frac{\theta^6}{6!}+\cdots$.

18.119. $\lg x+(\lg x)^2+(\lg x)^3+\cdots$.

18.120. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{x^n}$. 18.121*. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$.

18.122*. $x+x^4+x^9+x^{16}+x^{25}+\cdots$.

在题 18.123 18.128 中,利用逐项求导或逐项积分,求各级数在收敛区间内的和:

18.123. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$, $|x|<1$. 18.124. $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$, $|x|<1$.

18.125. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}$, $|x|<1$. [提示：利用18.124的结果.]

18.126. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$, $|x|<\sqrt{2}$; 并求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$.

18.127. $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots$, $|x|<1$; 并求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^n}$.

18.128. $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots$, $|x|<1$; 并求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

在题18.129—18.143中，展开已给函数为x的幂级数，并求其收敛区间:

18.129. $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

18.130. $\operatorname{ch} x$.

18.131. $\ln(a+x)$.

18.132. a^x.

18.133. $\sin\frac{x}{2}$.

18.134. $\cos^2 x$.

18.135. $\sin^2 x$.

18.136*. $\sqrt[3]{8-x^3}$.

18.137*. $\frac{x}{\sqrt{1-2x}}$.

18.138*. $\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$.

18.139. $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$.

18.140. $\ln(1+x-2x^2)$.

18.141. $(1+x)\ln(1+x)$.

18.142*. $e^x\sin x$. [提示：$e^{(1+i)x}=e^x(\cos x+i\sin x)$, $(1+i)^2=(2i)$.]

18.143*. $\arcsin x$.

18.144. 设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, 求 $F(x)=\frac{f(x)}{1-x}$ 的展开式.

在题18.145—18.147中，展开已给函数为$(x-1)$的幂级数，并求其收敛区间:

18.145. $\sqrt{x^3}$.

18.146. $\lg x$.

18.147. $\frac{1}{x}$.

18.148. 展开函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 为$(x-3)$的幂级数。

18.149. 展开函数 $\cos x$ 为$\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$的幂级数。

18.150*. 展开函数 $\frac{1}{x^2+3x+2}$ 为$(x+4)$的幂级数。

在题 18.151—18.162 中，利用函数的幂级数展开式，求已给函数值的近似值：

18.151. $\ln 3$（精确到 0.0001）. **18.152.** e^2（精确到 0.001）.

18.153. $\frac{1}{e}$（精确到 0.0001）. **18.154.** $\sqrt{e}$（精确到 0.001）.

18.155. $\frac{1}{10.3}$（精确到 0.0001）. **18.156.** $\frac{1}{\sqrt[3]{65}}$（精确到 0.0001）.

18.157. $\sqrt[3]{1.015}$（精确到 0.001）.

18.158. $\sqrt[5]{250}$（精确到 0.001）. **18.159*.** $\sqrt[5]{30}$（精确到 0.0001）.

18.160. $\sqrt{\frac{25}{26}}$（精确到 0.0001）.

18.161. $\sin 1^\circ$（精确到 0.0001）.

18.162. $\cos 10^\circ$（精确到 0.0001）.

在题 18.163—18.167 中，计算已给定积分的近似值：

18.163. $\int_0^{0.5}\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}dx$（精确到 0.001）.

18.164. $\int_0^{0.8}x^{10}\sin x\,dx$（精确到 0.0001）.

18.165. $\int_0^{0.5}\frac{1}{1+x^4}dx$（精确到 0.001）.

18.166. $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx$（精确到 0.0001）.

18.167. 计算 $\int_{0.1}^1\frac{e^x}{x}dx$（就被积函数所展成的级数取六项来计算

近似值).

第十九章 富里哀级数

19.1. 展开函数 $f(x)=2x^2(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$ 为富里哀级数.

19.2. 展开函数 $f(x)=x^3(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$ 为富里哀级数.

19.3. 展开函数 $f(x)=2\sin\frac{x}{3}(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$ 为富里哀级数.

19.4. 展开函数 $f(x)=\cos\frac{x}{2}(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$ 为富里哀级数.

19.5. 展开函数 $f(x)=e^x+1(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$ 为富里哀级数.

19.6. 展开函数 $f(x)=e^{ax}(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$ 为富里哀级数(常数 $a\neq 0$).

19.7. 展开函数 $f(x)=\begin{cases}bx, & -\pi<x<0,\\ ax, & 0\leqslant x<\pi\end{cases}$ 为富里哀级数(a,b 为常数).

19.8. 展开函数 $f(x)=e^{-x}+x(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$ 为富里哀级数.

19.9. 展开函数 $f(x)=\begin{cases}-\pi, & -\pi\leqslant x<0,\\ 3x^2+1, & 0\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$ 为富里哀级数.

19.10. 展开函数 $f(x)=\begin{cases}e^x, & -\pi\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$ 为富里哀级数.

19.11. 展开函数 $f(x)=\begin{cases}-\frac{\pi}{2}, & -\pi\leqslant x<-\frac{\pi}{2},\\ x, & -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2}<x\leqslant\pi\end{cases}$ 为富里哀级数.

19.12. 展开函数 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\leqslant x<-\frac{\pi}{2},\\ 1, & -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 0,\\ 2, & 0<x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ 3, & \frac{\pi}{2}<x\leqslant\pi\end{cases}$ 为富里哀级数.

19.13. 展开函数 $f(x)=2x^2(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 为正弦级数.

19.14. 展开函数 $f(x)=\frac{\pi-x}{2}(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 为正弦级数.

19.15. 展开函数 $f(x)=2x+3(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 为余弦级数.

19.16. 展开函数 $f(x)=e^{2x}(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 为余弦级数.

19.17. 展开函数 $f(x)=-\sin\frac{x}{2}+1(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 为正弦级数.

19.18. 展开函数 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant h,\\ 0, & h<x\leqslant\pi\end{cases}$ 为余弦级数.

19.19. 展开函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{2h}{\pi}x, & 0\leqslant x<\frac{\pi}{2},\\ 2h-\frac{2h}{\pi}x, & \frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$ 为正弦级数.

19.20. 展开函数 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ x+1, & \frac{\pi}{2}<x\leqslant\pi\end{cases}$ 为余弦级数.

19.21. 展开函数 $f(x)=\begin{cases}-5, & 0<x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ 2x^2, & \frac{\pi}{2}<x\leqslant\pi\end{cases}$ 为余弦级数.

19.22. 展开函数 $f(x)=x^2-x(-2\leqslant x\leqslant 2)$ 为富里哀级数.

19.23. 展开函数 $f(x)=-x^2+1\left(-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\right)$ 为富里哀级数.

19.24. 展开函数 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{l}{2}, \\ l-x, & \dfrac{l}{2}<x\leqslant l \end{cases}$ 为正弦级数.

19.25. 展开函数 $f(x)=\begin{cases} 2x+1, & -3\leqslant x\leqslant 0, \\ x, & 0<x\leqslant 3 \end{cases}$ 为富里哀级数.

19.26. 展开函数 $f(x)=\begin{cases} x, & -1\leqslant x<0, \\ 1, & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{2}, \\ -1, & \dfrac{1}{2}<x\leqslant 1 \end{cases}$ 为富里哀级数.

19.27*. 展开函数 $f(x)=\begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{l}, & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{l}{2}, \\ 0, & \dfrac{l}{2}<x<l \end{cases}$ 为余弦级数.

19.28. 展开函数 $f(x)=\cos\dfrac{\pi x}{l}\left(-\dfrac{l}{2}\leqslant x\leqslant \dfrac{l}{2}\right)$ 为富里哀级数(常数 $l>0$).

第二十章　多元函数的微分法及其应用

多元函数

20.1. 求 $x=\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{3})$, $y=\dfrac{1}{2}(1-\sqrt{3})$ 时函数 $z=\left[\dfrac{\operatorname{arc\,tg}(x+y)}{\operatorname{arc\,tg}(x-y)}\right]^2$ 的值.

20.2. 已给函数 $f(u,v)=u^v$, 试求 $f(xy,x+y)$.

20.3. 已给函数 $f(u,v,w)=u^w+w^{u+v}$, 试求 $f(x+y,x-y,xy)$.

20.4. 已给函数 $f(x, y)=x^2+y^2-xy\ \operatorname{tg}\dfrac{x}{y}$,试求 $f(tx, ty)$.

20.5. 试证函数 $F(x,y)=\ln x\ln y$ 满足关系式

$$F(xy, uv)=F(x, u)+F(x, v)+F(y, u)+F(y, v).$$

20.6. 试证函数 $F(x,y)=xy$ 满足关系式

$$F(ax+by, cu+dv)=acF(x, u)+bcF(y, u)+adF(x, v)+bdF(y, v).$$

20.7. 函数 $z=\left(\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}\right)^{xy}$ 是经过怎样的两个关系式复合而成的?

20.8. 若函数 $z=f(x,y)$ 恒满足关系式 $f(tx, ty)=t^k f(x,y)$ 就叫做 k 次齐次函数. 试证 k 次齐次函数 $z=f(x, y)$ 能化成 $z=x^kF\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 的形式.

在题 20.9—20.22 中,求各函数的定义域:

20.9. $u=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{z}}$.

20.10. $z=\ln xy$.

20.11. $z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$.

20.12. $z=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$.

20.13. $z=\ln(y^2-4x+8)$.

20.14. $z=\arcsin\dfrac{y}{x}$.

20.15. $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$.

20.16. $z=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$.

20.17. $z=\sqrt{x\sin y}$.

20.18. $z=\arcsin\dfrac{x^2+y^2}{4}+\operatorname{arc\,sec}(x^2+y^2)$.

20.19. $z=\operatorname{ctg}\pi(x+y)$.

20.20. $z=xy+\sqrt{\ln\dfrac{R^2}{x^2+y^2}}+\sqrt{x^2+y^2-R^2}$.

20.21. $z=\ln[x\ln(y-x)]$.

20.22. $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}$ $(R>r>0)$.

在题 20.23—20.27 中，求各极限：

20.23. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$.

20.24. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{(x+y)}$.

20.25. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(xy)}{x}$.

20.26. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$.

20.27. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$.

20.28. 验证当$(x,y)\to(0,0)$时，$u=\dfrac{x+y}{x-y}$的极限不存在．(x,y)以怎样的方式趋于$(0,0)$时能使 (a) $\lim u=1$，(b) $\lim u=2$？

20.29. 函数 $z=\dfrac{1}{x-y}$ 在何处是间断的？

20.30. 函数 $z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$ 在何处是间断的？

偏 导 数

20.31. 设 $f(x,y)=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$，求 $f'_x(3,4)$.

20.32. 设 $z=\ln\left(x+\dfrac{y}{2x}\right)$，求 $\left[\dfrac{\partial z}{\partial y}\right]_{\substack{x=1\\ y=0}}$.

20.33. 设 $z=(1+xy)^y$，求 $\left[\dfrac{\partial z}{\partial x}\right]_{\substack{x=1\\ y=1}}$ 及 $\left[\dfrac{\partial z}{\partial y}\right]_{\substack{x=1\\ y=1}}$.

20.34. 设 $z=\dfrac{x\cos y-y\cos x}{1+\sin x+\sin y}$，求 $\left[\dfrac{\partial z}{\partial x}\right]_{\substack{x=0\\ y=0}}$ 及 $\left[\dfrac{\partial z}{\partial y}\right]_{\substack{x=0\\ y=0}}$.

20.35. 设 $u=\sqrt{\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z}$，求 $\left[\dfrac{\partial u}{\partial z}\right]_{\substack{x=0\\ y=0\\ z=\frac{\pi}{4}}}$.

20.36. 设 $f(x,y)=e^{-x}\sin(x+2y)$，求 $f'_x\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 与 $f'_y\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$.

20.37. 设 $u=\ln(1+x+y^2+z^3)$，当 $x=y=z=1$ 时求 $u'_x+u'_y+$ $+u'_z$.

在题 20.38—20.57 中，求各函数对于每一个自变量的偏导数:

20.38. $z=\dfrac{xe^y}{y^2}$.

20.39. $z=\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{y}$.

20.40. $z=\arcsin(y\sqrt{x})$.

20.41. $z=\ln\sin(x-2y)$.

20.42. $z=\sin\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x}$.

20.43. $z=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-\frac{y}{x}}$.

20.44. $z=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x^y}$.

20.45. $z=\dfrac{1}{\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}}$.

20.46. $l=\rho e^{\pi\cos\varphi}$.

20.47. $z=xye^{\sin\pi xy}$.

20.48. $z=\ln(x+\ln y)$.

20.49. $z=\sqrt{x}\sin\dfrac{y}{x}$.

20.50. $u=\sin(x^2+y^2+z^2)$.

20.51. $u=x^{\frac{y}{z}}$.

20.52. $u=x^{y^z}$.

20.53. $u=\operatorname{arc\,tg}(x-y)^z$.

20.54. $u=e^{x(x^2+y^2+z^2)}$.

20.55. $z=\dfrac{e^{xy}}{e^x+e^y}$.

20.56. $u=\rho e^{t\varphi}+e^{-\varphi}+t$.

20.57. $u=e^{\varphi+\theta}\cos(\theta-\varphi)$.

20.58. 曲线 $\begin{cases} z=\dfrac{x^2+y^2}{4}, \\ y=4 \end{cases}$ 在点 $(2,4,5)$ 处的切线与横轴的正向所成的角度是多少?

20.59. 曲线 $\begin{cases} z=\sqrt{1+x^2+y^2}, \\ x=1 \end{cases}$ 在点 $(1,1,\sqrt{3})$ 处的切线与 y 轴的正向所成的角度是多少?

20.60. 二曲面 $z=x^2+\dfrac{y^2}{6}$ 和 $z=\dfrac{x^2+y^2}{3}$ 与平面 $y=2$ 相交的曲线交成什么角度?

20.61. 设 $z=\ln(\sqrt{x}+\sqrt{y})$，求证 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}$.

20.62. 设 $z=e^{\frac{x}{y^2}}$，求证 $2x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

20.63. 设 $z=x^y$，求证 $\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y}=2z$.

20.64. 设 $T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$，求证 $l\frac{\partial T}{\partial l}+g\frac{\partial T}{\partial g}=0$.

全微分及其应用

在题 20.65—20.69 中，求函数的全微分：

20.65. $u=\frac{s+t}{s-t}$.

20.66. $z=\arcsin\frac{x}{y}$.

20.67. $u=\ln(3x-2y+z)$.

20.68. $u=e^{x(x^2+y^2+z^2)}$.

20.69. $u=x^{yz}$.

20.70. 求函数 $z=x^2y^3$ 当 $x=2, y=-1, \Delta x=0.02, \Delta y=-0.01$ 时的全微分及全增量.

20.71. 求 $z=\frac{y}{x}$ 当 $x=2, y=1, dx=0.1, dy=0.2$ 时的全微分及全增量.

20.72. 计算函数 $z=2x^2+3y^2$ 当 $x=10, y=8, \Delta x=0.2, \Delta y=0.3$ 时的 Δz 及 dz，并估计用 dz 来替代 Δz 所产生的相对误差.

20.73. 试求当 $x=2$，$y=1$，$\Delta x=0.01$，$\Delta y=0.03$时，函数 $z=\frac{xy}{x^2-y^2}$ 的全微分的值.

20.74. 试求当 $x=1$，$y=1$，$\Delta x=0.15$，$\Delta y=0.1$ 时，函数 $z=e^{xy}$ 的全微分的值.

20.75. 计算 $\sqrt{(1.02)^3+(1.97)^3}$ 的近似值.

20.76. 计算 $\ln(\sqrt[3]{1.03}+\sqrt[4]{0.98}-1)$ 的近似值.

20.77. 计算$(10.1)^{2.03}$的近似值.

20.78. 已知边长 $x=6$ 米与 $y=8$ 米的矩形，如果 x 边增加 5 厘米而 y 边减少 10 厘米，问这个矩形的对角线的近似变化怎样？

20.79. 设有一圆柱体，它的底半径 R 由 2 厘米增到 2.05 厘米，其高 H 由 10 厘米减到 9.8 厘米，试求其体积 V 的近似变化.

20.80. 有一用水泥做成的开顶长方形水池，它的外形长 5 米，宽 4 米，高 3 米，又它的四壁及底的厚度为 20 厘米，试求所需水泥量的近似值和精确值.

20.81. 扇形中心角 $\alpha=60°$，半径 $R=20$ 米，如果将中心角增加 1°，为了使扇形面积仍然不变，应把扇形半径减少若干？（近似值）.

20.82. 设有直角三角形，其两腰的测量值为 7 厘米与 24 厘米，测量的精确度到 0.1 厘米. 试求利用上述二值来计算斜边长度时的误差.

20.83. 当圆锥体形变时，它的底半径 R 由 30 增到 30.1 厘米，高 H 由 60 厘米减到 59.5 厘米. 试求体积变化的近似值.

20.84. 若量得一三角形两边的长分别为 63 ± 0.1 米及 78 ± 0.1 米，其夹角为 $60°\pm1°$. 求从这些数据用余弦定律计算这三角形的第三边时的误差及相对误差.

20.85. 利用全微分，试证乘积的相对误差等于各因子的相对误差之和；又商的相对误差等于被除数及除数的相对误差之和.

20.86. 在直角坐标系中弧微分公式为 $(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2$，试导出在极坐标系中弧微分公式.

复合函数的微分法

20.87. 设 $z=x^2y-xy^2$，而 $x=u\cos v$，$y=u\sin v$，求 $\frac{\partial z}{\partial u}$，$\frac{\partial z}{\partial v}$.

20.88. 设 $z=x^2\ln y$，而 $x=\frac{u}{v}$，$y=3u-2v$，求 $\frac{\partial z}{\partial u}$，$\frac{\partial z}{\partial v}$.

20.89. 设 $z=\frac{y}{x}$, 而 $x=e^t$, $y=1-e^{2t}$, 求 $\frac{dz}{dt}$.

20.90. 设 $z=e^{x-2y}$, 而 $x=\sin t$, $y=t^3$, 求 $\frac{dz}{dt}$.

20.91. 设 $z=\arcsin(x-y)$, 而$x=3t$, $y=4t^3$, 求 $\frac{dz}{dt}$.

20.92. 设 $z=\operatorname{arc\,tg}(xy)$, 而 $y=e^x$, 求 $\frac{dz}{dx}$.

20.93. 设 $z=\operatorname{tg}(3t+2x^2-y)$, 而 $x=\frac{1}{t}$, $y=\sqrt{t}$, 求 $\frac{dz}{dt}$.

20.94. 若 $z=\frac{x^2}{y}$, 而 $x=u-2v$, $y=v+2u$, 求 $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$.

20.95. 设 $u=\frac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$, 而 $y=a\sin x$, $z=\cos x$, 求 $\frac{du}{dx}$.

20.96. 设 $z=(x^2+y^2)e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}$, 求 dz.

20.97. $z=(2x+y)^{2x+y}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

20.98. $z=x^{xy}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

20.99. 若 $u=F(x,y)$, 而 $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, 求 $\frac{\partial u}{\partial r}$, $\frac{\partial u}{\partial \varphi}$.

20.100. 验证函数$z=\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}$, 其中 $x=u+v$, $y=u-v$, 满足关系式 $\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{u-v}{u^2+v^2}$.

20.101. 设 $z=xy+xF(u)$, 而 $u=\frac{y}{x}$, 证明 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z+xy$.

20.102. 设 $z=u^v$, 而 u, v 均为 x 的函数,求 $\frac{dz}{dx}$.

20.103. 设 $z=f(x^2-y^2, e^{xy})$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

20.104. 设 $z=\frac{y}{f(x^2-y^2)}$, 其中 f 为可微分函数, 验证: $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+$

$+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$.

20.105. 试证明零次齐次可微分函数 $z=F\left(\frac{y}{x}\right)$ 满足关系式 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

20.106. 设 $z=\frac{y^2}{3x}+\varphi(xy)$，验证：$x^2\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial z}{\partial y}+y^2=0$.

20.107. 若函数 $f(x,y,z)$ 恒满足关系式 $f(tx,ty,tz)=t^kf(x,y,z)$，就称为 k 次齐次函数. 试证明 k 次齐次函数 $f(x,y,z)$ 满足关系式

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=kf.$$

20.108. 一圆柱形的容器充气后膨胀，如果体积每秒增加 27 立方厘米，半径每秒增加 0.003 厘米. 试求当体积和半径分别为 1.18 立方米和 0.6 米时，其长度的增加速率.

20.109. 一圆锥体如果它的高以每秒 10 厘米的速率减小，底半径以每秒 5 厘米的速率增加着. 试求当高为 100 厘米，底半径为 50 厘米时，其体积的变化率.

高阶偏导数

在题 20.110—20.116 中，由所给函数求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$:

20.110. $z=\sin^2(ax+by)$.

20.111. $z=\arcsin(xy)$.

20.112. $z=y^{\ln x}$.

20.113. $z=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$.

20.114. $z=e^{xe^y}$.

20.115. $z^3-3xyz=a^3$.

20.116. $x+y+z=e^{-(x+y+z)}$.

20.117. 设 $z=x^y$，验证 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

20.118. 设 $z=x^{2y}$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

20.119. 设 $z=e^x(\cos y+x\sin y)$, 验证 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

20.120. 设 $z=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$, 验证 $\frac{\partial^3 z}{\partial y^2\partial x}=\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$.

20.121. 设 $z=\ln(e^x+e^y)$, 验证 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0$.

20.122. 若 $u=z\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}$, 试证明 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$.

20.123. 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 证明

$$\frac{\partial^2(\ln r)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(\ln r)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2(\ln r)}{\partial z^2}=\frac{1}{r^2}.$$

20.124. 设 $u=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}$, 验证 $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

20.125. 设 $u=f(x, y)$, 而 $x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha$, $y=x'\sin\alpha+$ $+y'\cos\alpha$. 求证

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y'}\right)^2 \text{及} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y'^2}.$$

20.126. 设 $f(x, y, z)=xy^2+yz^2+zx^2$, 求 $f''_{xx}(0, 0, 1)$, $f''_{xz}(1, 0, 2)$, $f''_{yz}(0, -1, 0)$ 及 $f'''_{zzx}(2, 0, 1)$.

20.127. 设 $z=2\cos^2\left(x-\frac{t}{2}\right)$, 求证 $2\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial t}=0$.

20.128. 设 $u=f(x, y)$, 而 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$. 求证 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+$ $+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}$.

20.129. 设 $u=f(x, y)$, 而 $x=e^s\cos t$, $y=e^s\sin t$, 求证 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+$ $+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=e^{-2s}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)$.

20.130. 设 $u=f(x^2+y^2+z^2)$，求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

20.131. 设 $u=f\left(x, \dfrac{x}{y}\right)$，求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

20.132. 设 $u=f(x, xy, xyz)$，求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}$.

20.133. 设 $y=\varphi(x+\mu t)+\psi(x-\mu t)$，其中 φ，ψ 是任意的二次可微分函数. 求证 $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\mu^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$.

20.134. 设 $z=xf\left(\dfrac{y}{x}\right)+(x-1)y \ln x$，其中 f 是任意的二次可微分函数. 求证 $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(x+1)y$.

20.135. 设 $z=f[x+\varphi(y)]$，其中 φ 是可微分函数，f 是二次可微分函数. 求证 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

20.136. 在函数 $u=f(x, y, z)$ 中，

(a) 令 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，$z=z$，证明

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2};$$

(b) 再令(a)中之 ρ, z, φ 依次为

$\rho=r\sin\varphi$，$z=r\cos\varphi$，$\theta=\theta$，证明

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+$$

$$+\frac{1}{r^2\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

20.137. 设 $u=f(s)+g(t)$，其中 $s=x-y$，$t=x+y$.

验证 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

20.138. 设 $z=f(x, y)$，$u=x+ay$，$v=x-ay$.

证明　$a^2z_{xx}-z_{pp}=4a^2z_{uv}$.

20.139. 证明在微分方程 $z_{xx}+2xy^2z_x+2(y-y^3)z_y+x^2y^2z=0$ 中，令 $x=uv$, $y=\frac{1}{v}$, 则方程的形式不变.

20.140. 在微分方程 $u^2z_{uu}-2uvz_{uv}+v^2z_{vv}+2vz_v=0$ 中，若令 $u^2=xy$, $v^2=\frac{x}{y}$, 则此方程应取怎样的形式？

隐函数的微分法

在题 20.141—20.145 中，求 $\frac{dy}{dx}$:

20.141. $xy-\ln y=0$.　　20.142. $\sin y+e^x-xy^2=0$.

20.143. $\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{a}-\frac{y}{a}=0$.　　20.144. $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$.

20.145. $xy+\ln y+\ln x=0$.

在题 20.146—20.150 中，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial x}{\partial y}$:

20.146. $x+2y+z-2\sqrt{xyz}=0$.

20.147. $e^z-xyz=0$.　　20.148. $x^3+y^3+z^3-3axyz=0$.

20.149. $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$.　　20.150. $z^2y-xz^3-1=0$.

20.151. 设 $xyz=a^3$, 证明 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=-2z$.

20.152. 设 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$, 证明 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$.

20.153. 求由方程 $\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z=1$ 所确定的函数 $z=f(x, y)$ 的全微分 dz.

20.154. 求由方程 $2xz-2xyz+\ln xyz=0$ 所确定的函数 $z=f(x,y)$ 的全微分.

20.155. 求出当 $x=2.001$, $y=0.998$ 时，由方程 $2xz-2xyz+\ln xyz=0$ 所确定的函数 z 的近似值.

20.156. 证明由方程 $\varphi(cx-az,\ cy-bz)=0$ (φ 为任意的可微分函数)所定义的函数 $z=z(x,y)$ 满足关系式 $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c$.

20.157. 证明方程 $ax+by+cz=F(x^2+y^2+z^2)$ (F 是任意的可微分函数)所定义的函数 $z=z(x,\ y)$ 满足关系式

$$(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}=bx-ay.$$

20.158. 函数 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2+z^2=yf\left(\frac{z}{y}\right)$ 所确定，证明

$$(x^2-y^2-z^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xz.$$

20.159. 函数 $z=z(x,\ y)$ 由方程 $F(x+zy^{-1},\ y+zx^{-1})=0$ 所确定，证明 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy$.

20.160. 若 $F(x,y,z,u)=0$, 则 $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}=1$.

20.161. 设 $y=f(x,t)$ 而 t 是由方程 $F(x,y,t)=0$ 所确定的 x,y 的函数. 试证明

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial t}}.$$

20.162. 设 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

20.163. 设 $y^3+x^3-3axy=0$, 求 y''.

20.164. 设 $e^{x+y}=xy$, 验证 $y''=-\frac{y[(x-1)^2+(y-1)^2]}{x^2(y-1)^3}$.

20.165. $y=\operatorname{tg}(x+y)$, 验证 $\frac{d^3y}{dx^3}=-\frac{2(3y^4+8y^2+5)}{y^8}$.

20.166. 设 $x^2+y^2+z^2=4z$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

20.167. $e^z-xyz=0$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

20.168. $z^3-2xz+y=0$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

20.169. 验证由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的函数 $y=f(x)$ 的二阶导数为

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{F_{xx}(F_y)^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}(F_x)^2}{(F_y)^3}.$$

20.170. 验证曲线 $F(x,y)=0$ 在点 $M(x,y)$处的曲率半径为

$$R=\left|\frac{[(F_x)^2+(F_y)^2]^{\frac{3}{2}}}{F_{xx}(F_y)^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}(F_x)^2}\right|.$$

空間曲綫的切綫及法平面

20.171. 求曲线 $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$, $z=4\sin\frac{t}{2}$，在点 $\left(\frac{\pi}{2}-1, 1, 2\sqrt{2}\right)$处的切线及法平面方程.

20.172. 求曲线 $x=\frac{t}{1+t}$, $y=\frac{1+t}{t}$, $z=t^2$ 在点 $t=1$ 处的切线及法平面方程.

20.173. 求 $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ 在 $t=\frac{\pi}{4}$ 处的切线与法平面的方程.

20.174. 证明曲线 $y=\varphi(x)$, $z=\psi(x)$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切线及法平面方程分别为

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=x_0}}$$

及 $$(x-x_0)+\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}(y-y_0)+\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=x_0}(z-z_0)=0,$$

并求曲线 $y^2=2mx$, $z^2=m-x$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切线及法平面方程.

20.175. 证明曲线 $F(x,y,z)=0$, $G(x,y,z)=0$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切线及法平面方程分别为

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}_0}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}F_z & F_x\\ G_z & G_x\end{vmatrix}_0}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}_0}$$

及 $\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}_0(x-x_0)+\begin{vmatrix}F_z & F_x\\ G_z & G_x\end{vmatrix}_0(y-y_0)+\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}_0(z-z_0)=0$,

并求圆周 $x^2+y^2+z^2-3x=0, 2x-3y+5z-4=0$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切线及法平面的方程.(方程中$|\quad|_0$系$|\quad|_{\substack{x=x_0\\y=y_0\\z=z_0}}$的简写.)

20.176. 在曲线 $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ 上求出一点，使在该点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.

20.177. 求曲线 $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=a\ln\cos t$ 自点$(a,0,0)$到点$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}a, -\frac{a}{2}\ln 2\right)$之弧长.

20.178. 求曲线 $x=3\theta\cos\theta$, $y=3\theta\sin\theta$, $z=4\theta$ 在对应于 $\theta=0$ 及 $\theta=4$ 两点间一段弧的长度.

20.179. 求曲线 $x=2t, y=t^2-2, z=1-t^2$ 对应于 $t=0$ 及 $t=2$ 两点间的一段弧的长度.

20.180. 证明曲线 $y=\varphi(x)$, $z=\psi(x)$ 上自 $x=x_1$ 到 $x=x_2$ 的弧长为

$$s=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx,$$

并求曲线 $y=a\arcsin\frac{x}{a}, z=\frac{a}{4}\ln\frac{a+x}{a-x}$ 由原点到点$\left(\frac{a}{2}, \frac{a\pi}{6}, \frac{a}{4}\ln 3\right)$的弧长.

20.181. 证明曲线 $F(x,y,z)=0, G(x,y,z)=0$ 上自点(x_1,y_1,z_1)

至点 (x_2, y_2, z_2) 的弧长为

$$s=\int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{J_1^2+J_2^2+J_3^2}}{|J_1|} dx,$$

其中 $$J_1=\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}, \quad J_2=\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}, \quad J_3=\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}.$$

并求曲线 $x^2=3y, 2xy=9z$ 由点(0, 0, 0)至点(3, 3, 2)的弧长.

曲面的切平面及法线

20.182. 求曲面 $e^z-z+xy=3$ 在点(2, 1, 0)处的切平面与法线方程.

20.183. 求曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 在点(3, 1, 1)处的切平面与法线方程.

在题 20.184—20.187 中,求已知曲面在指定点处的切平面及法线的方程:

20.184. $x^2-xy-8x+z+5=0$ 在点(2, −3, 1)处.

20.185. $ax^2+by^2+cz^2=1$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处.

20.186. $z=ax^2+by^2$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处.

20.187. $z=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}$ 在点 $\left(1, 1, \dfrac{\pi}{4}\right)$ 处.

20.188. 求椭球面 $x^2+2y^2+z^2=1$ 上平行于平面 $x-y+2z=0$ 的切平面方程.

20.189. 在曲面 $z=xy$ 上求一点, 使这点处的法线垂直于平面 $x+3y+z+9=0$, 并写出这法线的方程.

20.190. 试证曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}\,(a>0)$ 上, 任何点处的切平面在各坐标轴上的截距之和等于 a.

20.191. 求椭球面 $3x^2+y^2+z^2=16$ 上点(−1, −2, 3)处的切平面与平面 $z=0$ 的交角.

20.192. 求球面 $x^2+y^2+z^2=14$ 与椭球面 $3x^2+y^2+z^2=16$ 在点

$(-1, -2, 3)$处的交角.

[注：两曲面在交点处的切平面的交角定义为两曲面的交角.]

20.193. 证明两曲面 $F(x, y, z)=0$ 及 $G(x, y, z)=0$ 在其交点 (x_0, y_0, z_0) 处$\left(\text{记号} \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0\\z=z_0}} \text{等都简记为} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \text{等}\right)$正交的条件为

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_0+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_0+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)_0=0,$$

并验证曲面 $x^2+y^2+z^2=ax$ 和曲面 $x^2+y^2+z^2=by$ 互相正交.

20.194. 证明曲面 $xy=z^2$ 与 $x^2+y^2+z^2=9$ 正交.

泰勒公式$^{\triangle}$

20.195$^{\triangle}$. 在点$(1, -2)$的邻域内根据泰勒公式展开函数 $f(x, y)=$ $=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5$.

20.196$^{\triangle}$. 当自变量由 $x=5$, $y=6$ 变至 $x=5+h$, $y=6+k$ 时，求函数 $f(x, y)=x^3+y^2-6xy-39x+18y+4$ 的增量.

20.197$^{\triangle}$. 按 x 及 y 的乘幂展开函数 $f(x, y)=e^x\ln(1+y)$ 至三次项为止.

20.198$^{\triangle}$. 按$\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$和$\left(y-\frac{\pi}{4}\right)$的乘幂展开函数 $f(x, y)=$ $=\sin x\sin y$ 至二次项为止，并写出余项 R_2.

20.199$^{\triangle}$. 按$(x-1)$及$(y-1)$的乘幂展开函数 $f(x, y)=x^y$ 至三次项为止，并应用这个结果计算 $1.1^{1.02}$ 的近似值.

20.200$^{\triangle}$. 若 $|x|$ 和 $|y|$ 同 1 比较为很小的量，试导出关于函数 $f(x, y)=\frac{\cos x}{\cos y}$ 到二次项为止的近似多项式.

20.201$^{\triangle}$. 设 z 为由方程 $z^3-2xz+y=0$ 所确定的 x 和 y 的隐函数，当 $x=y=1$ 时 $z=1$. 将函数 z 按 $x-1$ 和 $y-1$ 的乘幂展开至二次项为止.

20.202[▲]. 将函数 $f(x,y)=\ln(1+x+y)$ 在原点的邻域内按泰勒公式展开到第 n 项.

20.203[▲]. 将函数 $f(x,y)=e^{x+y}$ 在原点的邻域内按泰勒公式展开到第 n 项.

20.204*[▲]. 将函数 $f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$ 在点 $A(1,1,1)$ 的邻域内按泰勒公式展开.

20.205[▲]. (a)写出函数 $\sqrt{1-x^2-y^2}$ 在点 $x=y=0$ 的邻域内所展成的泰勒级数直到含有四阶偏导数的项为止.

(b) 写出本题(a)中函数在点 $x=y=\frac{1}{2}$ 的邻域内所展成的泰勒级数到含有三阶偏导数的项为止.

多元函数的极值

在题 20.206—20.210 中,求已给函数的极值:

20.206. $f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$.

20.207. $f(x,y)=x^2+xy+y^2+x-y+1$.

20.208. $f(x,y)=xy(a-x-y)$.

20.209. $f(x,y)=(2ax-x^2)(2by-y^2)$.

20.210. $f(x,y)=e^{2x}(x+y^2+2y)$.

20.211. 求由方程 $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$ 所确定的函数 $z=f(x,y)$ 的极值.

20.212. 求由方程 $2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$ 所确定的函数 $z=f(x,y)$的极值.

在题 20.213—20.217 中,求已给函数在指定条件下的极值:

20.213. $z=xy$, 若 $x+y=1$.

20.214. $z=x^2+y^2$, 若 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

20.215. $u=x+y+z$, 若 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$, $x>0$, $y>0$, $z>0$.

20.216. $u=x-2y+2z$，若 $x^2+y^2+z^2=1$.

20.217. $u=xyz$，若 $x^2+y^2+z^2=1, x+y+z=0$.

20.218. 在平面 xOy 上求一点，使它到 $x=0$，$y=0$ 及 $x+2y-16=0$ 三直线的距离平方之和为最小.

20.219. 在所有对角线之长为 d 的直角平行六面体中，求有最大体积的直角平行六面体的尺寸.

20.220. 从斜边之长为 l 的一切直角三角形中求有最大周界的直角三角形.

20.221. 直角平行六面体的表面积等于 Q，求最大的体积.

20.222. 已知容积 V 等于定数 k 的开顶长方水池，在怎样的尺寸大小下有最小的表面积.

20.223. 把正数 a 分成三个正数之和，使它们的乘积为最大.

20.224. 在半径为 a 的半球内求一个体积为最大的内接长方体.

20.225. 一帐幕，下部为圆柱形，上部复以圆锥形的篷顶. 设帐幕的容积 V 为一定数 k，今要使幕布最少，试证幕布尺度间应有关系式：$R=\sqrt{5}H, h=2H$.（R, H 各为圆柱形的底半径及高，h 为圆锥形的高.）

20.226. 在平面 $3x-2z=0$ 上求一点，使它与点 $A(1,1,1)$ 和点 $B(2,3,4)$ 的距离平方之和为最小.

20.227. 求抛物线 $y=x^2$ 到直线 $x-y-2=0$ 之间的最短距离.

20.228. 已知矩形的周长为 $2P$，将它绕其一边旋转而构成一圆柱体，求所得圆柱体体积为最大的矩形.

20.229. 在旋转椭球面 $\frac{x^2}{96}+y^2+z^2=1$ 上求距平面 $3x+4y+12z=288$ 为最近和最远的点.

20.230. 求内接于半轴为 a, b, c 的椭球体内的最大直角平行六面体的体积.

20.231. 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上求这种点，使该点的法线与原点的距离为最远.

20.232. 已知两平面曲线 $f(x, y)=0$，$\varphi(x, y)=0$. 又 (α, β) 和 (ξ, η) 分别为两曲线上的点. 试证如果这两点是这两曲线上相距最近或最远的点，则下列关系式必成立：

$$\frac{\alpha-\xi}{\beta-\eta}=\frac{f_x(\alpha, \beta)}{f_y(\alpha, \beta)}=\frac{\varphi_x(\xi, \eta)}{\varphi_y(\xi, \eta)}.$$

20.233. 已知二变数 x 和 y 之间成立某一线性方程 $y=ax+b$. 为了确定这方程的系数 a 及 b，我们先通过一系列的等精确度的测定，对于变量 (x, y) 就得到了一系列的值 $(x_i, y_i)(i=1, 2, \cdots, n)$. 试用最小二乘方的方法，求出 a 和 b 的最可靠数值.

[注：根据最小二乘方的方法，系数 a, b 的最可靠数值，应该是使所得误差的平方和 $\sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)^2$ 为最小.]

第二十一章　微分方程

基本概念

21.1. 试说出下列各微分方程的阶数，并指出那些是线性微分方程：

(a) $x(y')^2-2yy'+x=0$；

(b) $(y'')^3+5(y')^4-y^5+x^7=0$；

(c) $xy'''+2y''+x^2y=0$；

(d) $(x^2-y^2)dx+(x^2+y^2)dy=0$；

(e) $(7x-6y)dx+(x+y)dy=0$.

在题 21.2—21.8 中，指出各函数是否是已给微分方程的解：

21.2. $xy'=2y,\quad y=5x^2.$

21.3. $(x+y)\,dx+x\,dy=0,\quad y=\frac{c^2-x^2}{2x}.$

21.4. $y''=x^2+y^2,\quad y=\frac{1}{x}.$

21.5. $y''+y=0,\quad y=3\sin x-4\cos x.$

21.6. $y''-2y'+y=0,$

(a) $y=xe^x,$　　　　(b) $y=x^2e^x.$

21.7. $y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2y=0, y=c_1e^{\lambda_1x}+c_2e^{\lambda_2x}.$

21.8. $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0, x=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t.$

在题 21.9—21.11 中，对于已给微分方程，验证由函数方程所确定的函数为它的积分：

21.9. $(x-2y)y'=2x-y, x^2-xy+y^2=c.$

21.10. $(x-y+1)y'=1,\quad y=x+ce^y.$

21.11. $(xy-x)y''+xy'^2+yy'-2y'=0,\quad y=\ln(xy).$

在题 21.12—21.21 中，对各已知曲线族(其中 c, c_1, c_2, c_3 都是任意常数)求出它相应的微分方程：

21.12. $(x-c)^2+y^2=1.$

21.13. $y=ce^{\arcsin x}.$

21.14. $y=cx+c^2.$

21.15. $y=c_1x+c_2x^2.$

21.16. $y=c_1\cos(mx+c_2).$

21.17. $xy=c_1e^x+c_2e^{-x}.$

21.18. $y=c_1+c_2x+c_3x^2.$

21.19. $y=c_1\sin 2x+c_2\cos 2x.$

21.20. $c_1x^2+c_2y^2-2x=0.$

21.21. $(y-c_2)^2=4c_1x.$

21.22. 所有轴为 y 轴而焦点为原点的抛物线组成一曲线族，试求此曲线族的微分方程.

21.23. 所有轴平行于 y 轴的抛物线组成一曲线族，试求此曲线族的微分方程.

21.24. 求三参数曲线族 $y=\frac{ax+b}{x+c}$ 的微分方程.

在题 21.25—21.28 中，对各已知曲线族，找一曲线满足所给的初始条件:

21.25. $x^2-y^2=c$, $y|_{x=0}=5$.

21.26. $y=(c_1+c_2x)e^{2x}$, $y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=1$.

21.27. $y=c_1\sin(x-c_2)$, $y|_{x=\pi}=1$, $y'|_{x=\pi}=0$.

21.28. $y=c_1e^{-x}+c_2e^{x}+c_3e^{2x}$, $y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=1$, $y''|_{x=0}=$ $=-2$.

一阶微分方程

(i) 可分离变量的方程

在题 21.29—21.41 中求各微分方程的通解:

21.29. $xy'-y\ln y=0$.

21.30. $3x^2+5x-5y'=0$.

21.31. $y'=\sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}}$.

21.32. $y-xy'=a(y^2+y')$.

21.33. $xy\,dx+(x^2+1)\,dy=0$.

21.34. $(xy^2+x)\,dx+(y-x^2y)\,dy=0$.

21.35. $x\sec y\,dx+(x+1)\,dy=0$.

21.36. $\sec^2 x\operatorname{tg} y\,dx+\sec^2 y\operatorname{tg} x\,dy=0$.

21.37. $(y+3)\,dx+\operatorname{ctg} x\,dy=0$.

21.38. $\dfrac{dy}{dx}=10^{x+y}$.

21.39. $y\ln x\,dx+x\ln y\,dy=0$.

21.40. $(e^{x+y}-e^x)\,dx+(e^{x+y}+e^y)\,dy=0$.

21.41. $\cos x\sin y\,dx+\sin x\cos y\,dy=0$.

在题 21.42—21.46 中，求已给微分方程满足初始条件的特解:

21.42. $\sin y\cos x\,dy=\cos y\sin x\,dx$, $y|_{x=0}=\dfrac{\pi}{4}$.

21.43. $\dfrac{dy}{dx}\sin x=y\ln y$, $y|_{x=\frac{\pi}{2}}=e$.

21.44. $(1+e^x)yy'=e^x$, $y|_{x=1}=1$.

21.45. $y'=e^{2x-y}$, $y|_{x=0}=0$.

21.46. $\frac{x}{1+y}dx-\frac{y\,dy}{1+x}=0$, $y|_{x=0}=1$.

21.47. 质量为 1 克的质点受力作用作直线运动，这力和时间成正比，和质点运动的速度成反比. 在 $t=10$ 秒时，速度等于 50 厘米/秒，力为 4 达因. 问从运动开始经过了一分钟后的速度是多少？

21.48. 根据水力学中的定律，水从距自由面深度为 h 厘米的孔流出，它的流速 $v=\sqrt{2gh}$ 厘米/秒，式中 g 是重力加速度. 现有盛满水而高为 1 米的半球形容器，水从它底端的一个面积为 1 平方厘米的孔流出，孔口收缩系数为 0.6（孔口收缩系数是流出来的水柱的截面积与孔口面积之比）. 试求流尽所需时间.

21.49. 镭的衰变有如下的规律：镭的衰变速度与镭所现存的量 R 成正比. 由经验材料断定，镭经过 1600 年后，只余原始量 R_0 的一半. 试求镭的量 R 与时间 t 的函数关系.

21.50. 一曲线通过点 (2, 3)，它在两坐标轴间的任意切线线段均被切点所平分，求这曲线.

21.51. 求曲线的方程，使得曲线上任意一点(x,y)处之切线常垂直于此点与原点的联线.

21.52. 一曲线通过点(2, 0)，并具有一种性质，即在切点和纵坐标轴间的切线段有定长 2，求这曲线.

(ii) 齐次方程

在题 21.53—21.65 中，求已给微分方程的通解：

21.53. $y'=\frac{y}{x}+\mathrm{tg}\frac{y}{x}$.

21.54. $xy'-x\sin\frac{y}{x}-y=0$.

21.55. $(x+y)y'+(x-y)=0$.

21.56. $y'=\frac{y}{y-x}$.

21.57. $(4y+3x)\frac{dy}{dx}+y-2x=0$.

21.58. $x\frac{dy}{dx}+y=2\sqrt{xy}$. 21.59. $x\frac{dy}{dx}-y-\sqrt{y^2-x^2}=0$.

21.60. $y(x^2-xy+y^2)+x(x^2+xy+y^2)\frac{dy}{dx}=0$.

21.61. $x\frac{dy}{dx}=y\ln\frac{y}{x}$. 21.62. $\frac{dy}{dx}=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$.

21.63. $(x^2+y^2)dx-xy\,dy=0$.

21.64. $\left(x+y\cos\frac{y}{x}\right)dx-x\cos\frac{y}{x}\,dy=0$.

21.65. $x^2y\,dx-(x^3+y^3)\,dy=0$.

21.66. 求微分方程 $(y^2-3x^2)dy+2xy\,dx=0$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=1$ 的特解.

21.67. 求微分方程 $y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ 满足初始条件 $y|_{x=-1}=2$ 的特解.

21.68. 求微分方程 $(x^2+2xy-y^2)dx+(y^2+2xy-x^2)dy=0$ 满足初始条件 $y|_{x=1}=1$ 的特解.

在题 21.69—21.74 中,求 x 与 y 之一次非齐次方程的通解:

21.69. $(3y-7x+7)dx+(7y-3x+3)dy=0$.

21.70. $\frac{dy}{dx}=\frac{y-x+1}{y+x+5}$.

21.71. $(x+2y+1)dx+(2x+3y)dy=0$.

21.72. $(2x+y-4)dx+(x+y-1)dy=0$.

21.73. $\frac{dy}{dx}=\frac{y-x+1}{y-x+5}$.

21.74. $(x+y+1)dx+(2x+2y-1)dy=0$.

有时非齐次方程在作 $x=u^\alpha$, $y=v^\beta$ 代换后,可转化为齐次方程,其中 α, β 为适当选择的常量. 下列方程(21.75—21.76)可这样的来

解.

21.75. $(y^4-3x^2)\,dy+xy\,dx=0$. [提示: 令 $x=u^2$.]

21.76. $y^3\,dx+2(x^2-xy^2)\,dy=0$. [提示: 令 $x=u^2$.]

(iii) 线性方程及柏努利方程

在题 21.77—21.92 中,求已给线性微分方程的通解:

21.77. $\dfrac{dy}{dx}+y=e^{-x}$.

21.78. $\cos^2 x\dfrac{dy}{dx}+y=\operatorname{tg} x$.

21.79. $(x+1)\dfrac{dy}{dx}-ny=e^x(x+1)^{n+1}$.

21.80. $(x^2+1)\dfrac{dy}{dx}+2xy=4x^2$.

21.81. $\dfrac{dy}{dx}+2y=4x$.

21.82. $\dfrac{dy}{dx}+2xy=xe^{-x^2}$.

21.83. $xy'+y=x^2+3x+2$.

21.84. $y'+2y=e^{3x}$.

21.85. $y'+\dfrac{y}{x}=\sin x$.

21.86. $y'+y\cos x=e^{-\sin x}$.

21.87. $y'+y\operatorname{tg} x=\sin 2x$.

21.88. $xy'-y=\dfrac{x}{\ln x}$.

21.89. $(x^2-1)y'+2xy-\cos x=0$.

21.90. $x^2y'-y=x^2e^{x-\frac{1}{x}}$.

21.91. $y'+\dfrac{2y}{x}+\dfrac{x}{a}=0$.

21.92. $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$.

在题 21.93—21.97 中,求已给线性微分方程满足初始条件的特解:

21.93. $\dfrac{dy}{dx}-y\operatorname{tg} x=\sec x$, $y|_{x=0}=0$.

21.94. $x\dfrac{dy}{dx}+y-e^x=0$, $y|_{x=a}=b$.

21.95. $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=\frac{\sin x}{x}$, $y|_{x=\pi}=1$.

21.96. $(1-x^2)y'+xy=1$, $y|_{x=0}=1$.

21.97. $y'+y\cos x=\sin x\cos x$, $y|_{x=0}=1$.

在题 21.98—21.105 中,求已给微分方程的通解:

21.98. $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=x^2y^6$.

21.99. $\frac{dy}{dx}+\frac{xy}{1-x^2}=xy^{\frac{1}{2}}$.

21.100. $\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=3x^2y^{\frac{4}{3}}$.

21.101. $\frac{dy}{dx}-3xy-xy^2=0$.

21.102. $3x(1-x^2)y^2\frac{dy}{dx}+(2x^2-1)y^3=ax^3$.

21.103. $y'-y=\frac{x^2}{y}$.

21.104. $xy'+y-y^2\ln x=0$.

21.105. $3xy'-y-3xy^4\ln x=0$.

若把 y 当作自变量而把 x 当作函数,则下面两个方程 21.106—21.107 是线性的,分别求出它们的通解:

21.106. $(y^2-6x)y'+2y=0$.

21.107. $(x-2xy-y^2)y'+y^2=0$.

21.108. 设 E 为电路所得之电动势,L 为自感应系数,则一含有电阻及自感应之电路,其电动势之方程为 $E=Ri+L\frac{di}{dt}$,求电流 i:

(a) 当 $E=$常数时;

(b) 当 $E=E_m\sin\omega t$ (E_m, ω 均为常数).

21.109. 求一曲线的方程,这曲线通过原点,并且它的每一点处的切线斜率等于 $2x+y$.

(iv) 全微分方程,积分因子

在题 21.110—21.116 中,求已给微分方程的通解:

21.110. $(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^2)dy=0$.

21.111. $(a^2-2xy-y^2)\,dx-(x+y)^2\,dy=0$.

21.112. $[\cos(x+y^2)+3y]\,dx+[2y\cos(x+y^2)+3x]\,dy=0$.

21.113. $(2y^3x-5ax^4)\,dx+3x^2y^2\,dy=0$.

21.114. $e^y\,dx+(xe^y-2y)\,dy=0$.

21.115. $y'(\cos y-\sin\alpha\sin x)\cos y+$

$$+(\cos x-\sin\alpha\sin y)\cos x=0.$$

21.116. $(x\cos y+\cos x)y'-y\sin x+\sin y=0$.

在题 21.117—21.121 中,利用熟知的微分公式

$$d(x\pm y)=dx\pm dy,\qquad d(xy)=y\,dx+x\,dy,$$

$$d\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2},\qquad d\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2},$$

$$d(\sqrt{x^2+y^2})=\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

求各方程的通解.

21.117. $x\,dx+y\,dy+\dfrac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}=0$.

21.118. $(2x-y)\,dx+(2y-x)\,dy=0$.

21.119. $(x^2-2y)\,dx+(y-2x)\,dy=0$.

21.120. $\left(x^m+2xy^2+\dfrac{1}{x}\right)dx+\left(y^n+2x^2y+\dfrac{1}{y}\right)dy=0$.

21.121. $\left(x+\dfrac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}\right)dx+\left(1-\dfrac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}\right)dy=0$.

在题 21.122—21.131 中利用观察法求出各方程的积分因子,并求其通解:

21.122. $(x+y)(dx-dy)=dx+dy$.

21.123. $(x^2+y^2+2x)\,dx+2y\,dy=0$.

21.124. $a(x\,dy+2y\,dx)=xy\,dy$.

21.125. $(x^4e^x-2mxy^2)\,dx+2mx^2y\,dy=0$.

21.126. $y(2xy+e^x)dx-e^x dy=0$.

21.127. $x\,dy-y\,dx=(x^2+y^2)x\,dx$.

21.128. $y\,dx-x\,dy+y^2x\,dx=0$.

21.129. $(3x^2-y)\,dx+(3x^2+x)\,dy=0$.

21.130. $(x\,dy+y\,dx)(y+1)+x^2y^2\,dy=0$.

21.131. $xy'=y+(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$.

(v) 杂题

在题 21.132—21.148 中,求已给微分方程的通解:

21.132. $3e^x \operatorname{tg} y\,dx+(1-e^x)\sec^2 y\,dy=0$.

21.133. $y^2\,dx+y\,dy+x^2y\,dy-dx=0$.

21.134. $y^2\,dx+(xy+x^2)\,dy=0$.

21.135. $\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}=x$.

21.136. $(x+y)^2dy-dx=0$. [提示: 令 $y+x=z$.]

21.137. $(y^3+xy^3)\,dx+(x^3-yx^3)\,dy=0$.

21.138. $xdy+ydx=y^2\ln x\,dx$.

21.139. $y'\cos y-\cos x\sin^2 y=\sin y$. [提示: 令 $z=\sin y$.]

21.140. $xy'\ln x\cdot\sin y+\cos y(1-x\cos y)=0$.

21.141. $x\frac{dy}{dx}-4y=x^2\sqrt{y}$.

21.142. $\frac{dy}{dx}+\frac{1-2x}{x^2}y=1$.

21.143. $(2x^3-xy^2)\,dx+(2y^3-x^2y)\,dy=0$.

21.144. $y\,dx-x\,dy+\ln x\,dx=0$.

21.145. $y(1+xy)\,dx-x\,dy=0$. [提示: 积分因子是$\frac{1}{y^2}$.]

21.146*. $(x\cos y-y\sin y)\,dy+(x\sin y+y\cos y)\,dx=0$. [提示: 积分因子是 e^x.]

21.147. $(x^2-4xy-2y^2)\,dx+(y^2-4xy-2x^2)\,dy=0$.

21.148. $(1+y^2)\,dx=(\operatorname{arc\,tg} y-x)\,dy$. [提示: 把 y 作为自变量, x 作为未知函数.]

在题 21.149—21.150 中,求已给微分方程满足初始条件的特解:

21.149. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+y^2}{1+x^2}$, $y|_{x=0}=1$.

21.150. $\cos x\dfrac{dy}{dx}=y\sin x+\cos^2 x$, $y|_{x=\pi}=1$.

21.151. 曲线 $y=f(x)$ $[f(x)\geqslant 0, f(0)=0]$ 围成一以 $[0, x]$ 为底的曲边梯形,其面积与 $f(x)$ 的 $n+1$ 次幂成正比, 已知 $f(1)=1$, 求这曲线.

21.152. 试求曲线族, 使其在 $x=a$ 与 $x=x$ 间一段弧长为 K 倍于此弧与 $x=a, x=x$ 及 Ox 所围的面积.

21.153. 求一曲线族,使在其上任何点 P 处的切线在 y 轴上的截距等于原点至 P 的距离 OP.

21.154. 求曲线, 使曲线的切线上自切点至与 x 轴的交点的一段距离为常数 a.

21.155. 求曲线, 使曲线的法线上自曲线上的点至与 x 轴的交点的一段距离为常数 a.

21.156*. 求一曲线族,它在任何点的矢径与在该点的切线所夹的角 ψ 为矢径与极轴间夹角 θ 的 n 倍. [提示: 设曲线的极坐标方程为 $r=r(\theta)$, 则 $\operatorname{tg}\psi=r\Big/\dfrac{dr}{d\theta}$.]

21.157. 一汽艇在以 10 仟米/小时的速度在静水上运动时停止了发动机, 经过 $t=20$ 秒钟后, 艇的速度减至 $v_1=6$ 仟米/小时. 确定发动机停止2分钟后艇的速度. (假定水的阻力与艇的运动速度成正比.)

在题 21.158—21.159 中,假定物体在空气中的冷却速度是正比于该物体的温度和它周围空气的温度之差,求解:

21.158. 设一物体加热到 T_0 度时移入室内. 如果室温保持常值

a 度,试求温度 T 与时间 t 的关系.

21.159. 假设室温为 20°C 时,一物体由 100°C 冷却到 60°C 须经过 20 分钟. 试问共经过多少时间方可使此物体的温度从开始时的 100°C 降低到 30°C?

21.160. 假设在海平面上每一平方厘米大气压力等于 1 仟克,离海平面高度为 500 米时,每一平方厘米大气压力变为 0.92 仟克. 求大气压力与高度的关系. [提示:利用波义尔-马利奥特定律,气体的密度与压力成正比.]

21.161. 设将质量为 m 的物体在空气中以速度 v_0 竖直上抛,且空气阻力为 c^2v^2(c 为常数),求在上升过程中速度与时间的函数关系.

21.162. 在上题中设空气阻力 $R=Kv$, 试求速度与时间的函数关系.

21.163. 一质量为 m 的质点沿直线运动,运动时质点所受的力 $F=a-bv$(其中 a,b 为正的常数,v 为质点运动的速度). 设质点由静止出发,求这一质点的速度与时间的关系.

21.164. 有一放置在铅直平面内的刚性曲线,如果曲线以常角速度 ω 绕该平面内一铅直轴(y 轴)旋转时,在曲线上任一点处放置的质点都能处于平衡状态,试求此曲线的方程.

高阶微分方程

在题 21.165—21.183 中,求已给微分方程的通解:

21.165. $y''=x+\sin x$.

21.166. $y''=\operatorname{arc\,tg} x$.

21.167. $y'''=xe^x$.

21.168. $x^2y^{(4)}+1=0$.

21.169. $y''=\dfrac{1}{1+x^2}$.

21.170. $y''=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

21.171. $y''+\dfrac{a^2}{y^2}=0$.

21.172. $y''=\dfrac{1}{\sqrt{ay}}$ $(a>0)$.

21.173. $y''=y'+x$. 21.174. $y'''=y''$.

21.175. $y''=[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}$. 21.176. $y''=1+(y')^2$.

21.177. $xy''+y'=0$. 21.178. $y''+\frac{2}{1-y}y'^2=0$.

21.179. $y''+\sqrt{1-y'^2}=0$. 21.180. $(y''')^2+(y'')^2=1$.

21.181. $yy''+y'^2=y'$. 21.182. $yy''+1=y'^2$.

21.183. $yy''-y'^2+y'=0$.

在题 21.184—21.188 中,求已给微分方程满足初始条件的特解:

21.184. $y^3y''+1=0$, $y|_{x=1}=1$, $y'|_{x=1}=0$.

21.185. $y''-a(y')^2=0$, $y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=-1$.

21.186. $y'''=e^{ax}$; $y|_{x=1}=y'|_{x=1}=y''|_{x=1}=0$.

21.187. $y''=3\sqrt{y}$, $y|_{x=0}=1$, $y'|_{x=0}=2$.

21.188*. $y''+y'^2=1$, $y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=1$.

21.189. 设一物体质量为 m, 以初速 v_0 从一斜面上推下, 若斜面的倾角为 α, 摩擦系数为 μ, 试求物体在斜面上移动的距离和时间的关系.

21.190. 试求 $y''=x$ 的经过点 $M(0, 1)$ 且在此点与直线 $y=\frac{x}{2}+1$ 相切的积分曲线.

21.191. 设有一质量为 m 的物体,在空气中由静止开始下降,如果空气阻力 $R=c^2v^2$ (其中 v 为物体运动的速度), 试求物体下落的距离与时间的函数关系.

21.192. 求曲率半径为常数 K 的曲线.

21.193*. 设曲线(在 x 轴的上方)在它每一点处的曲率半径等于该点处法线在曲线与 x 轴间的长度. 证明如果曲线向上凹, 则它是悬链线;如果曲线向下凹, 则它是半圆周.

21.194*. 设弹簧的上端固定,有两个相同的重物(质量为 m)挂于弹簧的下端,使弹簧伸长了 $2a$. 今突然取去其中一个重物, 使弹簧由

静止状态开始振动，求所挂重物的运动规律. [提示：设重物的位移为 x，取 x 轴铅直向下，原点设在与弹簧固定端相距 $l+a$ 处，其中 l 为弹簧在自由状态时的长度.]

线性微分方程

在题 21.195—21.204 中，研究已给函数组哪些是线性无关的：

21.195. x, x^2. **21.196.** e^{-x}, xe^{-x}. **21.197.** $e^x, \sin x$.

21.198. $e^x, \sin 2x$. **21.199.** $x, x+1$.

21.200. $x^2, -2x^2$. **21.201.** $0, 1, x$.

21.202. $x, x+1, x+2$.

21.203. x, x^2, x^3. [提示：设 $c_1x+c_2x^2+c_3x^3=0$，研究 c_1, c_2, c_3 是否必须同时为零.]

21.204. e^{3x}, e^{-3x}, e^x. [提示：设 $c_1e^{3x}+c_2e^{-3x}+c_3e^x=0$，研究 c_1, c_2, c_3 是否必须同时为零，可先乘以 e^{3x}，再令 $t=e^x$.]

在题 21.205—21.230 中，求所给微分方程的通解：

21.205. $y''+y'-2y=0$. **21.206.** $y''-9y=0$.

21.207. $y''-4y'=0$. **21.208.** $y''-2y'-y=0$.

21.209. $3y''-2y'-8y=0$. **21.210.** $y''+y=0$.

21.211. $y''+6y'+13y=0$. **21.212.** $4y''-8y'+5y=0$.

21.213. $y''-2y'+y=0$.

21.214. $4\frac{d^2x}{dt^2}-20\frac{dx}{dt}+25x=0$.

21.215. $2y''+y'+(2\sin^2 15^\circ \cos^2 15^\circ)y=0$.

21.216. $y^{(4)}-y=0$. **21.217.** $y^{(4)}+2y''+y=0$.

21.218. $y^{(4)}-2y'''+y''=0$.

21.219. $y''-2y'+(1-a^2)y=0 \ (a>0)$.

21.220. $y''-10y'+34y=0$. **21.221.** $y''-4y'+5y=0$.

21.222. $y''-6y'+11y=0$.

21.223. $y'''-6y''+3y'+10y=0$.

21.224. $y'''-3y'-2y=0$. **21.225.** $y'''+k^3y=0 \quad (k>0)$.

21.226. $y'''+3y'-4y=0$. **21.227.** $y'''-y=0$.

21.228. $y^{(4)}-12y''+12y=0$.

21.229. $y^{(4)}+2y'''-3y''-4y'+4y=0$.

21.230. $y^{(4)}-2y'''+2y''-2y'+y=0$.

在题 21.231—21.234 中,求所给微分方程满足初始条件的特解:

21.231. $y''-4y'+3y=0$, $y|_{x=0}=6$, $y'|_{x=0}=10$.

21.232. $4y''+4y'+y=0$, $y|_{x=0}=2$, $y'|_{x=0}=0$.

21.233. $y''-3y'-4y=0$, $y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=-5$.

21.234. $y''+4y'+29y=0$, $y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=15$.

21.235. 方程 $y''+9y=0$ 的一条积分曲线通过点 $(\pi, -1)$, 且在该点和直线 $y+1=x-\pi$ 相切,求这曲线.

在题 21.236—21.252 中,求已给微分方程的通解:

21.236. $2y''+y'-y=2e^x$. **21.237.** $y''+a^2y=e^x$.

21.238. $y''-7y'+6y=\sin x$.

21.239. $2y''+5y'=5x^2-2x-1$.

21.240. $5y''-6y'+5y=e^{\frac{3}{5}x}\cos x$.

21.241. $y''+3y'+2y=f(x)$, 若 $f(x)$ 等于:

(a) $3\sin x$; (b) $3xe^{-x}$; (c) $e^{-x}\cos x$.

21.242. $y''-6y'+9y=f(x)$, 若 $f(x)$ 等于:

(a) $2x^2-x+3$; (b) $e^{3x}(x+1)$; (c) e^{3x}.

21.243. $y''-2y'+5y=f(x)$, 若 $f(x)$ 等于:

(a) e^x; (b) $\cos 2x$; (c) $e^x\sin 2x$.

21.244. $y''-4y'+4y=f(x)$, 若 $f(x)$ 等于:

(a) $e^{-2x}+3$; (b) $x\,\mathrm{ch}\,2x$; (c) $8x^2+e^{2x}+\sin 2x$.

21.245. $y'''+6y''+11y'+6y=x^3+2x+1$.

21.246. $y'''-3y'-2y=-8x^3$. 21.247. $y^{(4)}-2y'''+y''=x$.

21.248. $y^{(4)}+3y''-4y=e^x$. 21.249. $y''+y=x^2+\cos x$.

21.250. $y''-8y'+16y=x+e^{4x}$.

21.251. $y'''-2y''-4y'+8y=16(e^{-2x}+e^{2x})$.

21.252. $y''+7y'+10y=20x+18e^x-3e^{-5x}$.

在题 21.253—21.254 中，求所给各方程满足所指初始条件的特解:

21.253. $y''+y+\sin 2x=0$, $y|_{x=\pi}=1$, $y'|_{x=\pi}=1$.

21.254. $y'''+2y''+y'+2e^{-2x}=0$, $y|_{x=0}=2$, $y'|_{x=0}=1$, $y''|_{x=0}=1$.

在题 21.255—21.261 中,求所给微分方程(尤拉方程)的通解:

21.255. $x^2y''+3xy'+y=0$. 21.256. $x^2y''+xy'-y=0$.

21.257. $x^2y''-xy'+y=0$. 21.258. $x^2y''-9xy'+21y=0$.

21.259. $x^2y''+xy'+y=x$. 21.260. $y''-\dfrac{y'}{x}+\dfrac{y}{x^2}=\dfrac{2}{x}$.

21.261. $x^2y''-2xy'+2y+x-2x^3=0$.

21.262. 圆形薄板在受轴对称的均匀分布荷载时，其挠曲面的微分方程为

$$\frac{d^4w}{dr^4}+\frac{2}{r}\frac{d^3w}{dr^3}-\frac{1}{r^2}\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{1}{r^3}\frac{dw}{dr}=\frac{q}{D}$$

(其中 q 为单位面积的均匀荷载，D 为板的刚度). 求微分方程的通解.

21.263. 在有阻尼的情形下，物体自由振动的微分方程为 $\dfrac{d^2y}{dt^2}+\dfrac{\beta}{m}\dfrac{dy}{dt}+\dfrac{\alpha}{m}y=0$ (其中 $\dfrac{\beta}{m}$ 为介质阻力特性系数，$\dfrac{\alpha}{m}$ 为自振频率的平方). 试求物体振动的曲线方程.

21.264. 有一截面为均匀的肱梁长为 l，其自由端受一水平牵力 Q 作用,其微分方程为

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=Qy-\frac{1}{2}\omega x^2,$$

其中 E 为该梁材料之弹性模量，I 为梁的截面对于中和轴的转动惯量，ω 为梁的单位长度的重量，试求其弹性曲线．

21.265. 一张紧之弹性弦，其一端固定，而另一端系一质量 m 的质点，其运动方程为 $m\frac{d^2s}{dt^2}=-\frac{mg}{e}(s-l)$，式中 l 为该弦的固有长度，而 e 为其因重量 mg 而生的伸长．求 s 及 $v=\frac{ds}{dt}$，并由 $t=0$ 时 $s=s_0$ 及 $v=0$ 以确定其常数．

21.266. 一单摆长为 l，质量为 m，作简谐运动．假定其来往摆动之偏角很小（即 $\sin\theta\approx\theta$）．试求其运动方程．并决定每振动一次的时间(周期)．

21.267. 一拉紧的弹簧所受到的拉力与它的长度伸长成正比．当长度增长 1 厘米时，弹簧拉力为 1 仟克．今有重 2 仟克的物体挂在弹簧的下端而保持平衡．假若将它稍下拉，然后再放开，试求由此所产生的振动运动之周期．[提示：先建立微分方程，再求出通解．]

21.268. 一重 $p=4$ 仟克之物挂在弹簧的下端，它使弹簧的长度增长了 1 厘米．假定弹簧的上端有一转动机产生铅直调和振动 $y=2\sin 30t$ 厘米，并且在起始 $t=0$ 时，重物处于静止状态．试求此重物运动的规律．

21.269. 长为 6 米的链条自桌上无摩擦地向下滑动．假定在运动起始时，链条自桌上垂下部分已有 1 米长．试问需要多少时间链条才全部滑过桌子？

21.270. 一链条挂在一个无摩擦的钉上．假定运动起始时，链条自一边垂下 8 米，另一边垂下 10 米．试问整个链条滑过钉子需多少时间？

21.271. 一质量为 m 的质点由静止开始沉入液体．当下沉时，液体的反作用力与下沉的速度成正比．求此质点运动的规律．

級數解法

在题 21.272—21.281 中，试用幂级数求各微分方程的解(若已给初始条件，则求所给方程的特解)：

21.272. $y'=x+y$.　　21.273. $y'+y=e^x$.

21.274. $y'-xy-x=1$.　　21.275. $y'=y^2+x^3$, $y|_{x=0}=\frac{1}{2}$.

21.276. $(1-x)y'+y=1+x$, $y|_{x=0}=0$.

21.277. $y''-xy'+y=0$.　　21.278. $y''=x^2y$.

21.279. $\frac{d^2x}{dt^2}+x\cos t=0$, $x|_{t=0}=a$, $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=0$.

21.280. $xy''+(c-x)y'-ay=0$ (孔姆方程).

21.281. $xy''+y'+xy=0$, $y|_{x=0}=1$, $y'|_{x=0}=0$.

第二十二章　重积分

二重积分

22.1. 一薄板(不考虑其厚度)，位于 xOy 平面上，占有区域 D. 薄板上分布有表面密度为 $\sigma=\sigma(P)=\sigma(x,y)$ 的电荷. 写出这一板上全部电荷的表达式.

22.2. 一薄板，位于 xOy 平面上，占有区域 D. 板的面密度为 $\mu=\mu(P)=\mu(x,y)$. 板以角速度 ω 绕 Ox 轴旋转，写出板的动能的表达式.

22.3. 在上题中的薄板的比热按 $C=C(P)=C(x,y)$变化，试求从温度 t_1 加热到 t_2 时薄板所得的热量.

在题 22.4—22.7 中，试估计所给各积分的值：

22.4. $\iint\limits_D (x+y+10)\,d\sigma$，其中$D$是圆 $x^2+y^2\leqslant 4$.

22.5. $\iint\limits_D (x^2+4y^2+9)\,d\sigma$，其中$D$是圆 $x^2+y^2\leqslant 4$.

22.6. $\iint\limits_D (x+y+1)\,d\sigma$，其中$D$是矩形 $0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 2$.

22.7. $\iint\limits_D (x+xy-x^2-y^2)\,d\sigma$，其中$D$是矩形 $0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 2$.

在题 22.8—22.10 中，利用被积函数的对称性及区域的对称性决定各积分的值或积分之间的关系(不计算)：

22.8. 求 $\iint\limits_D (x+x^3y^2)\,d\sigma$，其中$D$是半圆 $x^2+y^2\leqslant 4$，$y\geqslant 0$.

22.9. 求积分 $\iint\limits_{D_1} (x^2+y^2)^3\,d\sigma$ 与积分 $\iint\limits_{D_2} (x^2+y^2)^3\,d\sigma$ 之间的关系. 其中 D_1 是矩形 $-1\leqslant x\leqslant 1$，$-2\leqslant y\leqslant 2$，D_2 是矩形 $0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 2$.

22.10. 求积分 $\iint\limits_D x^2y\,d\sigma$ 的值，其中 D 是矩形 $0\leqslant x\leqslant 1$，$-1\leqslant y\leqslant 1$.

22.11. 求 $\iint\limits_D xe^{xy}\,dx\,dy$ 的值，其中D为 $0\leqslant x\leqslant 1,\ -1\leqslant y\leqslant 0$.

22.12. 求 $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{(x-y)^2}$ 的值，其中D为 $1\leqslant x\leqslant 2,\ 3\leqslant y\leqslant 4$.

22.13. 求 $\iint\limits_D e^{x+y}\,dx\,dy$ 的值，其中D为 $0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1$.

22.14. 求 $\iint\limits_D x^2y\cos(xy^2)\,dx\,dy$ 的值，其中 D 为 $0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2}$，$0\leqslant y\leqslant 2$.

22.15. 求 $\iint\limits_D x^2ye^{xy}\,dx\,dy$ 的值，其中 D 为 $0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 2$.

22.16. 求 $\iint\limits_D \frac{y\,dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ 的值，其中 D 为 $0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1$.

在题 22.17—22.23 中，将二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ 化为二次积分(两种次序都要)，积分区域 D 给定如下：

22.17. D: $x+y=1,\ x-y=1,\ x=0$ 所围成的区域.

22.18. D: $y=x,\ y=3x,\ x=1,\ x=3$ 所围成的区域.

22.19. D: $x=3,\ x=5,\ 3x-2y+4=0,\ 3x-2y+1=0$ 所围成的区域.

22.20. D: $y=x^2,\ y=4-x^2$ 所围成的区域.

22.21. D: $y-2x=0,\ 2y-x=0,\ xy=2$ 所围成的在第一象限中的区域.

22.22. D: 椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 所围成的区域.

22.23. D: $(x-2)^2+(y-3)^2=4$ 所围成的区域.

在题 22.24—22.32 中将各积分次序更换：

22.24. $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx$.　22.25. $\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)\,dy$.

22.26. $\int_{-1}^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy$.

22.27. $\int_0^a dx\int_x^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)\,dy$.

22.28. $\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)\,dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)\,dy$.

22.29. $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)\,dy+\int_1^3 dx\int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)\,dy$.

22.30. $\int_{-6}^{2} dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x, y)\, dy$.

22.31. $\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y)\, dy$.

22.32. $\int_{0}^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y)\, dy$.

在题 22.33—22.39 中，计算各积分:

22.33. $\iint\limits_{D} (x+6y)\, dx\, dy$, D: $y=x, y=5x, x=1$ 所围成的区域.

22.34. $\iint\limits_{D} \cos(x+y)\, dx\, dy$, D: $x=0, y=\pi, y=x$ 所围成的区域.

22.35. $\iint\limits_{D} \frac{y}{x}\, dx\, dy$, D: $y=2x, y=x, x=4, x=2$ 所围成的区域.

22.36. $\iint\limits_{D} \frac{x^2}{y^2}\, dx\, dy$, D: $x=2, y=x, xy=1$ 所围成的区域.

22.37. $\iint\limits_{D} (x^2+y)\, dx\, dy$, D: $y=x^2, y^2=x$ 所围成的区域.

22.38. $\iint\limits_{D} (x^2+y^2)\, dx\, dy$, D: $y=x, y=x+a, y=a, y=3a\ (a>0)$ 所围成的区域.

22.39. $\iint\limits_{D} \frac{x}{y+1}\, dx\, dy$, D: $y=x^2+1, y=2x, x=0$ 所围成的区域.

在题 22.40—22.43 中，把各二重积分变为极坐标形式:

22.40. $\int_{0}^{2R} dy \int_{0}^{\sqrt{2Ry-y^2}} f(x, y)\, dx$.

22.41. $\int_{0}^{R} dx \int_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x^2+y^2)\, dy$.

22.42. $\iint\limits_{D} f(x, y)\, dx\, dy$, 其中区域 D 由不等式 $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$,

$(x^2+y^2)^3 \leqslant 4a^2x^2y^2$ 所规定.

22.43. $\int_0^{\sqrt{\frac{R}{1+R^2}}} dx \int_0^{Rx} f\left(\frac{y}{x}\right) dy + \int_{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}}^{R} dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f\left(\frac{y}{x}\right) dy$.

在题 22.44—22.51 中,计算各积分:

22.44. $\iint\limits_D y\,dx\,dy$, D 为圆 $x^2+y^2=a^2$ 所包围的在第一象限中的区域.

22.45. $\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$, D 为圆 $x^2+y^2=1$ 所围成的区域.

22.46. $\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)\,dx\,dy$, D 为圆 $x^2+y^2=1$ 所包围的在第一象限中的区域.

22.47. $\iint\limits_D (h-2x-3y)\,dx\,dy$, D 为圆$x^2+y^2=R^2$ 所围成的区域.

22.48. $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy$, D 为 $x^2+y^2=Rx$ 所围成的区域.

22.49. $\iint\limits_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,dx\,dy$, D 为圆 $x^2+y^2=1$ 所包围的在第一象限内的区域。

22.50. $\iint\limits_D \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\,dx\,dy$, D 为圆 $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=1$ 及直线 $y=x$, $y=0$ 所包围的在第一象限内的区域.

22.51. $\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, D: $x^2+y^2 \leqslant 4\pi^2$, $x^2+y^2 \geqslant \pi^2$.

在题 22.52—22.59 中, 利用二重积分求由曲线所围成的图形的面积:

22.52. $y=x$, $y=5x$, $x=1$.

22.53. $y^2=\frac{b^2}{a}x$, $y=\frac{b}{a}x$.

22.54. $y^2=2px+p^2, y^2=-2qx+q^2$ $(p>0, q>0)$.

22.55. $xy=a^2, xy=2a^2, y=x, y=2x$ $(x>0, y>0)$.

22.56. $x+y=a, x+y=b, y=kx, y=mx$ $(0<a<b, 0<k<m)$.

22.57. $r^2=2a^2\cos 2\theta$.

22.58. $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2), x^2+y^2=a^2$, 最右边的一块图形.

22.59. $(x^2+y^2)^2=2ax^3$.

在题 22.60—22.65 中,利用二重积分求各曲面所围成的立体的体积:

22.60. $z=1-4x^2-y^2, z=0$.

22.61. 坐标面,平面 $x=4, y=4$ 及抛物面 $z=x^2+y^2+1$.

22.62. 旋转抛物面 $z=x^2+y^2$,坐标面和平面 $x+y=1$.

22.63. 抛物柱面 $z=4-x^2$,坐标面和平面 $2x+y=4$,在第一卦限的部分.

22.64. 抛物柱面 $2y^2=x$,平面 $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1, z=0$.

22.65. 圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 和 $x^2+z^2=R^2$.

22.66. 半径为 a 的球的球心位在正圆柱面上,圆柱的半径为 $\frac{a}{2}$,试求柱体被球所割出部分的体积.

三重积分

在题 22.67—22.71 中,计算各积分:

22.67. $\iiint\limits_{\Omega} xy\,dx\,dy\,dz$, Ω: $1\leqslant x\leqslant 2, -2\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant z\leqslant \frac{1}{2}$.

22.68. $\iiint\limits_{\Omega} \frac{dx\,dy\,dz}{(x+y+z)^3}$, Ω: $1\leqslant x\leqslant 2, 1\leqslant y\leqslant 2, 1\leqslant z\leqslant 2$.

22.69. $\iiint\limits_{\Omega} \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}$, Ω: $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$ 所

围成的四面体.

22.70. $\iiint\limits_{\Omega} y\cos(z+x)\,dx\,dy\,dz$, Ω: 抛物柱面 $y=\sqrt{x}$ 及平面 $y=0$, $z=0$, $x+z=\frac{\pi}{2}$ 所围成的区域.

22.71. $\iiint\limits_{\Omega} xy\,dx\,dy\,dz$, Ω: 双曲抛物面 $xy=z$ 及平面 $x+y=1$, $z=0$ 所围成的区域.

在题 22.72—22.74 中，将三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz$ 化成三次积分(先对 z, 次对 y, 再对 x)，其积分区域Ω给定如下:

22.72. Ω: $z=x^2+y^2$, $y=x^2$, $y=1$, $z=0$ 所围成的区域.

22.73. Ω: $cz=xy\ (c>0)$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $z=0$ 所围成的在第一卦限中的区域.

22.74. Ω: $3x^2+y^2=z$, $z=1-x^2$ 所围成的区域.

在题 22.75—22.81 中利用柱面坐标及球面坐标计算下列各题:

22.75. 求 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$ 的值，其中Ω为曲面 $x^2+y^2=2z$ 及平面 $z=2$ 所围成的区域.

22.76. 求 $\iiint\limits_{\Omega} xy\,dx\,dy\,dz$ 的值，其中Ω为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=1$, $z=0$, $x=0$, $y=0$ 所围成的在第一卦限内的区域.

22.77. 求 $\iiint\limits_{\Omega} xyz\,dx\,dy\,dz$ 的值,其中Ω为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 及平面 $x=0$, $y=0$, $z=0$ 所围成的在第一卦限内的区域.

22.78. 求 $\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$ 的值,其中Ω为柱面 $y=\sqrt{2x-x^2}$

及平面 $z=0$, $z=a$ $(a>0)$, $y=0$ 所围成的区域.

22.79. 求 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$ 的值，其中 Ω 为两半球面 $z=\sqrt{A^2-x^2-y^2}$, $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ $(A>a>0)$ 及平面 $z=0$ 所围成的区域.

22.80. 求 $\iiint\limits_{\Omega}\frac{dx\,dy\,dz}{x^2+y^2+1}$ 的值，其中Ω为锥面 $x^2+y^2=z^2$ 及平面 $z=1$ 所围成的区域.

22.81. 求 $\iiint\limits_{\Omega}\frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)\,dx\,dy\,dz}{x^2+y^2+z^2+1}$ 的值，其中 Ω 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所围成的区域.

在题 22.82—22.89 中，利用三重积分求各曲面所围成的立体的体积：

22.82. 平面 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 和坐标面$(a>0, b>0, c>0)$.

22.83. 平面 $y=0$, $z=0$, $3x+y=6$, $3x+2y=12$, $x+y+z=6$.

22.84. 旋转抛物面 $x=\sqrt{y-z^2}$, 抛物柱面 $\frac{1}{2}\sqrt{y}=x$ 及平面 $y=1$.

22.85. 双曲抛物面 $z=\frac{xy}{a}$, 圆柱面 $x^2+y^2=ax$ $(a>0)$ 和平面 $z=0$.

22.86. 球 $x^2+y^2+z^2-2z=0$.

22.87. 圆柱面 $x^2+y^2=2ax$, 旋转抛物面 $az=x^2+y^2$ $(a>0)$及平面 $z=0$.

22.88. 曲面 $x^2+y^2=az$, $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ $(a>0)$.

22.89. 曲面$(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z$ $(a>0)$.

曲面面积

22.90. 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所割下部分的曲面面积.

22.91. 求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 为平面 $z=\frac{a}{4}$, $z=\frac{a}{2}$ 所夹部分的曲面面积.

22.92. 求由半球面 $z=\sqrt{3a^2-x^2-y^2}$ 及旋转抛物面 $x^2+y^2=2az$ 所围成的立体的整个表面的面积.

22.93. 两相同正圆柱的轴互相直交，圆柱的底半径为 r，试求一柱面被另一柱面所割出部分的面积.

22.94. 求平面 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 被三坐标面所割出部分的面积.

22.95. 有一半径为 r 的球，它的球心在一正圆柱面上，设该圆柱的底半径为 $\frac{r}{2}$，试求球面被柱面所割部分的面积.

22.96. 求直线 $y=x$ 上由 $x=0$ 至 $x=4$ 的一段线段绕 x 轴旋转所得的旋转曲面的面积.

22.97. 求抛物线 $6y=x^2$ 上由 $x=0$ 至 $x=4$ 的一段曲线绕 x 轴旋转所得的旋转曲面的面积.

22.98. 求曲线 $4y=x^2-2\ln x$ 上由 $x=1$ 至 $x=4$ 的一段曲线绕 y 轴旋转所得的旋转曲面的面积.

22.99. 求曲线 $y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$ 由 $x=0$ 至 $x=a$ 的一段曲线绕 y 轴旋转所得的旋转曲面的面积.

重积分在物理学上的应用

在题 22.101—22.119, 22.122—22.128 中均设密度 $\mu=1$. 符号

I_0, I_x, I_y 等分别表示对原点，x 轴，y 轴的转动惯量.

22.100. 设密度函数为 $\mu=x^2+y^2$，求 $y=0, y=x, x=1$ 所围成的三角形薄片的质量.

22.101. 求由直线 $y=0$，$y=a-x$，$x=0$ 所围成的均匀薄片的重心.

22.102. 求由 $y=\sqrt{2px}, x=x_0, y=0$ 所围成的均匀薄片的重心.

22.103. 求四分之一圆 $x^2+y^2\leqslant a^2, x\geqslant 0, y\geqslant 0$ 的重心.

22.104. 求半椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1, y\geqslant 0$ 的重心.

22.105. 求圆 $r=a\cos\theta$，$r=b\cos\theta$ 所围图形的重心(设 $b>a$).

22.106. 求半圆环 $1\leqslant r\leqslant 2, 0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 的重心.

22.107. 求由 $x=0, y=0, x=a, y=b$ 所围成矩形的 I_x 与 I_y.

22.108. 求由 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围图形的 I_y.

22.109. 求由 $y^2=\frac{9}{2}x$ 与 $x=2$ 所围图形的 I_x 与 I_y.

22.110. 求由 $y^2=x^3$ 与 $y=x$ 所围图形的 I_x 和 I_y.

22.111. 求由 $y^2=4ax$ 与 $y=2a$ 及 y 轴所围成图形的 I_0.

22.112. 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$ 对于它的中心的转动惯量.

22.113. 求半圆 $x^2+y^2\leqslant R^2$，$y\geqslant 0$ 关于通过其中心并垂直于平面的轴的转动惯量.

22.114. 求由 $y^2=ax$ 及直线 $x=a$ $(a>0)$ 所围成图形对直线 $y=-a$ 的转动惯量.

22.115. 一直角三角形，两直角边长分别为 a 和 b，计算这三角形对其中一直角边的转动惯量.

22.116. 抛物线 $y^2=2px$ 及直线 $x=p$ 围成一个抛物线弓形，试求这弓形关于在顶点的切线的转动惯量.

22.117. 求 $r=2a\cos\theta$ 所围图形的 I_0.

22.118. 求曲线 $r=a\sin 2\theta$ 所围成的一叶的 I_0.

22.119. 求抛物柱面 $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$ 及平面 $z=0$, $z+x=6$ 所围成的物体的质量.

22.120. 计算半径为 1, 密度 $\mu=x^2+y^2$ 的球体的质量.

22.121. 求旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 及平面 $z=1$ ($x\geqslant0, y\geqslant0$) 所围成的物体的质量,假定其密度为 $\mu=x+y$.

22.122. 求由圆锥面 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=0$ 所围立体的重心.

22.123. 求由抛物面 $z=1-x^2-y^2$, 与平面 $z=0$ 所围立体的重心.

22.124. 试求 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 及平面 $z=0$ 所围成的立体的重心.

22.125. 求由旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 及平面 $z=1$ 所围成的立体的重心.

22.126. 求 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 及 $z=0$ 所围成的上半球体对 xOy 平面的转动惯量.

22.127. 求半径为 R, 高为 h 的均匀圆柱体,绕过中心而平行于母线的轴的转动惯量.

22.128. 求半径为 R, 高为 h 的均匀圆柱体,绕过中心而垂直于母线的轴的转动惯量.

22.129. 设有边长为 $2a$ 的正方形薄板. 如果薄板材料的密度和到对角线交点的距离平方成正比,且在它的角上的密度为 1, 试求这个正方形薄板的质量.

22.130. 一个平圆环是由半径各为 R 和 r ($R>r$) 的二同心圆围成的. 已知材料的密度和到圆心的距离成反比,且在内圆的圆周上的密度等于 1, 求环的质量.

22.131. 一个物体是由两个半径各为 R 和 r $(0<r<1<R)$ 的同心球面围成的. 已知材料的密度与到球心的距离成反比，且在距离等于 1 处等于 γ, 求物体的全部质量.

22.132. 如果一个底半径为 R, 高为 H 的正圆柱体上的任一点的密度在数量上等于自圆柱的底的中心到该点距离的平方，试计算正圆柱体的质量.

22.133.* 一个正圆锥体的高为 h $(h>1)$, 轴与母线间的角为 α. 如果它的密度与到平面 π 的距离的 n 次方成正比，而平面 π 过圆锥顶点且垂直于轴，而且在到 π 的距离为 1 单位时它等于 γ $(n>0)$. 试确定锥体的质量. [提示，如果取锥体的轴作 Oz 轴，而它的顶点作原点，则锥体侧表面的方程为 $x^2+y^2-z^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha=0$.]

22.134.* 球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz$ 之任一点的密度在数量上等于此点到坐标原点之距离的平方. 试求球体重心的坐标. [提示，变成柱面坐标.]

22.135.* 试证: 一个平面图形对于任意给定轴的转动惯量等于 Md^2+I_C, 其中 M 是分布在平面图形上的质量，d 是从图形重心到已给轴的距离，I_C 是图形对于平行于已给轴且经过重心的轴的转动惯量(施金涅尔定理). [提示：选取坐标原点与图形重心重合且坐标之一平行于已给轴，对已给轴求转动惯量.]

136.* 一均匀平薄板以任意方式沉浸在液体中，试证板上所受液体总压力等于当此板水平放在和它的重心同样深度时板上液柱的重量. [提示：选坐标系使一个坐标面与平薄板重合，而其中一轴是该坐标面与液面的交线.]

第二十三章 曲线积分与曲面积分

曲线积分

(i) 对弧长的曲线积分

23.1. 计算 $\int_C (x^2+y^2)^n\,ds$, C 为圆周 $x=a\cos t$, $y=a\sin t$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

23.2. 计算 $\int_C (x^2+y^2)\,ds$, C 为曲线 $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

23.3. 计算 $\int_C y^2\,ds$, C 为摆线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ 的一拱$(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

23.4. 计算 $\int_C (x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})\,ds$, C 为内摆线 $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$ $\left(0\leqslant t\leqslant \frac{\pi}{2}\right)$在第一象限内的弧.

23.5. 计算 $\int_C (x+y)\,ds$, C 为以 $O(0,0)$, $A(1,0)$ 和 $B(0,1)$ 为顶点的三角形.

23.6. 计算 $\int_C \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, C 为圆周 $x^2+y^2=ax$.

23.7. 计算 $\int_C x\,ds$, C 为双曲线 $xy=1$ 从点 $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ 到点 $(1, 1)$ 的一段弧.

23.8. 计算 $\int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds$, C 为由圆周 $x^2+y^2=a^2$, 直线 $y=x$ 及 x 轴在第一象限中所围成图形的边界.

23.9. 计算 $\int_C y\,ds$, C 为抛物线 $y^2=2px$ 由点 $(0, 0)$ 到 (x_0, y_0) 的一段.

23.10. 计算$\int_C z\,ds$, C为有界的螺线$x=t\cos t$, $y=t\sin t$, $z=t$ $(0\leqslant t\leqslant t_0)$.

23.11. 计算$\int_C \frac{z^2}{x^2+y^2}ds$, C为螺线$x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=at$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

(ii) 对坐标的曲线积分

23.12. 计算$\int_C (x^2-y^2)\,dx$, C是抛物线$y=x^2$上从点$(0,0)$到$(2,4)$的一段弧.

23.13. 计算$\int_C x\,dy$, C由坐标轴和直线$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$构成的正向(反时针运动方向)三角形回路.

23.14. 计算$\int_C y\,dx$, C是由直线$x=0, y=0, x=2, y=4$构成的正向矩形回路.

23.15. 计算$\int_C (x^2+y^2)\,dy$, C是由直线$x=1$, $y=1$, $x=3$, $y=5$构成的正向矩形回路.

23.16. 计算$\int_C xy\,dx$, C是抛物线$y^2=x$上从$A(1,-1)$到$B(1,1)$一段弧.

23.17. 计算$\int_C (x^2-2xy)\,dx+(y^2-2xy)\,dy$, C为抛物线$y=x^2$上对应于x由-1增加到$+1$的那一段弧.

23.18. 沿曲线(a)$y=x$, (b)$y=x^2$, (c)$y^2=x$, (d)$y=x^3$, 计算$\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy\,dx+(y-x)\,dy$.

23.19. 计算$\int_{OA} x\,dy-y\,dx$, O为原点, A为点$(1,2)$.

设OA为

(a) 直线段; (b) 抛物线弧(对称轴为y轴);

(c) 由x轴上线段OB和平行于y轴的线段BA所组成.

23.20. 计算 $\int_{AB} -x\cos y\,dx+y\sin x\,dy$，$AB$ 为由点 $A(0,\ 0)$ 到 $B(\pi, 2\pi)$ 的直线段.

23.21. 计算 $\int_{AB}\sin y\,dx+\sin x\,dy$，$AB$ 为由点 $A(0,\ \pi)$ 到点 $B(\pi, 0)$ 的直线段.

23.22. 计算 $\int_C y\,dx+x\,dy$，C 为圆周 $x=R\cos t$，$y=R\sin t$ 由 $t_1=0$ 到 $t_2=\frac{\pi}{2}$ 的一段.

23.23. 计算 $\int_C (2a-y)\,dx-(a-y)\,dy$, C 为摆线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$的一拱(对应于由 $t_1=0$ 到 $t_2=2\pi$ 的一段弧).

23.24. 计算 $\int_C (x+y)\,dx+(x-y)\,dy$, C 为依逆时针方向绕椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 一圈的路径.

23.25. 计算 $\int_C \frac{(x+y)\,dx-(x-y)\,dy}{x^2+y^2}$, C 为依逆时针方向绕圆周 $x^2+y^2=a^2$ 一圈的路径.

23.26. 计算 $\int_C (x^2+y^2)\,dx+(x^2-y^2)\,dy$, C 为曲线 $y=1-|1-x|$ 上对应于 x 从 0 到 2 的一段.

23.27. 计算 $\int_C (x^2-2xy)\,dx+(y^2-2xy)\,dy$, C 是以点 $M_1(0, -1)$, $M_2(2, -1)$, $M_3(2, 2)$, $M_4(0, 2)$ 为顶点的矩形正向回路.

23.28*. 计算 $\int_{ABCDA}\frac{dx+dy}{|x|+|y|}$, $ABCDA$ 为以点 $A(1,\ 0)$, $B(0, 1)$, $C(-1, 0)$, $D(0, -1)$ 为顶点的正方形.

23.29. 计算 $\int_\Gamma y\,dx+z\,dy+x\,dz$，$\Gamma$ 为曲线 $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t, \\ z=bt \end{cases}$

上从$t=0$到$t=2\pi$的一段.

23.30. 计算$\int_\Gamma (y^2-z^2)\,dx+2yz\,dy-x^2\,dz$，$\Gamma$为曲线$\begin{cases} x=t, \\ y=t^2, \\ z=t^3 \end{cases}$

上从$t=0$到$t=1$的一段.

23.31. 计算$\int_\Gamma x\,dx+y\,dy+(x+y-1)\,dz$，$\Gamma$是从点$(1,1,1)$到点$(2,3,4)$的一段直线.

23.32. 计算$\int_\Gamma \frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-x-y+2z}}$，$\Gamma$是从点$(1,1,1)$到点$(4,4,4)$的一段直线.

(iii) 与路径无关的曲线积分，格林公式

23.33. 证明$\int_C (x+y)\,dx+(x-y)\,dy$只与$C$的起讫点有关而与所取路径无关. 且求$\int_{(0,1)}^{(2,3)} (x+y)\,dx+(x-y)\,dy$的值.

23.34. 证明$\int_C (x-y)(dx-dy)$只与C的起讫点有关而与所取路径无关. 且求$\int_{(1,-1)}^{(1,1)} (x-y)(dx-dy)$的值.

23.35. 证明$\int_C \frac{y\,dx-x\,dy}{x^2}$只与$C$的起讫点有关而与所取路径无关，其中$C$不经过$y$轴. 且求$\int_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{y\,dx-x\,dy}{x^2}$的值.

23.36. 证明$\int_C \frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$只与$C$的起讫点有关而与所取路径无关，其中$C$在半平面$x>0$中. 且求$\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$的值.

23.37. 证明$\int_C (x^4+4xy^3)\,dx+(6x^2y^2-5y^4)\,dy$只与$C$的起讫点

有关而与所取路径无关. 且求 $\int_{(-2,-1)}^{(3,0)}(x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$ 的值.

23.38. 证明 $\int_C\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$ 只与 C 的起讫点有关而与所取路径无关,其中 C 不经过 y 轴. 且求 $\int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)}\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$ 的值.

23.39. 证明 $\int_C e^x(\cos y\,dx-\sin y\,dy)$ 只与 C 的起讫点有关而与所取路径无关. 且求 $\int_{(0,0)}^{(a,b)}e^x(\cos y\,dx-\sin y\,dy)$的值.

23.40. 验证沿分段光滑的任意闭路的曲线积分 $\oint_C\varphi(x)dx+\psi(y)dy=0$,其中 $\varphi(x)$ 及 $\psi(y)$ 为连续函数.

23.41. 验证沿分段光滑的任意闭路的曲线积分 $\oint_C f(xy)(y\,dx+x\,dy)=0$,其中 $f(xy)$ 关于中间变量 $u=xy$ 具有连续的一阶导数.

在题 23.42—23.47 中,按所给各微分求函数:

23.42. $du=(x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy-y^2)dy$.

23.43. $du=(2x\cos y-y^2\sin x)dx+(2y\cos x-x^2\sin y)dy$.

23.44. $du=\frac{2x(1-e^y)dx}{(1+x^2)^2}+\frac{e^y}{(1+x^2)}dy$.

23.45. $du=\frac{(3y-x)dx+(y-3x)dy}{(x+y)^3}$.

23.46. $du=e^x[e^y(x-y+2)+y]dx+e^x[e^y(x-y)+1]dy$.

23.47. $du=\frac{y\,dx-x\,dy}{3x^2-2xy+3y^2}$.

23.48. 选取 n 使 $\frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{(x^2+y^2)^n}$ 为某一函数 $u=u(x,y)$ 的全微分,并求 $u(x,y)$.

23.49. 选取 a, b 使 $\dfrac{(y^2+2xy+ax^2)\,dx-(x^2+2xy+by^2)\,dy}{(x^2+y^2)^2}$ 为某一函数 $u=u(x, y)$ 的全微分，并求 $u(x, y)$.

23.50. 利用格林公式改变曲线积分 $I=\oint_C \sqrt{x^2+y^2}\,dx+y\left[xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})\right]dy$ 为在围线 C 所围区域 S 上的二重积分，式中的 C 依逆时针方向，且 S 不含原点.

23.51. 应用格林公式计算 $\oint_C xy^2\,dy-x^2y\,dx$，式中 C 为依逆时针方向绕圆周 $x^2+y^2=a^2$ 一圈的路径.

23.52. 应用格林公式计算 $\oint_C (x+y)\,dx-(x-y)\,dy$，式中 C 为依逆时针方向绕椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 一圈的路径.

23.53. 计算曲线积分

$$\int_{AnO}(e^x\sin y-my)\,dx+(e^x\cos y-m)\,dy,$$

其中 AnO 为由点 $A(a, 0)$ 至点 $O(0, 0)$ 的上半圆周 $x^2+y^2=ax$. [提示：用 Ox 轴上的线段 OA 接合路径 AnO 使成封闭的.]

23.54*. 计算曲线积分

$$\int_{AnB}[\varphi(y)e^x-my]\,dx+[\varphi'(y)e^x-m]\,dy,$$

式中 $\varphi(y)$ 和 $\varphi'(y)$ 为连续函数，AnB 为连接点 $A(x_1, y_1)$ 和点 $B(x_2, y_2)$ 的任何路径，但与直线段 AB 围成的图形 $AnBA$ 有定面积 S.

(iv) 曲线积分的应用

23.55. 利用曲线积分计算星形线 $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ 所围成图形的面积.

23.56. 利用曲线积分计算闭曲线 $x=2a\cos t-a\cos 2t$, $y=2a\sin t-a\sin 2t$ 所围成图形的面积.

23.57. 有一铁丝成半圆形 $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $0\leqslant t\leqslant\pi$. 其上每一点密度等于该点的纵坐标,求铁丝的质量.

23.58. 若曲线 $y=\ln x$ 上每一点的密度等于点的横坐标的平方. 试求曲线在横坐标 x_1 和 x_2 间的一段质量($0<x_1<x_2$).

23.59. 若悬链线 $y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$上每一点的密度与该点的纵坐标成反比, 且在点 $(0,a)$ 的密度等于 δ. 试求曲线在横坐标 $x_1=0$ 及 $x_2=a$ 间一段的质量($a>0$).

23.60. 设曲线在任意一点的密度与该点至原点一段曲线的弧长成正比, 求曲线 $y=\frac{2x\sqrt{x}}{3}$ 的弧在点$(0,0)$与点$\left(4,\frac{16}{3}\right)$之间一段的质量.

23.61. 已知螺旋线 $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ 每一点的密度等于该点矢径的平方. 试求 t 从 0 到 2π 的第一回旋部分的质量.

23.62. 如果曲线 $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$, $z=e^t$ 弧上每点的密度与该点矢径平方成反比, 且在点 $(1,0,1)$ 处为 1. 试求曲线从对应于 $t=0$ 点到任意点 $t=t_0$ 一段弧的质量($t_0>0$).

23.63. 已知曲线 $x=at, y=\frac{a}{2}t^2$, $z=\frac{a}{3}t^3$ 弧上每点的密度按规律 $\mu=\sqrt{\frac{2y}{a}}$ 变更. 试求对应于 $0\leqslant t\leqslant 1$ 一段弧的质量 ($a>0$).

在题 23.67—23.72 中,假设线密度 $\mu=1$.

23.64. 试求均匀心形线 $r=a(1-\cos\varphi)$全弧的重心.

23.65. 求均匀摆线弧 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $(0\leqslant t\leqslant\pi)$ 的重心.

23.66. 试求半径为 a, 中心角为 2φ 的均匀圆弧的重心.

23.67. 试求螺旋线 $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=ht$ 对应于 $0\leqslant t\leqslant m$ 的一段弧的重心.

23.68. 求均匀的弧 $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$, $z=e^t$ $(-\infty<t\leqslant 0)$

的重心.

23.69. 方向依纵轴的负方向,且大小等于作用点的横标平方的力构成一力场. 求质量m的点沿抛物线$1-x=y^2$ 从点(1,0)移动到点(0,1)时场力所作的功.

23.70. 一力场由依横轴的正方向的常力$\boldsymbol{F}$所构成. 试求当一质量为m的质点沿圆周$x^2+y^2=R^2$依正向跑过位于第一象限的那一段弧时场力所作的功.

23.71. 在椭圆$x=a\cos t$, $y=b\sin t$上每一点M有作用力$\boldsymbol{F}$,大小等于从点M到椭圆中心的距离,而方向朝着椭圆中心.

(a) 试计算质点P沿椭圆位于第一象限中的弧从点$(a, 0)$移动到点$(0, b)$时力$\boldsymbol{F}$所作的功;

(b) 求点P按正向走遍全部椭圆时力$\boldsymbol{F}$所作的功.

23.72. 力在坐标轴上的投影为$X=x+y^2, Y=2xy-8$, 由这力构成力场. 证明质点在此场内移动时,场力所作的功与路径无关。

23.73. 设z轴与重力的方向一致, 求质量为m的点从位置(x_1, y_1, z_1)沿直线移到(x_2, y_2, z_2)时重力所作的功.

23.74. 设在半平面$x>0$中有力$\boldsymbol{F}=-\frac{k}{r^3}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})$构成力场, 其中$k$为常量,$r=\sqrt{x^2+y^2}$. 证明在此力场中场力所作的功与所取路径无关,而只与起讫点有关.

23.75. 设在半平面$y>0$中,有方向指着原点,大小等于作用点到坐标原点距离的平方的力构成力场. 求质点从位置A移到B时场力所作的功.

23.76. 一力场的力与作用点到z轴的距离成反比,方向垂直且朝着该轴. 试求当一质量为m的动点沿圆周$x=\cos t$, $y=1$, $z=\sin t$由点$M(1, 1, 0)$依正向移动到点$N(0, 1, 1)$时场力所作的功.

23.77. 一力场由与力的作用点到平面xOy的距离成反比且方向

朝原点的力所构成. 试确定当质点沿直线 $x=at$, $y=bt$, $z=ct(c\neq 0)$ 从点(a, b, c)移动到点$(2a, 2b, 2c)$时,场力所作的功.

曲面积分

23.78. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}\left(z+2x+\frac{4}{3}y\right)d\sigma$, Σ 为平面 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ 在第一卦限中的部分.

23.79. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{d\sigma}{(1+x+y)^2}$, Σ 为平面 $x+y+z=1$ 及三个坐标平面所围成的四面体的表面.

23.80. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)d\sigma$, Σ 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

23.81. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,d\sigma$, Σ 为上半球面

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}.$$

23.82. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}x^2y^2\,d\sigma$, Σ 为上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

23.83. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\,d\sigma$, Σ 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=1$ 所围成立体的表面.

23.84. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)\,d\sigma$, Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被曲面 $x^2+y^2=2ax$ 所截得的部分.

23.85. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{d\sigma}{r^2}$, Σ 是界于平面 $z=0$ 及 $z=H$ 之间的圆柱体 $x^2+y^2\leqslant R^2$ 的侧面,而 r 为空间的点到原点的距离.

23.86. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}x^2y^2z\,dx\,dy$, Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 下半部的

下侧.

23.87. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\,dx\,dy+(y-z)\,dy\,dz$, Σ 为三坐标面及平面 $x=1, y=1, z=1$ 所围成的正方体的表面外侧.

23.88. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{e^z\,dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=1$, $z=2$ 所围成的立体的表面外侧.

23.89. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy$, Σ 为由平面 $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=1$, $y=1$, $z=1$ 所围成立体的表面外侧.

23.90. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}xz\,dx\,dy+xy\,dy\,dz+yz\,dx\,dz$, Σ 是平面 $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ 所围成立体的表面外侧.

23.91. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}z\,dx\,dy+x\,dy\,dz+y\,dz\,dx$, Σ 为柱面 $x^2+y^2=1$ 被平面 $z=0$ 及 $z=3$ 所截部分的外侧.

23.92. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}yz\,dx\,dy+zx\,dy\,dz+xy\,dz\,dx$, Σ 是圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 和平面 $x=0$, $y=0$, $z=0$ 及 $z=h(h>0)$ 所围的在第一卦限中的一块立体的表面外侧.

23.93. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}(y-z)\,dy\,dz+(z-x)\,dz\,dx+(x-y)\,dx\,dy$, Σ 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=h(h>0)$所围成立体的表面外侧.

23.94. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}y^2z\,dx\,dy+xz\,dy\,dz+x^2y\,dx\,dz$, 其中 Σ 是由旋转抛物面 $z=x^2+y^2$, 圆柱面 $x^2+y^2=1$ 和坐标平面在第一卦限中所围曲面的外侧.

23.95$^{\triangle}$. 利用奥氏公式计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, Σ 为平面 $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=a$, $y=a$, $z=a$ 所围成的立体的表面外侧.

23.96$^{\triangle}$. 利用奥氏公式计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(x-y)\,dxdy+(y-z)x\,dy\,dz$, Σ 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0$, $z=3$ 所围成的立体的表面外侧.

23.97$^{\triangle}$. 利用奥氏公式计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} x^3\,dy\,dz+y^3\,dz\,dx+z^3dx\,dy$, Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧.

23.98. 求抛物面壳 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的质量，此壳的密度按规律 $\mu=z$ 而变更.

23.99. 求密度为 μ_0 的均匀半球壳 $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(z\geqslant 0)$ 对于 z 轴的转动惯量.

23.100. 如果球面上每点的密度等于该点到球的某一定直径的距离平方，试求球面的质量.

23.101. 求均匀曲面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 重心的坐标.

23.102. 求矢量 $\boldsymbol{A}=xy\boldsymbol{i}+yz\boldsymbol{j}+xz\boldsymbol{k}$ 穿过球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在第一卦限部分的流量.

23.103. 求向量 $\boldsymbol{r}$ 的流量: (a)穿过圆锥形 $x^2+y^2\leqslant z^2$ $(0\leqslant z\leqslant h)$ 的侧表面;(b)穿过此圆锥形的底.

23.104. 求向量 $\boldsymbol{A}=yz\boldsymbol{i}+xz\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$ 的流量: (a) 穿过圆柱 $x^2+y^2\leqslant a^2$ $(0\leqslant z\leqslant h)$的侧表面;(b)穿过该圆柱的全表面.

答　案

第 一 章

1.1. (a) $AB=-4$, $AC=-3$, $BC=1$;

(b) $A(0)$, $B(-4)$, $C(-3)$.

1.2. $AB=6$, $BC=8$, $CA=-14$.

1.6. (i) $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,2)$, $(2,2)$;　(ii) $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,-2)$, $(2,-2)$;

(iii) $(0,0)$, $(-2,0)$, $(0,2)$, $(-2,2)$;　(iv) $(0,0)$, $(0,-2)$, $(-2,0)$, $(-2,-2)$.

1.7. $(4,0)$, $(-4,0)$, $(0,3)$, $(0,-3)$ 或 $(3,0)$, $(-3,0)$, $(0,4)$, $(0,-4)$.

1.8. $(3,-2)$, $(-3,2)$, $(-3,-2)$.

1.10. $(4,2)$.

1.11. (a) $(-2,-6)$;　(b) $(-2,4)$;

(c) $(6,-6)$;　(d) $(6,4)$.

1.12. $(12,-22)$, $(-12,22)$.　**1.13.** $(2,0)$.

1.14. $\left(\frac{1}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2}),\ \frac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})\right)$.

1.15. $-\frac{\pi}{4}$.

1.16. (a) 5;　(b) 10;　(c) 5;　(d) 13.

1.17. $2(9+4\sqrt{2})$.　**1.19.** $7\sqrt{2}$.

1.20. $R=5$.　**1.21.** $(0,0)$, $(10,0)$.

1.22. $(1,1)$.　**1.23.** $(7,11)$, $(7,-1)$.

1.24. $(15,15)$, $(3,3)$.　　**1.25.** $(-1,-2)$.

1.27. $(2,-2)$ 或 $(0,4)$ 或 $(4,0)$.

1.28. $(5,-1)$, $(9,2)$ 或 $(3,10)$, $(-1,7)$.

1.29. (a) $(5,3)$; (b) $(4,-1)$; (c) $\left(\frac{a+1}{2}, \frac{a+1}{2}\right)$;

(d) $\left(0, \frac{1}{3}\right)$; (e) $\left(-\frac{5}{16}, -\frac{97}{16}\right)$.

1.30. $(12,-7)$.　　**1.31.** $\left(\frac{13}{2}, -\frac{31}{2}\right)$.

1.32. $\left(\frac{9}{4}, \frac{7}{2}\right)$.　　**1.33.** $\left(\frac{14}{5}, \frac{37}{5}\right)$, $\left(\frac{11}{5}, \frac{13}{5}\right)$.

1.34. (a) $(-4,1)$, $(-7,0)$; (b) $(8,5)$, $(5,4)$.

1.35. $(4,5)$.　　**1.36.** $(-1,0)$, $(5,6)$.

1.37. $x=4$, $y=-3$.　　**1.38.** $\sqrt{41}$, $\sqrt{26}$, $\sqrt{17}$.

1.39. $(5,-2)$.　　**1.40.** $(-2,1)$.

1.41. $\left(\frac{21}{2}, 10\right)$, $(4,-3)$.　　**1.42.** $x=5, y=4$ 或 $x=5, y=-2$.

1.43. $(-2,-6)$, $(8,2)$, $(-6,10)$.

1.45. $(1,2)$.　　**1.46.** $10x+8y+41=0$.

1.47. $y^2-4x+4=0$.　　**1.48.** $y=\pm 2x$.

1.49. $xy=\pm 1$.

1.50. 点 P 分 $\overline{AB}$ 线段为 m 和 n, 点 P 轨迹为 $\frac{x^2}{n^2}+\frac{y^2}{m^2}=1$.

1.51. $\begin{cases} x=v_0 t\cos\alpha, \\ y=v_0 t\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2, \end{cases}$ 或 $y=x\operatorname{tg}\alpha-\frac{g\sec^2\alpha}{2v_0^2}x^2$.

1.52. $x^2(1-e^2)+y^2+2ae^2x-a^2e^2=0$（以小岛为原点，$y$ 轴平行于海岸且在海岸左方，a 为小岛到海岸距离).

1.53. $ay^2+bxy-a(b+d)y+abd=0$.

1.55. $(2,2)$, $(-2,-2)$.　　**1.56.** $(2,4)$, $(2,-4)$.

1.57. (2, 0), (−1, 0), (0, 2).

1.58. (a) $3x'-4y'=0$; (b) $5x'-y'+19=0$;

(c) $x'^2+y'^2-5=0$; (d) $y'^2-4x'=0$;

(e) $y'^2-6y'-x'^3+6x'^2-12x'+17=0$.

1.59. (a) $x'=0$; (b) $(1+2\sqrt{3})x'+(2-\sqrt{3})y'=2$;

(c) $3x'^2-y'^2=16$.

1.60. $(x-1)^2+(y-6)^2=25$. 1.61. $x^2+y^2=x+y$.

1.62. $(b^2-y^2)(a+y)^2=x^2y^2$. 1.63. $B(11, 5)$.

1.64. $G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$.

1.65. 重心$\left(\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}\right)$.

1.66. $G\left(1, \frac{11}{3}\right)$.

1.67. $x=(v_0\cos\alpha)t$, $y=(v_0\sin\alpha)t-\frac{gt^2}{2}$.

1.68. $x=1+t$, $y=2-t$.

1.70. $\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

第 二 章

2.1. $k=1$, $\theta=\frac{\pi}{4}$.

2.2. $k_{AB}=-\frac{3}{7}$, $k_{BC}=4$, $k_{CA}=-\frac{7}{6}$.

2.4. $k=-4$.

2.5. (a) $x+y=0$; (b) $y=0$.

2.6. (a) $k=1$, $a=-5$, $b=5$; (b) $k=-\frac{1}{2}$, $a=4$, $b=2$.

2.8. $x-y-1=0$.

2.9. $\sqrt{3}x-y+2(2+\sqrt{3})=0$.

2.10. (a) $a=-5$, $b=-\frac{5}{3}$; (b) $a=-4$, $b=-2$.

2.11. $\sqrt{3}x-3y-9=0$.　　2.12. $x+3y-15=0$.

2.13. (a) $\frac{x}{-3}+\frac{y}{2}=1$;　(b) $\frac{x}{-4}+\frac{y}{10}=1$;

(c) $\frac{x}{3}+\frac{y}{-18}=1$;　(d) $\frac{x}{\frac{5}{3}}+\frac{y}{-\frac{10}{3}}=1$.

2.14. $x+y-7=0$, 和 $2x-5y=0$.

2.15. $8x-3y-24=0$ 或 $2x-3y+12=0$.

2.16. (a) $7x-y-22=0$;　(b) $5x-9y-7=0$;

(c) $x+8y-2=0$.

2.17. 中线 CD 的方程: $7x-2y-1=0$, $|CD|=\sqrt{53}$.

2.18. $d=\frac{9}{8}\sqrt{2}$.　　2.19. $d=\frac{7}{13}\sqrt{13}$.

2.20. $d=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}|y_0-kx_0-b|$.

2.21. $d=\frac{3}{26}\sqrt{13}$.

2.22. $4x+y-6=0$ 及 $3x+2y-7=0$.

2.23. $4x-3y+25=0$.　　2.24. $y=0$ 及 $4x-3y=0$.

2.25. $3x-4y-25=0$ 或 $3x-4y+5=0$.

2.26. $3x-4y-7=0$ 或 $5x+12y-49=0$.

2.27. $x-7y+6=0$ 及 $7x+y+4=0$.

2.28. $3x+3y-5=0$ 及 $3x-3y+19=0$.

2.29. $x-y=0$ 及 $x+y+2=0$.

2.30. (a) 平行; (b) 平行; (c) 垂直; (d) 垂直;

(e) 交角 $\theta=\frac{\pi}{4}$;　　(f) 交角 $\theta=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2}{3}\right)$;

(g) 交角 $\theta=\frac{3}{4}\pi$.

2.31. (a) $\lambda=\frac{3}{2}$;　　(b) $\lambda=-\frac{2}{3}$.

2.32. $x+2y+4=0$.　　**2.33.** $7x-2y-20=0$.

2.34. $2x+3y-15=0$.　　**2.35.** $x-4y-3=0$.

2.36. $3x+4y-23=0$.

2.37. $6x+5y-56=0$(平行于中线); $5x-6y-6=0$(垂直于中线).

2.38. $x+3y-1=0$.　　**2.39.** $3x-2y+5=0$.

2.40. $AD: 3x-2y+3=0$;　$BE: x-5y+1=0$;

$CF: 2x+3y+2=0$.

2.41. $\angle A=\operatorname{arc\,tg} 3=71°34'$;　$\angle B=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}=26°33'$;

$\angle C=\operatorname{arc\,tg} 7=81°53'$.

2.42. $\frac{3}{4}\pi$.

2.43. $(2+2\sqrt{3}, 3)$ 或 $(2-2\sqrt{3}, 3)$.

2.44. $5x+y-20=0$ 或 $x-5y+22=0$.

2.45. $x-y-1=0$.　　**2.46.** $\sqrt{3}\,y''=x''$.

2.47. (a) $5x+4y-1=0$;　(b) $3x+2y+1=0$;

(c) $4x+13y-40=0$; (d) $x+3y-9=0$ 或 $4x-y+16=0$;

(e) $y-4=0$ 或 $3x-4y+25=0$;

(f) $4x-y+16=0$ 或 $3x+2y+1=0$;

(g) $8x+57y-204=0$.

2.48. (a) $3x+4y-18=0$;

(b) $3x+4y-58=0$ 或 $3x+4y-18=0$;

(c) $6x+8y-11=0$.

2.49. (a) $4x-3y-17=0$;　(b) $11x-33y-81=0$;

(c) $5x+7y-15=0$.

2.50. $x-3y-15=0$, $3x+y-25=0$, $2x-y=0$.

2.51. $5x+12y-39=0$ 及 $5x+12y+13=0$.

2.52. $x-2y=0$, $x-2y+5=0$ 或 $2x+y=0$, $2x+y-5=0$.

2.53. $x+y-7\pm5\sqrt{2}=0$.　**2.54.** $x+2y-5=0$.

2.55. $x+4y+11=0$.

2.56. $y=\sqrt{\frac{7}{2}}(x+3)$, $y=x+2+\sqrt{\frac{2}{7}}$, 行程 $\frac{3}{\sqrt{7}}$ 厘米.

2.57. $m=\frac{17}{3}$.　**2.58.** $x+4y-4=0$.

2.59. $x+y-3=0$.

2.60. 入射线为 $5x-4y+2=0$; 反射线为 $4x-5y+1=0$.

2.61. $x^2(x^2+y^2)-y^2=0$.

2.62. 设常数为 C, 则轨迹是一个正方形的周界, 如取互相垂直的直线为坐标轴, 则正方形四边的方程为 $x\pm y=\pm C$.

2.63. $x^2+y^2=a^2$, $(a, 0)$ 和 $(-a, 0)$ 两点除外.

2.64. $3x+4y-20=0$ 或 $3x+4y-25=0$.

2.65. $(1, -4)$, $\left(\frac{27}{7}, -\frac{8}{7}\right)$.

2.66. $x-y+1=0$, $3x+2y-7=0$, $2x+3y+7=0$.

2.67. $C(6, -6)$.　**2.68.** $2x+7y-5=0$.

2.69. $x-7y+19=0$ 及 $7x+y-17=0$.

2.70. $\left(-\frac{13}{5}, \frac{31}{5}\right)$.　**2.71.** $2x-y+4=0$.

第 三 章

3.1. (a) $(4,\ -2)$, $R=5$; (b) $(3,\ 0)$, $R=3$;

(c) $(-4,\ -3)$, $R=5$.

3.2. (a) $x^2+y^2+4x+6y+4=0$;

(b) $x^2+y^2-4x+6y-12=0$;

(c) $x^2+y^2-10x-12y+48=0$;

(d) $(x-3)^2+(y-4)^2=\frac{49}{4}$; (e) $x^2+y^2-10x-5y=0$;

(f) $(x-8)^2+(y-5)^2=4$ 或 $(x-8)^2+(y-1)^2=4$;

(g) $x^2+y^2-15x=0$.

3.3. $x^2+(y-b)^2=R^2$. **3.4.** $x^2+y^2=2by$.

3.5. $(x+3)^2+(y-4)^2=26$. **3.6.** $(x-4)^2+(y-7)^2=9$.

3.7. (a) $4x+6y\pm 26=0$;

(b) $3x+4y+20=0$ 或 $3x+4y-5=0$.

3.10. 取二点为 $(0,0)$, $(a,0)$ 比值 $e\neq 1$,

$$x^2+y^2+\frac{2ae^2}{1-e^2}x-\frac{a^2e^2}{1-e^2}=0$$ 是一圆.

3.11. $x^2+4y^2=R^2$.

3.12. $9x^2+25y^2=225$ 或 $4x^2+25y^2=100$.

3.13. $x^2+y^2=4$.

3.14. (a) $a=5, b=2$, $(\pm\sqrt{21}, 0)$, $e=\frac{\sqrt{21}}{5}$;

(b) $a=4, b=3$, $(\pm\sqrt{7}, 0)$, $e=\frac{\sqrt{7}}{4}$;

(c) $a=5, b=1$, $(\pm 2\sqrt{6}, 0)$, $e=\frac{2\sqrt{6}}{5}$;

(d) $a=3, b=2$, $(0, \pm\sqrt{5})$, $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

3.15. (a) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$;　　(b) $\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{4}=1$;

(c) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$;　　(d) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$.

3.16. $e=\sqrt{\frac{2}{5}}$.　　**3.17.** $e=\frac{\sqrt{599}}{300}$.

3.18. $e=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3.19. $\left(\frac{1}{2}\sqrt{a^2-b^2},\ \pm\frac{b}{2a}\sqrt{3a^2+b^2}\right)$.

3.20. $\frac{x^2}{65}+\frac{y^2}{65/4}=1$.

3.21. $33x^2+40y^2-24xy-114x-208y+241=0$ 为椭圆.

3.22. $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{10}=1$.　　**3.23.** $x+2y-4=0$.

3.24. $a=4\sqrt{3}$, $b=6$, $e=\frac{1}{2}$.

3.25. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 及 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, 或 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ 及 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$.

3.26. 所求轨迹是长半轴等于 13 单位，短半轴等于 5 单位的椭圆.

3.27. (a) $a=5$, $b=2$, $(\pm\sqrt{29}, 0)$, $e=\frac{1}{5}\sqrt{29}$;

(b) $a=2$, $b=3$, $(\pm\sqrt{13}, 0)$, $e=\frac{1}{2}\sqrt{13}$;

(c) $a=8$, $b=8$, $(\pm 8\sqrt{2}, 0)$, $e=\sqrt{2}$;

(d) $a=8$, $b=8$, $(0, \pm 8\sqrt{2})$, $e=\sqrt{2}$;

(e) $a=4$, $b=\sqrt{6}$, $(\pm\sqrt{22}, 0)$, $e=\frac{1}{4}\sqrt{22}$;

(f) $a=1$, $b=2$, $(0, \pm\sqrt{5})$, $e=\sqrt{5}$.

3.28. (a) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; (b) $\frac{y^2}{64}-\frac{x^2}{192}=1$;

(c) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$.

3.29. (a) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{13}=1$; (b) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{28}=1$;

(c) $\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{6}=1$; (d) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{75}=1$;

(e) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

3.30. $x^2-y^2=18$. **3.31.** $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=1$.

3.32. $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$.

3.33. $20x^2+48y^2+96xy-428x-624y+1601=0$ 为双曲线.

3.34. $x+y=\pm10$, $x-y=\pm10$.

3.35. $d=5\sqrt{2}$. **3.36.** $\frac{x^2}{9/4}-\frac{y^2}{4}=1$.

3.39. (a) $p=4$, $(-2,0)$, $x=2$;

(b) $p=\frac{1}{4}$, $\left(\frac{1}{8}, 0\right)$, $x=-\frac{1}{8}$;

(c) $p=4$, $(0,2)$, $y=-2$;

(d) $p=4$, $(0,-2)$, $y=2$;

(e) $p=\frac{9}{4}$, $\left(\frac{9}{8}, 0\right)$, $x=-\frac{9}{8}$.

3.40. (a) $y^2=\pm16x$; (b) $y^2=8x$; (c) $y^2=-8x$;
(d) $x^2=12y$; (e) $x^2=8y$; (f) $x^2=-8y$.

3.41. 在距顶点 $\frac{5}{2}$ 厘米处. **3.42.** $x^2=-\frac{b^2}{a}y$.

3.43. (9, 6) 或 (9, −6).

3.44. $4x^2-4xy+y^2+2x+4y-1=0$.

3.45. $y^2-2by+b^2=\pm(2px-2pa)$.

3.46. $144x^2-120xy+25y^2-716x-434y+829=0$.

3.47. $3x-y-1=0$.

3.48. 是抛物线. 若直线过定点，则为过定点且垂直于原直线的直线.

3.49. $x=10$, $y=\frac{2}{5}\sqrt{5}\,x$, $y=-\frac{2}{5}\sqrt{5}\,x$.

3.50. (a) (1, 6), $y=\frac{47}{8}$;　　(b) (−2, −4), $x=-\frac{5}{2}$;

(c) (−3, 2), $y=\frac{9}{4}$;　　(d) (−4, −1), $x=-\frac{31}{8}$.

3.51. $O'(1, 2)$, $x'^2+4y'^2=16$.

3.52. $O'(3, -2)$, $9x'^2-16y'^2=144$.

3.53. $\alpha=45°$, $x'^2-y'^2=36$.　　3.54. $\alpha=30°$, $x'^2-y'^2=2$.

3.55. $\alpha=\arcsin\left(-\sqrt{\frac{1}{10}}\right)$, $x'^2+11y'^2=22$.

3.56. $\alpha=\arcsin\frac{3}{5}$, $O''(3, -2)$, $y''^2=-2x''$.

3.57. $O'(1, -1)$, $\alpha=\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)$, $x''^2+6y''^2=30$.

3.58. $y'=0$, $x'-y'=0$.

3.59. (a) $O'(2, 3)$, $\alpha=\arcsin\left(-\sqrt{\frac{1}{5}}\right)$, $\frac{x''^2}{9}+\frac{y''^2}{4}=1$;

(b) $O'(1, 1)$, $\alpha=\frac{\pi}{4}$, $4x''^2+y''^2=16$;

(c) $O'(-1, 2)$, $\alpha=\arcsin\left(-\sqrt{\frac{1}{10}}\right)$, $-x''^2+9y''^2=9$;

(d) $O'(1,1)$, $\alpha=\arcsin\sqrt{\frac{1}{5}}$, $x''^2-9y''^2=9$;

(e) $\alpha=\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)$, $y'^2=2x'$.

3.60. $5x^2-4y^2+28x-220=0$.

3.61. $25x^2+9y^2+24y-384=0$, $O'\left(0,-\frac{4}{3}\right)$, $a=\frac{20}{3}$, $b=4$.

3.62. $a=\sqrt{5}$, $b=2$. **3.63.** $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{16}=1$.

3.64. $e=\frac{1}{\sqrt{3}}$. **3.65.** $e=\sqrt{3}$.

3.66. $e=\frac{1}{2}$.

3.67. $4x-2y+3=0$, $4x-2y+5=0$.

3.68. $\left(x-\frac{177}{10}\right)^2+\left(y-\frac{18}{5}\right)^2=100$, $\left(x-\frac{57}{10}\right)^2+\left(y+\frac{62}{5}\right)^2=$

$=100$, $\left(x-\frac{17}{10}\right)^2+\left(y-\frac{78}{5}\right)^2=100$, $\left(x+\frac{103}{10}\right)^2+$

$+\left(y+\frac{2}{5}\right)^2=100$.

3.69. $(x-4)^2+(y-10)^2=13^2$ 及 $(x-4)^2+(y-10)^2=7^2$.

3.70. $7x^2+7y^2-25x-3y-54=0$.

3.71. $(x-3)^2+(y-1)^2=9$ 及 $\left(x-\frac{399}{289}\right)^2+\left(y-\frac{757}{289}\right)^2=\left(\frac{615}{289}\right)^2$.

3.72. $\left(x-\frac{76}{48}\right)^2+\left(y-\frac{89}{48}\right)^2=\frac{28577}{2304}$.

3.73. $(x-3)^2+(y-5)^2=37$.

3.75. 为圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$.

3.76. $\left(x+\frac{5}{21}\right)^2+\left(y-\frac{10}{21}\right)^2=\left(\frac{32}{21}\right)^2$.

3.77. 共同点为$(0,0)$, $(0,2)$, $(-2,0)$, $(-2,2)$.

3.78. $e=\frac{1}{61}$.

3.79. $(4\sqrt{2},\ 4\sqrt{2})$及$(-4\sqrt{2},\ -4\sqrt{2})$.

3.80. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.　　3.81. $4x+y+3=0$.

3.82. $(\sqrt{6},\sqrt{2})$, $(\sqrt{6},-\sqrt{2})$, $(-\sqrt{6},\sqrt{2})$, $(-\sqrt{6},-\sqrt{2})$.

3.83. $(x-1)^2+(y+2)^2=2$.　　3.84. $x^2+2xy-6x=0$.

第四章

4.2. $(0,1)$, $(\sqrt{3},1)$, $\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$, $\left(-\frac{5}{4},-\frac{5}{4}\sqrt{3}\right)$.

4.3. $(2,\pi)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{4}\right)$, $\left(4,\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(2,-\frac{\pi}{6}\right)$, $(\sqrt{34},239°2')$.

4.4. $\left(-2,-\frac{\pi}{4}\right)$, $\left(2,\frac{\pi}{6}\right)$, $\left(3,\frac{\pi}{3}\right)$, $\left(-4,\frac{\pi}{3}\right)$.

4.5. $\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(5,\frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(-4,\frac{5\pi}{6}\right)$, $\left(2,\frac{7}{12}\pi\right)$.

4.6. $d=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\theta_2-\theta_1)}$.

4.8. $(7,0)$, $(1,0)$.　　4.9. $\sin 2\theta=\frac{r}{a}\ (0<\theta<\pi)$.

4.10. $r=10$ 为圆, 一般为 $r(\theta)=a$.

4.11. (i) 直线; (ii) $\theta=C$ (C 为常数).

4.12. (a) $(\rho\sin\theta)^2=12\rho\cos\theta$ 即 $\rho=12\operatorname{ctg}\theta\csc\theta$;

(b) $\rho=4\cos\theta$;　　(c) $\rho^2\cos 2\theta=20$;

(d) $\rho^2(1+3\cos^2\theta)=4$;

(e) $\rho^2(1-\sin 2\theta)-\rho\cos\theta+4=0$;

(f) $\rho^2\sin 2\theta=14$;　　(g) $\rho^2\sin^2\theta+4\rho\cos\theta=4$;

(h) $\rho=2a(\sec\theta-\cos\theta)$; (i) $\rho^2=4\cos 2\theta$.

4.13. (a) $y=10$; (b) $(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}=8xy$;

(c) $16x^2+25y^2+96x-256=0$;

(d) $9x^2-16y^2-90x+81=0$;

(e) $x^2-y^2+1=0$; (f) $y+2x=6$.

4.14. $\rho\cos(\theta-\alpha)=p$.

4.16. (a) $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$, $\left(2, \frac{5\pi}{6}\right)$; (b) $\left(6, \pm\frac{\pi}{3}\right)$;

(c) $(a, 0)$, $\left(a, \frac{\pi}{2}\right)$, (a, π), $\left(a, \frac{3}{2}\pi\right)$;

(d) $\left(\frac{3}{2}, \pm\frac{\pi}{3}\right)$;

(e) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{5\pi}{6}\right)$ 及 $r=0$.

4.17. $(2+5\sqrt{3}, 8)$.

4.18. $M_1\left(6\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right)$, $M_2\left(4, -\frac{\pi}{6}\right)$.

第 五 章

5.1. (a) -4; (b) 8; (c) -48;

(d) ab; (e) $-2(x^3+y^3)$;

(f) $x^2(z-y)+y^2(x-z)+z^2(y-x)$.

5.2. (a) $x=3$ 及 2; (b) $x=2$.

5.3. 27. 5.4. 3375. 5.5. 18.

5.6. (a) 4; (b) $a(b-a)(c-b)$; (c) $2abc$;

(d) 0; (e) $4abc$; (f) $4abc$;

(g) 0; (h) $8abc$; (i) $4a^2b^2c^2$.

5.8. (a) $x=-28\frac{6}{11}$, $y=19\frac{8}{11}$;

(b) 无解;　　(c) 无穷多组解;

(d) $x=-22,\ y=17$;　　(e) 无解;

(f) 无穷多组解.

5.9. (a) $x=1, y=1, z=1$;　(b) 无解;

(c) $x=\frac{49}{2},\ y=\frac{43}{2},\ z=10$;

(d) $x=1, y=3, z=5$;　(e) $x=1, y=1, z=1$;

(f) $x=\frac{1}{2}(a+b), y=\frac{1}{2}(b+c),\ z=\frac{1}{2}(c+a)$.

5.10. (a) $x=3k, y=-7k, z=-23k$;

(b) $x=0, y=4k, z=8k$;　(c) $x=0, y=2k, z=2k$;

(d) $x=12k, y=3k, z=0$.

5.11. (a) $x=-k, y=0, z=k$;　(b) $x=0, y=2k, z=2k$;

(c) $x=0,\ y=2k,\ z=k$;　(d) $x=y=z=0$.

5.12. $\lambda=4$.

5.13. (a) $x=1\frac{42}{117},\ y=2\frac{56}{117},\ z=3\frac{30}{117}$;

(b) $x=1,\ y=0,\ z=1$.

5.14. (a) 0;　(b) abc;　(c) 30;

(d) 840;　(e) 12;

(f) $(a+b+c+d)(a-b+c-d)[(a-c)^2+(b-d)^2]$;

(g) $(be-cd)^2$.

5.15. (a) $x=1,\ y=-1,\ z=-1,\ t=1$;

(b) $x=-1,\ y=-1,\ z=0,\ t=1$;

(c) $x=1,\ y=2,\ z=-1,\ t=-2$.

第 六 章

6.2. (a) 在 x 轴上; (b) 在 y 轴上; (c)在 yOz 面上;

(d) 在 xOz 面上.

6.3. $\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}},\ 0,\ 0\right)$, $\left(0,\ \pm\frac{a}{\sqrt{2}},\ 0\right)$, $\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}},\ 0,\ a\right)$, $\left(0,\ \pm\frac{a}{\sqrt{2}},\ a\right)$.

6.4. (a) $(2, -3, 1)$; (b) $(-2, -3, -1)$; (c) $(2, 3, -1)$.

6.5. (a) $(a, b, -c)$; (b) $(-a, b, c)$; (c) $(a, -b, c)$.

6.6. (a) $(2, 3, 1)$; (b) $(-2, -3, 1)$; (c) $(-2, 3, -1)$.

6.7. (a) $(a, -b, -c)$; (b) $(-a, b, -c)$; (c) $(-a, -b, c)$; (d) $(-a, -b, -c)$.

6.8. $5\sqrt{2}$, $\sqrt{34}$, $\sqrt{41}$, 5.

6.9. $|AB|=\sqrt{149}$, $|BC|=7$, $|CA|=\sqrt{146}$.

6.10. $|AB|=3$, $|BC|=\sqrt{21}$, $|CA|=\sqrt{14}$.

6.12. (a) $z=7$ 或 $z=-5$; (b) $x=2$.

6.13. $\left(0, 0, 1\frac{5}{9}\right)$.　　**6.14.** $(0, 1, -2)$.

6.15. $D\left(\frac{4}{3}, -2, 2\right)$, $E\left(-\frac{1}{3}, 1, -3\right)$, $A\left(\frac{14}{3}, -8, 12\right)$, $B\left(-\frac{11}{3}, 7, -13\right)$.

6.16. $\lambda=\frac{7}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$; $\left(\frac{32}{9},\ \frac{11}{3},\ 0\right)$, $(0, -7, 16)$; $\left(\frac{7}{3},\ 0,\ \frac{11}{2}\right)$.

6.17. $(0, 2, -1)$, $\left(\frac{1}{3},\ \frac{4}{3},\ -\frac{5}{3}\right)$, $(-3, 8, 5)$.

6.18. $(-3, 7, 0)$.

6.20. $A(-13, 5, -3)$, $B(-6, 4, 0)$, $C(-2, 1, -1)$, $D(-7, 2, -4)$.

6.21. $\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}, \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}, \frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}\right)$.

6.22. $\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$, $\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$, $\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$,

$\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$.

6.23. 假定分点在 BC 边上的排列次序是 B, D_1, D_2, D_3, D_4, C.

$\overrightarrow{D_1A}=-\left(\boldsymbol{c}+\frac{1}{5}\boldsymbol{a}\right)$, $\overrightarrow{D_2A}=-\left(\boldsymbol{c}+\frac{2}{5}\boldsymbol{a}\right)$,

$\overrightarrow{D_3A}=-\left(\boldsymbol{c}+\frac{3}{5}\boldsymbol{a}\right)$, $\overrightarrow{D_4A}=-\left(\boldsymbol{c}+\frac{4}{5}\boldsymbol{a}\right)$.

6.25. $D, (\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3)$.　　　6.26. 2.

6.27. $\boldsymbol{a}=\left\{\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right\}$; $\boldsymbol{b}=\left\{-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right\}$;

$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$.

6.28. $\boldsymbol{a}$: $\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}$; $\boldsymbol{b}$: $-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}$.

6.29. $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}$, $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{38}$, $|\boldsymbol{c}|=3$;
$\boldsymbol{a}=\sqrt{3}\boldsymbol{a}^\circ$, $\boldsymbol{b}=\sqrt{38}\boldsymbol{b}^\circ$, $\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{c}^\circ$.

6.30. (a) 6, 10, -2; (b) 1, 8, 5;
(c) 16, 0, -23; (d) $3m+2n, 5m+2n, -m+3n$.

6.31. (a) $r=\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$; (b) $r=\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$.

6.32. $\alpha=\beta=\frac{\pi}{4}$, $\gamma=\frac{\pi}{2}$ 或 $\alpha=\beta=\frac{\pi}{2}$, $\gamma=\pi$.

6.33. $\alpha=\gamma=\frac{\pi}{3}$; $\beta=\frac{\pi}{4}$.　　　6.34. 13, $7\boldsymbol{j}$.

6.35. 合力 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3=\{2, 1, 4\}$,
$|\boldsymbol{R}|=\sqrt{21}$,

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{21}},\quad \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{21}},\quad \cos\gamma=\frac{4}{\sqrt{21}}.$$

6.36. $\left\{\frac{6}{11},\ \frac{7}{11},\ -\frac{6}{11}\right\}$ 或 $\left\{-\frac{6}{11},\ -\frac{7}{11},\ \frac{6}{11}\right\}$.

6.38. $\left\{\frac{3}{\sqrt{14}},\ \frac{1}{\sqrt{14}},\ -\frac{2}{\sqrt{14}}\right\}$. 6.39. $A(-2,3,0)$.

6.40. $B(18,17,-17)$. 6.41. $\alpha=15,\quad \gamma=-\frac{1}{5}$.

6.42. $\overrightarrow{OM}=\left\{\frac{11}{4},\ -\frac{1}{4},\ 3\right\}$.

6.43. (a) -1; (b) -15; (c) (i) 3, (ii) 2, (iii) -1.

6.44. (a) -4; (b) $|\boldsymbol{a}|=3\sqrt{2}$, $|\boldsymbol{b}|=3$, $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=108°52'$;
(c) $\mathrm{prj}_a\boldsymbol{b}=-\frac{2}{3}\sqrt{2}$.

6.45. 2. 6.46. $-\frac{4}{7}$.

6.47. $\angle A=76°22'$, $\angle B=79°2'$, $\angle C=24°36'$.

6.48. $\angle B=\frac{\pi}{4}$. 6.52. 500 克厘米.

6.53. $2x+2y+3z-7=0$.

6.54. (a) $3\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}$; (b) $42\boldsymbol{i}-98\boldsymbol{j}-70\boldsymbol{k}$;
(c) $-42\boldsymbol{i}+98\boldsymbol{j}+70\boldsymbol{k}$; (d) (i) $-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$, (ii) $\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$.

6.55. (a) $-8\boldsymbol{j}-24\boldsymbol{k}$; (b) $-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$;
(c) 2; (d) $2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+21\boldsymbol{k}$.

6.56. (a) $3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}$; (b) $-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$.

6.57. -20. 6.58. $28\boldsymbol{i}$, $-17\boldsymbol{j}$, $-9\boldsymbol{k}$.

6.59. $\{5,0,5\}$, $\{1,-2,-1\}$.

6.60. $\pm\frac{1}{3}(\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})$. 6.61. $\pm\frac{1}{\sqrt{35}}(-\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k})$.

6.62. $\pm\frac{1}{5}(4\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k})$.　　6.63. $3\sqrt{10}$.

6.64. $\frac{1}{2}\sqrt{19}$.　　6.65. $\sqrt{17}$.

6.68. 对角线长 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$, $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{11}$;
面积$=\sqrt{6}$.

6.69. (b) 面积$=\sqrt{481}$.　　6.70. 1.

6.74. 1.　　6.75. $\frac{4}{3}$.

6.76. $V=22\frac{2}{3}$.

6.77. $|\boldsymbol{s}|=\sqrt{14}$; $(\widehat{\boldsymbol{s},\boldsymbol{p}})=74°30'$; $(\widehat{\boldsymbol{s},\boldsymbol{q}})=57°41'$;
$(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})=36°42'$.

6.78. 104.　　6.79. $2\sqrt{19}$.

6.80. $x=-2(2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})$.　　6.81. 15, $\sqrt{593}$.

6.82. $V=25$.　　6.83. $V=0$.

6.84. $M(3\sqrt{2}, 3, -3)$.

6.85. $\overrightarrow{CA}=\{-7, 1, -7\}$, $\angle A=25°50'$.

6.86. $\boldsymbol{p}=\left\{\pm\frac{15}{\sqrt{17}}, \pm\frac{25}{\sqrt{17}}, 0\right\}$.

6.88. 11.　　6.89. 5.

6.90. $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^2}$.　　6.91. $\frac{\pi}{3}$.

第 七 章

7.1. $z=0$, $y=0$ 及 $x=0$.

7.2. $y=0$, $z=0$; $x=0$, $z=0$ 及 $x=0$, $y=0$.

7.3. (a) $z+4=0$; (b) $x-5=0$; (c) $y+3=0$.

7.4. $2x+8y-12z+41=0$.　　7.5. $4x+4y+10z-63=0$.

7.6. $x^2+y^2+z^2-6x+4z-3=0$（球面）.

7.7. $(a^2-c^2)x^2+a^2y^2+a^2z^2-a^2(a^2-c^2)=0$（旋转椭球面）.

7.8. $(y-2)^2+(z+1)^2=8,\ x=4$（圆）。

7.9. $z^2-2x-6y+2z+11=0$.

7.10. (a) $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-5)^2=16$;

(b) $(x+1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=9$;

(c) $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=21$.

7.11. $x^2+y^2+z^2-2x-6y+4z=0$.

7.12. $C(2,1,-2),\ R=3$.

7.13. (a) $C(0,0,3),\ R=4$; (b) $C(6,-2,3),\ R=7$;

(c) $C(1,-2,2),\ R=4$.

7.14. (a) 球面; (b) 圆柱面; (c) 两平行平面;

(d) 两相交平面; (e) 一点$(0,0,0)$; (f) z 轴;

(g) yOz 平面; (h) 三坐标平面; (i) 过 x 轴的平面;

(j) 虚轨迹; (k) 两平行平面; (l) 虚轨迹;

(m) 椭圆柱面; (n) 双曲柱面; (o) 抛物柱面.

7.15. $8x^2+8y^2+8z^2-68x+108y-114z+779=0$.

7.16. $5x+2y-5z+9=0,\ 3x-7y-z+8=0$.

7.17. $10x+2z-35=0,\ y=0$.

7.18. $x^2+y^2=9,\ z=5$ 或 $x^2+y^2=9,\ z=-5$.

7.19. $z=3,\ x=4$.

7.20. $y=2,\ x=\sqrt{21}$ 或 $y=2,\ x=-\sqrt{21}$.

7.21. $x^2+y^2-6x-14y+65=0,\ z=5$（虚轨迹）.

7.22. $x^2+y^2+z^2-6x-14y-12z+90=0$,

$2x+4y+4z-61=0$.

7.23. $2x-14y-2z+1=0,\ x+7y-8z+16=0$.

7.24. (a) 双曲线; (b) 椭圆; (c) 抛物线; (d) 圆;

(e) 椭圆;　(f) 椭圆;　(g) 双曲线; (h) 抛物线;
(i) 圆;　(j) 双曲线。

7.25. (a) 椭圆;
(b) 椭圆(与 xOy 面),双曲线(与 yOz 面或 xOz 面);
(c) 双曲线(与 xOy 面或 xOz 面),沒有交线(与 yOz 面);
(d) 一点(与 xOy 面),抛物线(与 xOz 面或 yOz 面);
(e) 两相交直线(与 xOy 面),抛物线(与 xOz, yOz 面);
(f) 一点(与 xOy 面),两相交直线(与 xOz, yOz 面).

7.26. $3y^2-z^2=16$ 及 $3x^2+2z^2=16$.

7.27. $4x^2-9y^2=36$.

7.28. $x^2+4z^2-2x-3=0$, $y=0$.

7.29. $x^2+y^2-x-1=0$, $z=0$.

7.30. $x^2+2y^2-2y=0$, $z=0$.　7.31. $y^2+z^2=12$, $x=2$ (圆).

7.32. 沒有曲线.

7.33.

	平面几何	立体几何
(a), (b)	直线	平面
(c), (d)	曲线(圆,双曲线)	柱面(圆柱面,双曲柱面)
(e)	点	直线
(f)	——	曲线(椭圆)

7.34. 投影曲线 $y^2=2x-9$, $z=0$;
原曲线是位于平面 $z=3$ 上的抛物线.

7.35. $y^2+z^2=4z$, $y^2+4x=0$.

7.36. 四点$(0, 2, \pm2\sqrt{15})$, $(0, -2, \pm2\sqrt{15})$.

第 八 章

8.1. (a)(c)否, (b)(d)是.　8.2. $2x-2y+z-35=0$.

8.3. (a) 平行于 z 轴; (b) 平行于 yOz 平面; (c) 通过 x 轴.

8.4. (a) $a=-6$, $b=4$, $c=12$; (b) $a=3$, $b=15$, $c=-5$; (c) $a=1$, $b=-1$, $c=1$.

8.5. $x+y+z-2=0$.

8.6. $x+2y+2z-2=0$.

8.7. (a) $3x+2y+6z-12=0$; (b) $11x-17y-13z+3=0$; (c) $x-3y-2z=0$.

8.8. $x-1=0$, $y-1=0$, $z-1=0$ 及 $x+y+z-1=0$.

8.9. $\sqrt{3}$.

8.10. 1.

8.11. $(0,0,2)$ 或 $\left(0,0,\frac{4}{5}\right)$.

8.12. $\left(0,\frac{73}{12}, 0\right)$ 或 $\left(0,-\frac{73}{282}, 0\right)$.

8.13. (a) 1; (b) 3.

8.14. $x+y-2z+1=0$.

8.15. (a) $x-2y-z+4=0$ 及 $x+z-6=0$;

(b) $(2\sqrt{2}+1)x+3y-\sqrt{2}z+(12\sqrt{2}+17)=0$ 及 $(2\sqrt{2}-1)x-3y-\sqrt{2}z+(12\sqrt{2}-17)=0$.

8.16. $3(x^2+y^2+z^2)=(x+y+z+12)^2$.

8.17. $2(x^2+y^2)=(x+y-1)^2$.

8.18. $\cos\alpha=\frac{2}{3}$, $\cos\beta=-\frac{2}{3}$, $\cos\gamma=\frac{1}{3}$.

8.19. (a) $\frac{\pi}{3}$; (b) $82°20'$; (c) $40°22'$.

8.20. (a) $2x-8y+z-1=0$; (b) $z+5=0$; (c) $x-3=0$; (d) $y=0$.

8.21. $x-y=0$.

8.22. $2x-y-3z=0$.

8.23. $2x+3y+z=0$.

8.24. $y-2=0$.

8.25. (a) $k=2$; (b) $k=1$; (c) $k=\pm\frac{1}{2}\sqrt{70}$; (d) $k=\pm 2$.

8.26. $y+2z=0$.

8.27. (a) $y+5=0$;　　(b) $x+3y=0$;

(c) $9y-z-2=0$.

8.28. (a) $9x+3y+5z=0$;　　(b) $23x-32y+26z-17=0$;

(c) $21x+14z-3=0$;　　(d) $7x+14y+5=0$.

8.29. (a) $6x+3y+2z+7=0$ 及 $6x+3y+2z-7=0$;

(b) $6x+3y+2z-20=0$.

8.30. $(1,2,3)$.

8.31. $\sqrt{2}x-y+z-1=0$ 及 $\sqrt{2}x+y-z+1=0$.

8.32. $x+3y=0$ 及 $3x-y=0$.

8.33. (a) 是;　　(b) 否.

8.34. (a) $x-3=\frac{y-4}{\sqrt{2}}=\frac{z+4}{-1}$;　　(b) $x+z-4=0$, $y+2=0$;

(c) $x-3=\frac{y+2}{3}=\frac{z+1}{3}$;　　(d) $x-1=0$, $y-2=0$;

(e) $\frac{x}{-1}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-2}{1}$.

8.35. (a) $\frac{x}{4}=\frac{y-4}{1}=\frac{z+1}{-3}$;　(b) $\frac{x-4}{-4}=\frac{y-\frac{11}{4}}{-1}=\frac{z-1}{8}$;

(c) $\frac{x+3}{-5}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{5}$;　(d) $\frac{x+5}{3}=\frac{y+8}{2}=\frac{z}{1}$;

(e) $\frac{x+5}{2}=\frac{y-7}{6}=\frac{z}{1}$.

8.36. (a) $\cos\varphi=-\frac{2\sqrt{2}}{27}$;　(b) $\cos\varphi=0$;

(c) $\cos\varphi=\frac{17}{70}\sqrt{14}$.

8.37. $\alpha=59°11'$, $\beta=39°48'$, $\gamma=112°35'$.

8.38. $\varphi=\frac{2\pi}{3}$.

8.39. $\cos\alpha=-\frac{5}{\sqrt{30}}$, $\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{30}}$, $\cos\gamma=-\frac{1}{\sqrt{30}}$.

8.42. (a) $\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-4}{2}$; (b) $\frac{x}{-2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{1}$;

(c) $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{1}$.

8.43. $\varphi=0$.

8.44. $\sin\varphi=\frac{10}{851}\sqrt{4255}$.

8.45. (a) 平行; (b) 垂直; (c) 直线在平面上.

8.46. (a) $x+y+3z-6=0$; (b) $x-y+z=0$;

(c) $8x-9y-22z-59=0$;

(d) $22x-19y-18z-27=0$;

(e) $16x-15y+13z+14=0$;

(f) $4x+3y-6z+18=0$;

(g) $2x-9y+7z-32=0$;

(h) $7x-26y+18z=0$.

8.47. $(5,-1,2)$.

8.48. $(0,-4,1)$.

8.49. $\left(-\frac{5}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$.

8.50. $(-5,2,4)$.

8.51. $\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

8.52. $\frac{1}{2}\sqrt{6}$.

8.53. $y+1=0$, $2x-z+1=0$, $d=\sqrt{5}$.

8.54. $2x-y+5=0$, $z=0$; $3y+z-1=0$, $x=0$;

$6x+z+14=0$, $y=0$.

8.55. $x=3-t$, $y=-1+2t$, $z=0$;

$y=-1+2t$, $z=5+8t$, $x=0$;

$x=3-t$, $z=5+8t$, $y=0$.

8.56. $2x+2y-2z-1=0$.　　8.57. $x+20y+7z-12=0$.

8.58. $3x+4y-z+1=0$ 及 $x-2y-5z+3=0$.

8.59. $2(x+y)^2+2z(z+2)=1$.

8.60. $\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}, \frac{3-\sqrt{3}}{6}, \frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)$;

$3(x^2+y^2+z^2)-(3-\sqrt{3})(x+y+z)+(2-\sqrt{3})=0$.

8.61. $6x+2y+3z\pm42=0$.

8.62. $5x-14y+2z+81=0$, $5x-14y+2z-9=0$.

8.63. $x-2y+z-3=0$ 或 $x-2y+z-5=0$.

8.64. $z+1=0$ 及 $x+2y=0$.

8.65. $6x+10y+3z+39=0$.

8.66. $x-4y+25=0$, $2x-y+z+3=0$ 及 $3x+y-2z-20=0$.

8.67. $15x-3y-26z-6=0$.　　8.68. $(-12, -4, 18)$.

8.69. $x+y+2z-4=0$.

8.70. (a) $2y-z=0$; (b) $y-3=0$; (c) $3x-y=0$.

8.71. $2x+y+2z\pm2\sqrt[3]{3}=0$.　　8.72. $x-z-2=0$.

8.73. $x+2y+1=0$.　　8.74. $y+z=0$, $x-1=0$.

8.75. $\frac{2}{3}\sqrt{3}$.　　8.76. 1.　　8.77. $\lambda=\frac{5}{4}$.

8.78. $2y-z+4=0$.

8.79. $(11, -9, -3)$ 或 $(3, 7, 13)$.

8.80. $5x+5y+3z=0$.

8.81. $\frac{x+1}{16}=\frac{y}{19}=\frac{z-4}{28}$.　　8.82. $(3, -1, 0)$.

8.83. $x-2y+z+2=0$, $x+y+z=0$.

8.84. $2x+y-z+1=0$, $x+y+z+1=0$.

8.85. $3x-y+4z-12=0$, $x+3y=0$;

$3x-y+4z-12=0$, $4y+z=0$;

$3x-y+4z-12=0$, $4x-3z=0$.

$\frac{3}{5}\sqrt{65}$; $\frac{4}{17}\sqrt{442}$; $\frac{12}{5}\sqrt{26}$.

8.87. $387x-164y-24z-421=0$ 及 $3x-4y-5=0$.

第 九 章

9.1. (a) 旋转椭球面，由 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1, z=0$ 绕 x 轴旋转;

(b) 球面; (c) 椭球面;

(d) 单叶旋转双曲面，由 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$, $z=0$ 绕 y 轴旋转;

(e) 椭圆抛物面;

(f) 旋转抛物面，由 $x^2=4z, y=0$ 绕 z 轴旋转;

(g) 双叶双曲面;

(h) 双叶旋转双曲面，由 $\frac{x^2}{9}-\frac{z^2}{16}=-1, y=0$ 绕 z 轴旋转;

(i) 双叶旋转双曲面，由 $x^2-y^2=1, z=0$ 绕 x 轴旋转;

(j) 双曲抛物面.

9.2. (a) $4x^2+9(y^2+z^2)=36$ (旋转椭球面);

(b) $4x^2-9(y^2+z^2)=36$ (双叶旋转双曲面);

(c) $4(x^2+z^2)-9y^2=36$ (单叶旋转双曲面);

(d) $y^2+z^2=5x$ (旋转抛物面);

(e) $x^2+y^2+z^2=9$ (球面).

9.3. (a) $k^2x^2-y^2-z^2=0$ (锥面); (b) $y^2+z^2-\sin^2 x=0$.

9.4. (a) 双曲线 $\frac{z^2}{4}-\frac{y^2}{25}=\frac{5}{9}$, $x=2$;

(b) 椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$, $y=0$;

(c) 椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=2$, $y=5$;

(d) 二条直线 $\frac{x}{3}\pm\frac{y}{5}=0$, $z=2$;

(e) 双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=\frac{3}{4}$, $z=1$.

9.5. (a) 抛物线 $y^2=-2z$, $x=0$;

(b) 抛物线 $y^2=4-2z$, $x=2$;

(c) 抛物线 $x^2=2z$, $y=0$;

(d) 抛物线 $x^2=2z+1$, $y=1$;

(e) 二条直线 $x+y=0$, $z=0$ 和 $x-y=0$, $z=0$;

(f) 双曲线 $x^2-y^2=6$, $z=3$.

9.6. (a) 椭球面;　(b) 椭圆抛物面;

(c) 椭圆抛物面;　(d) 双叶旋转双曲面;

(e) 锥面;　(f) 旋转锥面;

(g) 旋转抛物面;　(h) 双曲抛物面.

9.7. (a) $x'^2+y'^2+z'^2=49$ (球面);

(b) $x'^2+y'^2+2z'^2=0$ 一点;

(c) $x'^2+2y'^2+3z'^2=0$ 一点.

9.8. $3x^2+4y^2+4z^2=12$ 旋转椭球面.

9.9. $(x-1)^2+y^2-z^2=0$ 旋转锥面.

9.10. $5x^2-3y^2=1$ 双曲柱面.

9.11. $x^2+20y^2-24x-116=0$ 椭圆柱面.

9.12. $(1, 2, 3)$, $(2, -1, -4)$.

第　十　章

10.1. $-5<x<5$.

10.2. $-1<x<7$.

10.3. $-3<x<3$.

10.4. $0\leqslant x<2$, $2<x\leqslant 4$.

10.5. $x<0$.

10.6. $-1<x<0$.

10.7. $1<x<2$. 10.8. $x=-\frac{1}{2}$.

10.9. $x\leqslant 0$.

10.10. $x=-\frac{\pi}{2}\pm 2k\pi$ $(k=0, 1, 2, 3, \cdots)$.

10.11. $x_1=3$, $x_2=-1$.

10.12. $f(2)=0$, $f(-2)=-4$, $f(0)=2$, $f(a)=\frac{|a-2|}{a+1}$,

$f(a+b)=\frac{|a+b-2|}{a+b+1}$.

10.13. $\varphi(2)=1$, $\varphi(-2)=\frac{1}{16}$, $\varphi(0)=\frac{1}{4}$, $\varphi\left(\frac{5}{2}\right)=\sqrt{2}$.

10.14. $\varphi(t^2)=t^6+1$, $[\varphi(t)]^2=t^6+2t^3+1$.

10.15. $f(x+\Delta x)=(x^2-3x+7)+(2x-3)\Delta x+(\Delta x)^2$;

$f(x+\Delta x)-f(x)=(2x-3)\Delta x+(\Delta x)^2$.

10.16. $f(x+\Delta x)-f(x)=-\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}$.

10.26. $f(0)=0$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$, $f(1)=\frac{1}{2}$, $f\left(\frac{5}{4}\right)=1$, $f(2)=1$.

10.27. $\varphi(3)=2$, $\varphi(2)=1$, $\varphi(0)=2$, $\varphi(0.5)=2$,

$\varphi(-0.5)=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

10.28. $\varphi(1)=0$, $\varphi\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\varphi(-2)=0$.

10.29. $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$, $(2, +\infty)$.

10.30. $(-\infty, +\infty)$. 10.31. $\left[-\frac{4}{3}, +\infty\right)$.

10.32. $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$.

10.33. $[-1, 0)$, $(0, 1]$. 10.34. $[-1, +1)$.

10.35. $[-2,-1)$, $(-1,1)$, $(1,+\infty)$.

10.36. $[0,2)$, $(2,+\infty)$. 10.37. $(-\infty,1]$, $[3,+\infty)$.

10.38. $(-\infty,0)$, $(0,1)$. 10.39. $[-2,1)$.

10.40. $(-1,1)$.

10.41. $\left(\frac{3}{2},\ 2\right)$, $(2,+\infty)$.

10.42. $[4,6]$.

10.43. $[1,4]$.

10.44. $(1,+\infty)$.

10.45. $[0,\pi]$, $[-4,-\pi]$.

10.46. $x\neq\frac{\pi}{4}+n\pi \qquad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

10.47. $x\neq\frac{2n+1}{2}\pi-1 \qquad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

10.48. $x>0$, 且 $x\neq(n\pi)^2 \qquad (n=1,2,\cdots)$.

10.49. $\left(\frac{4n-1}{2}\pi,\ \frac{4n+1}{2}\pi\right) \qquad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

10.50. $\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

10.51. $[1,5]$.

10.52. 无意义.

10.53. $(2k\pi,\ \overline{2k+1}\pi) \qquad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

10.54. $(-\infty,+\infty)$.

10.55. $[-1,3]$.

10.56. $(0,1)$, $(1,+\infty)$.

10.57. $(-1,2)$, $(2,4]$.

10.58. $(-\infty,0)$, $(0,2]$.

10.59. (a) $[0,1]$; (b) $[2n\pi,(2n+1)\pi]$, $n=0,\pm1,\cdots$;

(c) $[-a,1-a]$; (d) 若 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$, 定义域是

$[a,1-a]$, 若 $a>\frac{1}{2}$, 定义域不存在.

10.60. (a) $0\leqslant t\leqslant\sqrt{\frac{2h}{g}}$, (b) $-\infty<t<+\infty$.

10.61. 不表示同一函数,定义域不同,在 $x\neq0$ 时是相同的.

10.62. 不表示同一函数，定义域不同，在 $x>0$ 时是相同的.

10.63. 不表示同一函数，定义域不同，在 $x\geqslant 0$ 时是相同的.

10.64. 不表示同一函数，对应关系不同，在 $x\geqslant 0$ 时是相同的.

10.65. $y=\frac{5}{9}(x-32)$, 其中 y 为摄氏温标，x 为华氏温标.

10.66. $y=\frac{x^2}{2}$, 其中 y 表示质量，x 表示长度.

10.67. $f=-2v$, f 表示阻力，v 表示速度.

10.68. $V=-0.7t+12$, $t\geqslant 0$.

10.69. $s=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$, $(0,\pi)$.

10.70. $V=\pi\left[r^2-\left(\frac{h}{2}\right)^2\right]h$, $(0,2r)$.

10.71. $r=\sqrt{\frac{3V}{\pi h}}$, $0<h<+\infty$.

10.72. $F=k(2l-x)$, $l\leqslant x\leqslant 2l$.

10.73. $V=\frac{R^3}{24\pi^2}(2\pi-\alpha)^2\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2}$, $\quad 0<\alpha<2\pi$.

10.74. $p=\frac{2}{h}[hb+(h-b)x]$, $\quad 0<x<h$, $\quad S=\frac{b}{h}(h-x)x$,

$0<x<h$.

10.75. $a=\sqrt{100-96\cos x}$, $0<x<\pi$.

10.76. $$S=\begin{cases}\frac{h}{a-b}x^2, & 0\leqslant x\leqslant\frac{a-b}{2},\\ h\left(x-\frac{a-b}{4}\right), & \frac{a-b}{2}<x<\frac{a+b}{2},\\ h\left[\frac{a+b}{2}-\frac{(a-x)^2}{a-b}\right], & \frac{a+b}{2}\leqslant x\leqslant a.\end{cases}$$

10.77. $y=\begin{cases} \dfrac{h}{c}x, & 0\leqslant x\leqslant c, \\ \dfrac{h}{c-l}(x-l), & c<x\leqslant l. \end{cases}$

10.78. $y=\begin{cases} 0.5\,(\text{角}), & 0<x<4, \\ 1\,(\text{角}), & 4\leqslant x\leqslant 10, \\ 1.5\,(\text{角}), & 10<x\leqslant 20. \end{cases}$

10.79. $S=\begin{cases} 0, & x\leqslant 0, \\ 3x, & 0<x\leqslant 1, \\ 3, & 1<x\leqslant 2, \\ 2x-1, & 2<x\leqslant 3, \\ 5, & 3<x\leqslant 4, \\ x+1, & 4<x\leqslant 5, \\ 6, & x>5. \end{cases}$

10.80. $M=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \dfrac{3}{2}x, & 0\leqslant x\leqslant 2, \\ 3, & 2<x<3, \\ 4, & x\geqslant 3. \end{cases}$

10.81. (a), (c), (i), (j), (n) 是偶函数;
(e), (f), (h), (k), (m) 是奇函数;
(b), (d), (g), (l) 是非奇非偶的函数.

10.85. 用 ω 表示周期 (a) $\omega=\pi$, (b) 非, (c) 非,
(d) $\omega=\pi$, (e) $\omega=2$, (f) 非, (g) $\omega=4$,
(h) $\omega=2\pi$, (i) $\omega=2\pi$, (j) $\omega=\pi$.

10.88. (a) $y=\pm\sqrt{x^3-1}$; (b) $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$;

(c) $y=\dfrac{1}{3}\operatorname{Arc\,sin}\dfrac{x}{2}$;

(d) $y=\dfrac{1+\operatorname{Arc}\sin\dfrac{x-1}{2}}{1-\operatorname{Arc}\sin\dfrac{x-1}{2}}$;

(e) $y=10^{x-1}-2$; (f) $y=\dfrac{1}{2}\lg\dfrac{x}{x-2}$;

(g) $y=\dfrac{1}{2}(\log_3 x-5)$.

10.111. (a) $y=\log_2(x-1)$; (b) $y=4^{x-1}$;
(c) $y=1+\operatorname{Arc}\sin x$; (d) $y=1\pm\sqrt{x+1}$;
(e) $y=1-4\sin x$.

第十一章

11.1. (a) 0; (b) 1; (c) 无;
(d) 0; (e) 无; (f) 0.

11.2. $n>4$.

11.6. $n>19999$.

11.7. $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$, $n>1000$.

11.8. $n>\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{5}{\varepsilon}-6}$.

11.15. $N\geqslant\sqrt{397}$.

11.16. δ 约 $=0.0002$.

11.20. $\dfrac{-1}{10^4+2}<x<0$, $0<x<\dfrac{1}{10^4-2}$.

11.21. $\dfrac{3000}{1001}<x<\dfrac{1000}{333}$.

11.22. $\log_2\left(\dfrac{99}{100}\right)<x<0$, $0<x<\log_2\left(\dfrac{101}{100}\right)$.

11.23. (a) 无穷大; (b) 无穷大;
(c) 无穷小; (d) 无穷大;
(e) 无穷小.

11.24. (a) $1+\frac{1}{x^3-1}$;　(b) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4x^2+2}$;

(c) $-1+\frac{2}{1+x^2}$.　11.25. -9.

11.26. 4.　11.27. $\frac{3}{4}$.　11.28. 0.

11.29. 0.　11.30. ∞.　11.31. $\frac{2}{3}$.

11.32. 0.　11.33. $-\frac{2}{5}$.　11.34. $\frac{1}{2}$.

11.35. ∞.　11.36. 0.　11.37. $3x^2$.

11.38. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.　11.39. n.　11.40. $\frac{1}{2}$.

11.41. 0.　11.42. ∞.　11.43. ∞.

11.44. $\frac{1}{2}$.　11.45. -1.　11.46. 1.

11.47. 0.　11.48. $\frac{2}{3}\sqrt{2}$.　11.49. $\frac{q}{p}$.

11.50. $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$.　11.51. 0.　11.52. -2.

11.53. 2.　11.54. -1.　11.55. $\frac{1}{4}$.

11.56. $\frac{2}{3}$.　11.57. 1.　11.58. 1.

11.59. 0.　11.60. 4.　11.61. 0.

11.62. 0.　11.63. 1.　11.64. $\frac{1}{2}$.

11.65. $\frac{4}{3}$.　11.66. $-\frac{1}{2}$.　11.67. k.

11.68. $\frac{\alpha}{\beta}$.　11.69. $\frac{2}{5}$.　11.70. $\sqrt{2}$.

11.71. e^2.　　11.72. $\frac{1}{e}$.　　11.73. e.

11.74. $f(-0)=1, f(+0)=0$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在;

$f(1-0)=1, f(1+0)=1$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$.

11.75. $f(-0)=f(+0)=1$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$;

$\varphi(-0)=-1$, $\varphi(+0)=1$, $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x)$ 不存在.

11.76. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$; $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=3$.

11.77. (a) 4; (b) 7; (c) 5; (d) [illegible]7.

11.78. (a) 不存在; (b) 2; (c) [illegible]

11.80. $f(-0)=0, f(+0)$ 不存在.

11.81. 等价的.

11.82. (a) 同阶,不等价; (b) 等价的.

11.83. (a) 二阶; (b) $\frac{1}{2}$ 阶; (c) 一阶; (d) 三阶;

(e) 三阶; (f) $\frac{1}{3}$ 阶; (g) 一阶; (h) 二阶;

(i) 一阶.

11.84. $\frac{2^{20}\cdot 3^{30}}{5^{50}}$.　　11.85. $\frac{1}{3}$.　　11.86. 0.

11.87. ∞.　　11.88. $\frac{\sqrt[m]{a}}{ma}$.　　11.89. $\frac{1}{2}$.

11.90. $\frac{1}{2}$.　　11.91. $\frac{1}{\sqrt{2a}}$.　　11.92. 9.

11.93. $\frac{1}{2}$.　　11.94. $\frac{1}{2}$.　　11.95. $\frac{2}{3}$.

11.96. 1.　　11.97. $\sqrt{3}$.　　11.98. $\frac{2}{\pi}$.

11.99. $2\cos a$.　　11.100. $\frac{1}{e}$.　　11.101. 1.

11.102. e^3.　　11.103. α.　　11.104. e.

11.105. e^3.　　11.106. $\frac{1}{e}$.　　11.107. $\ln a$.

11.108. e^β.　　11.109. $\alpha-\beta$.　　11.110. x.

11.111. $\alpha-\beta$.　　11.112. $\frac{1}{2}$.　　11.113. $-\frac{1}{x^2}$.

11.114. $-2\sin 2x$.

11.115. 无限接近并不等于以其长为极限.

11.116. 折线的长以线段 AB 的长 a 为极限.

11.117. 前者以 a 为极限,后者以 $\frac{\pi a}{2}$ 为极限.

第十二章

12.1. $\Delta y=-1$.　　12.2. $\Delta y\approx -0.051$.

12.3. (a) $(-\infty,1)$, $(1,2)$, $(2,+\infty)$, $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$;

(b) $(-\infty,2)$, 1;　　(c) $[4,6]$, 2;

(d) $(0,1]$, $\ln\frac{\pi}{6}$.

12.4. (a) $x=-2$ 为无穷不连续点;

(b) $x=-2$, 1 为无穷不连续点;

(c) $x=0$ 为可去间断点,定义 $f(0)=2$;

(d) $x=0$ 为可去间断点,定义 $f(0)=1$, $x=k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$为无穷不连续点;

(e) $x=0$ 为可去间断点,定义 $f(0)=0$;

(f) $x=0$ 为可去间断点,定义 $f(0)=\frac{1}{2}$;

(g) $x=1$ 为可去间断点,定义 $f(1)=\frac{2}{3}$;

(h) $x=0$ 为可去间断点,定义 $f(0)=-\frac{5}{2}$;

(i) $x=0$ 为可去间断点,定义 $f(0)=0$;

(j) $x=0$ 为可去间断点,定义 $f(0)=e$;

(k) $x=0$ 为可去间断点,定义 $f(0)=2$, $x=(2k+1)\frac{\pi}{4}$ ($k=0, \pm1, \pm2, \cdots$)为无穷不连续点.

12.5. (a) $f(1-0)=0, f(1+0)=1$,

$x\to1$ 时的极限不存在;

(b) 不连续;

(c) $(0,1)$, $(1,3]$;

(d) $\lim\limits_{x\to2} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x)=-\frac{1}{2}$.

12.6. (a) $f(1+0)=f(1-0)=1$, $\lim\limits_{x\to1} f(x)=1$, 存在;

(b) $f(1)=1$, 连续;

(c) $(0,2)$.

12.7. (a) $f(1-0)=f(1+0)=1$, $\lim\limits_{x\to1} f(x)=1$, 存在;

(b) 函数值 $f(1)=\frac{1}{2}$, 在 $x=1$ 处不连续;

(c) $(0,1)$, $(1,2)$.

12.8. $x=1$ 时不连续, $x=\frac{1}{2}$, 2 时连续.

12.9. (a) $(-\infty,+\infty)$; (b),(c) 连续.

12.10. (a) $(0,2]$; (b) 可去间断点,定义 $f(1)=1$.

12.11. 不能. 因为 $\lim\limits_{x\to-0} \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}$, 而 $\lim\limits_{x\to+0} \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$.

12.12. 第一类间断点,不可去.

12.16. $y=\arcsin e^{-\sqrt{x}}$.　　12.17. $y=\sqrt{1+\sin^2\log_a x}$.

12.18. (a) $y=u^{20}$, $u=1+x$;

(b) $y=u^2$, $u=\arcsin v$, $v=z^{\frac{1}{2}}$, $z=1-x^2$;

(c) $y=u^3$, $u=\sec v$, $v=1-\dfrac{1}{x}$;

(d) $y=\log_a u$, $u=\sin v$, $v=e^z$, $z=1+x$;

(e) $y=2^u$, $u=v^2$, $v=\sin x$;

(f) $y=\arccos u$, $u=v^{\frac{1}{2}}$, $v=\ln z$, $z=x^2-1$;

(g) $y=a^u$, $u=v^{\frac{1}{3}}$, $v=x^3+1$;

(h) $y=\operatorname{arc\,tg} u$, $u=v^{\frac{1}{3}}$, $v=\dfrac{x-1}{2}$.

第十三章

13.1. (a) 4.52, 4;　(b) -0.249, -0.25;

(c) 0.244, 0.25.

13.2. (a) $2x+3$;　(b) $3\cos(3x+1)$;

(c) $-2\sin(2x-3)$.

13.3. 12.　　13.4. $(1,1)$, $(-1,-1)$.

13.5. (a) $(0,0)$,　(b) $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$.

13.6. 12.　　13.7. $4\pi\rho\,\mathrm{tg}^2\dfrac{\theta}{2}$.

13.8. $f'(T_0)$.　　13.10. $f'(0)=0$.

13.14. 不可微分，因 $\lim\limits_{\Delta x\to+0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=+1$, $\lim\limits_{\Delta x\to-0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-1$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 不存在.

13.15. (a) $6x-5$;　(b) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x^2}$;

(c) $\frac{2mz+n}{p+q}$; (d) $3\sqrt{2}x^2-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$;

(e) $3v^2+2v-1$; (f) $\frac{2ax^3+bx^2-c}{(a+b)x^2}$.

13.16. -14, $\frac{13}{16}$, $-3a^4+10a^3-a^2$.

13.17. 13.

13.18. $\frac{3}{25}$, $\frac{17}{15}$.

13.19. $-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$.

13.20. 16, $\frac{1}{a^3}(15a^5-a^3+2)$.

13.21. $\frac{5}{9}$, 1.

13.22. $7x^6-10x^4+8x^3-12x^2+4x+3$.

13.23. $-\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

13.24. $\frac{1}{2\sqrt{x}}[(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})+2(\sqrt{2}+\sqrt{3}+$
$+\sqrt{6})\sqrt{x}+3x\sqrt{6}]$.

13.25. $-\frac{2}{(x-1)^2}$.

13.26. $\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$.

13.27. $\frac{2v^4(v^3-5)}{(v^3-2)^2}$.

13.28. $\frac{-3x^2}{\sqrt{\pi}}$.

13.29. $\frac{3-2t}{(t^2-3t+6)^2}$.

13.30. $\frac{9x^2(3-4x^3)}{(1-x^3)^2(1-2x^3)^2}$.

13.31. $\frac{1+2x+3x^2-2x^3-x^4}{(x^3+1)^2}$.

13.32. $\frac{-4x}{3(x^2-1)^2}-1+2x-3x^2$.

13.33. $(x-c)(x-d)(2x-a-b)+(x-a)(x-b)(2x-c-d)$.

13.34. $\frac{-6x^2}{(x^3-1)^2}$.

13.35. $\frac{1-\cos x-x\sin x}{(1-\cos x)^2}$.

13.36. $\varphi\cos\varphi$.

13.37. $\dfrac{\sin 2x\cdot\cos x^2+2x\sin x^2\cdot(1+\sin^2 x)}{\cos^2 x^2}$.

13.38. $1+\ln x$.

13.39. $\operatorname{tg} x+x\sec^2 x+\csc^2 x$.

13.40. $-\dfrac{8\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x^2}+2}{6\sqrt[6]{x}(x-2\sqrt[3]{x})^2}$.

13.41. $\dfrac{-(1+t)}{\sqrt{t}(t-1)^2}$.

13.42. $\dfrac{-2}{x(1+\ln x)^2}$.

13.43. $\dfrac{1}{x^{n+1}}(1-n\ln x)$.

13.44. $\sin x\cdot\ln x+x\cos x\cdot\ln x+\sin x$.

13.45. $\dfrac{1}{1+\cos t}$.

13.46. $\dfrac{1-x\ln 4}{4^x}$.

13.47. $10^z(1+z\ln 10)$.

13.48. $6(x^3-x)^5(3x^2-1)$.

13.49. $\dfrac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

13.50. $\dfrac{5(1+x^2)^4\cdot(x^2+2x-1)}{(1+x)^6}$.

13.51. $\dfrac{t^2(3-t)}{(1-t)^3}$.

13.52. $\dfrac{-2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^4}}$.

13.53. $\dfrac{3}{2}(2v+1)\sqrt{v^2+v+2}$.

13.54. $9\cos(3x+5)$.

13.55. $\dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

13.56. $\dfrac{2x^2-a^2}{2\sqrt{x^2-a^2}}$.

13.57. $\dfrac{x^4(7x^6-40)}{\sqrt[3]{(x^6-8)^2}}$.

13.58. $\dfrac{3-x}{2\sqrt{(1-x)^3}}$.

13.59. $\dfrac{x(x^2+2a^2)}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$.

13.60. $\dfrac{-4}{3\sqrt[3]{4x^2}(1+\sqrt[3]{2x})^2}$.

13.61. $-\sin 2x$.

13.62. $(x\cos x-\sin x)\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$.

13.63. $\dfrac{2x\sin x}{\cos^3 x}$.

13.64. $\frac{(1+\operatorname{tg} x)(\sin x+x\cos x)-x\sin x\sec^2 x}{(1+\operatorname{tg} x)^2}$.

13.65. $\sec^2\frac{x}{5}$.

13.66. $\frac{1}{3}\sin\frac{2x}{3}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin^2\frac{x}{3}\csc^2\frac{x}{2}$.

13.67. $\frac{2x}{1+x^4}$.

13.68. $\sec^2 x(1-\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^4 x)$.

13.69. $\frac{\sin 2x\cdot\sin x^2-2x\cos x^2\sin^2 x}{(\sin x^2)^2}$.

13.70. $n\sin^{n-1}x\cos(n+1)x$.

13.71. $\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}$.

13.72. $2\sin(4x-2)$.

13.73. $4(1+\sin^2 x)^3\sin 2x$.

13.74. $\frac{x\cos\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$.

13.75. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\sec\frac{x}{2}\sqrt{\csc x}$.

13.76. $\frac{e^{\sqrt{1+x}}}{2\sqrt{1+x}}$.

13.77. $\frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}$.

13.78. $\frac{(3x^2-6x+1)\log_2 e}{x(x^2-3x+1)}$.

13.79. $\frac{-1}{x\ln^2 x}$.

13.80. $\frac{(1+\sqrt{x})^2}{2x\sqrt{x}}$.

13.81. $\frac{6\ln^2(x^2)}{x}$.

13.82. $\frac{1}{x(\ln x)(\ln\ln x)}$.

13.83. $x^{n-1}(1+n\ln x)$.

13.84. $3^{\sin x}\cdot\cos x\cdot\ln 3$.

13.85. $\frac{\log_5 e}{x(1-x)}$.

13.86. $\frac{-\csc\sqrt{1+2x}\operatorname{ctg}\sqrt{1+2x}}{\sqrt{1+2x}}$.

13.87. $2^{\frac{x}{\ln x}}\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}\cdot\ln 2$.

13.88. $\frac{2}{\sin 2x}$.　　13.89. $2^x \ln 2 \cdot \cos(2^x)$.

13.90. $-\frac{2x \cdot \csc^2 \sqrt[3]{1+x^2}}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}$.　　13.91. $\frac{2a}{a^2-x^2}$.

13.92. $6e^{3x}\csc^2(e^{3x})\operatorname{ctg}(e^{3x})$.

13.93. $\frac{1}{\sqrt{2x+x^2}}$.　　13.94. $\frac{3}{x}\sec^3(\ln x)\operatorname{tg}(\ln x)$.

13.95. $4xe^{x^2+1}\sec^2(e^{x^2+1})\operatorname{tg}(e^{x^2+1})$.

13.96. $-3\sin 3x \sin(2\cos 3x)$.

13.97. $2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$.　　13.98. $\frac{(x^2-1)\sec^2\left(x+\frac{1}{x}\right)}{2x^2\sqrt{1+\operatorname{tg}\left(x+\frac{1}{x}\right)}}$.

13.99. $-\frac{1}{x^2}e^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}\left(\cos\frac{1}{x}+\operatorname{tg}\frac{1}{x}\sec\frac{1}{x}\right)$.

13.100. $\frac{2x}{2-2x^2+x^4}$.

13.101. $\frac{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+1}{8\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$.

13.102. $e^x(\sin x+\cos x+2x\cos x)$.

13.103. $-e^{-x}(\cos 3x+3\sin 3x)$.

13.104. $2xe^{-x^2}[e^{-x^2}\sin(e^{-x^2})-\cos(e^{-x^2})]$.

13.105. $\frac{-1}{6}\left(4\operatorname{ctg}\frac{x+1}{3}\csc^2\frac{x+1}{3}+3x\csc^2\frac{x^2+1}{4}\right)$.

13.106. $\frac{2}{x\sqrt{x^2-4}}$.　　13.107. $\frac{3}{2\sqrt{3x-9x^2}}$.

13.108. $\frac{2-3x^2}{2\sqrt{x^3-2x}(1-2x+x^3)}$.

13.109. $\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

13.110. $-\frac{x+\sqrt{1-x^2}\arccos x}{x^2\sqrt{1-x^2}}$.

13.111. $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)^2}$.

13.112. $\frac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{arc\,tg} x+\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$.

13.113. $\frac{2x}{\operatorname{arc\,tg} x}-\frac{x^2}{(1+x^2)(\operatorname{arc\,tg} x)^2}$.

13.114. $\frac{\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

13.115. $(\sin x+x\cos x)\operatorname{arc\,tg} x+\frac{x\sin x}{1+x^2}$.

13.116. $\arccos x$.

13.117. $\frac{x\arccos x-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

13.118. $e^{-x}\arccos\frac{1}{x}\left[\frac{2}{x\sqrt{x^2-1}}-\arccos\frac{1}{x}\right]$.

13.119. $2e^x\sqrt{1-e^{2x}}$.

13.120. $-\frac{1}{1+x^2}$.

13.121. $\sqrt{\frac{4}{x}-1}$.

13.122. $\frac{e^{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}(1+x)}$.

13.123. $\frac{2x}{\sqrt{x^4+2x^2+2}}$.

13.124. $\frac{-1}{\sqrt{2}(1+x)\sqrt{x-x^2}}$.

13.125. $\frac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}-1}}$.

13.126. $\frac{2\arcsin\frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}$.

13.127. $\frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{1-x^2}(\arccos x)^2}$.

13.128. $\frac{1}{x\operatorname{ch}^2(\ln x)}$.

13.129. $\frac{1}{1+2\operatorname{sh}^2 x}$.

13.130. $\frac{-2x}{\operatorname{ch}^2(1-x^2)}$.

13.131. $\operatorname{ch} x\cdot\operatorname{sh}(\operatorname{sh} x)$.

13.132. $e^{1-\cos x}(1+x\sin x)$.

13.133. $x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}(2+\ln x)$.

13.134. $(\ln x)^x\left(\frac{1}{\ln x}+\ln\ln x\right)$.

13.135. $\frac{1-\ln x}{x^2}\cdot x^{\frac{1}{x}}$.

13.136. $x^x(\ln x+1)$.

13.137. $(1+x^2)^{\sin x}\left[\frac{2x\sin x}{1+x^2}+\cos x\ln(1+x^2)\right]$.

13.138. $(\sin x)^{\cos x}[\cos x\cdot\operatorname{ctg}x-\sin x\cdot\ln\sin x]$.

13.139. $\frac{2x^2+6x-1}{3(x+2)(x^2+1)}\log e$.

13.140. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3x-2}{(5-2x)(x-1)}}\left[\frac{3}{3x-2}+\frac{2}{5-2x}-\frac{1}{x-1}\right]$.

13.141. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-1}{x(x+3)}}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right]$.

13.142. $\frac{2-3x-x^3}{2(1-x)(1+x^2)}\sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}$.

13.143. $\frac{x^4+6x^2+1}{3x(1-x^4)}\sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$.

13.144. $-\frac{1}{\cos x}$.

13.145. $e^x(x^2+1)$.

13.146. $\operatorname{th}\theta+\frac{\theta}{\operatorname{ch}^2\theta}$.

13.147. $(3\operatorname{sh}x+2)\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{ch}x$.

13.148. $e^{\operatorname{ch}x}(\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}^2 x)$.

13.149. $\frac{1}{2}\sqrt{1+\operatorname{cso}x}$.

13.150. $\frac{\ln x-2}{x^2}\sin\left[2\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)\right]$.

13.151. $\frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$.

13.152. $\frac{3}{2}\sin 2x\cdot(\cos x-2)$.

13.153. $\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}$.

13.154. $\dfrac{-x+\sqrt{1-x^2}}{x(2x^2-1)\sqrt{1-x^2}}$.

13.155. $\arcsin(\ln x)+\dfrac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

13.156. $-4\operatorname{ctg}2x\cdot\csc^2 2x$.

13.157. $\dfrac{-1}{(x^2+2x+2)\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{1+x}}$.

13.158. $\dfrac{9x\sqrt{x}+8x}{4\sqrt{1+\sqrt{x}}}$.

13.159. $\sin 2x\cdot\sin x^2+2x\sin^2 x\cdot\cos x^2$.

13.160. $\dfrac{x^2}{1-x^4}$.　　13.161. $\dfrac{-\sin\dfrac{\arcsin x}{2}}{2\sqrt{1-x^2}}$.

13.162. $\sin^5 3x\cdot\cos^3 3x$.　　13.163. $-\operatorname{th} x$.

13.164. $10^{x\operatorname{tg}2x}\cdot\ln 10\cdot(\operatorname{tg}2x+2x\sec^2 2x)$.

13.165. $\dfrac{e^x\cos^2 x}{x}(x\cos x\cdot\ln x-3x\sin x\cdot\ln x+\cos x)$.

13.166. $\dfrac{6}{x\ln(\ln^3 x)\cdot\ln x}$.

13.167. $\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x\left(\ln\dfrac{x}{1+x}+\dfrac{1}{1+x}\right)$.

13.168. $\dfrac{1}{2}(\operatorname{tg}2x)^{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}\cdot\left(8\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}\csc 4x-\dfrac{\ln\operatorname{tg}2x}{\sin^2\dfrac{x}{2}}\right)$.

13.169. $\dfrac{3x^2+10x+10}{25(x-5)^{\frac{4}{5}}(x^2+2)^{\frac{26}{25}}}$.

13.170. $\dfrac{(3-x)^3\cdot(x^2-32x-73)}{2\sqrt{x+2}(x+1)^6}$.

13.171. $\frac{1}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{x^2}{2\sqrt{x^2+a^2}}+\frac{a^2}{2}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

13.172. $\sqrt{x^2+a^2}$.　　13.173. $\frac{2x^2}{\sqrt[3]{(1+x^3)^2(1-x^3)^4}}$.

13.174. $\frac{x\ln x}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$.　　13.175. $\operatorname{th}^3 x$.

13.176. $(\sin x)^{1+\cos x}(\operatorname{ctg}^2 x-\ln\sin x)-$

$$-(\cos x)^{1+\sin x}(\operatorname{tg}^2 x-\ln\cos x).$$

13.177. $\frac{7}{8}\frac{1}{\sqrt[8]{x}}$.　　13.178. $\frac{-1}{1-x^2}$.

13.179. $1+x^x(\ln x+1)+x^{x^x}[x^x(\ln x+1)\ln x+x^{x-1}]$.

13.180. $\frac{(2x+3)^3}{6\sqrt[3]{(x+1)^4}\sqrt{x-6}}(50x^2-207x-243)$.

13.181. $\frac{\sin 2\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$.

13.182. $\frac{1}{2a}\left[\frac{x}{a^2+x^2}-\frac{x}{(a+x)^2}\right]$.

13.183. $\csc^3 x$.　　13.184. $\frac{2(1+\sin^3 x\cos x)}{\sqrt{4x+\sin^4 x}}$.

13.185. $\frac{-2\sin 6x}{\sqrt[3]{(1+\cos 6x)^2}}$.　　13.186. $3x^2\sin 2x^3$.

13.187. $\frac{-x\sin 2x^2}{\sqrt{1+\cos^2(x^2)}}$.　　13.188. $\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}}$.

13.189. $\frac{2x^3}{1-x^4}$.　　13.190. $\frac{1}{e^x-1}$.

13.191. $\frac{(1+\sin x)\sin(x-\cos x)}{\cos^2(x-\cos x)}$.

13.192. $\frac{1}{\sqrt{e^{2x}+4e^x+1}}$.　　13.193. $\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin^2 x}$.

13.194. $\sqrt{x^2+a^2}(a^2+4x^2)$. 13.195. $9x^2\arcsin x$.

13.196. $\dfrac{-1}{(1+x)^2}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\ e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$. 13.197. $-\dfrac{b^2x}{a^2y}$.

13.198. $\dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}$. 13.199. $\dfrac{2a}{3(1-y^2)}$.

13.200. $\dfrac{y}{y-x}$. 13.201. $\dfrac{y^2-xy\ln y}{x^2-xy\ln x}$.

13.202. $\dfrac{3a^2\cos 3x+y^2\sin x}{2y\cos x}$. 13.203. $-\dfrac{1+y\sin(xy)}{x\sin(xy)}$.

13.204. $\dfrac{e^y}{2-y}$. 13.205. $\dfrac{y\cos x+\sin(x-y)}{\sin(x-y)-\sin x}$.

13.206. $(2,4)$. 13.207. $(1,0)$, $(-1,-4)$.

13.208. $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,0)$.

13.209. $y=2x\pm 2$. 13.210. $3x+y+6=0$.

13.211. $27x-3y-79=0$. 13.212. $2x-y-1=0$.

13.213. $4x-y-6=0$. 13.214. $(0,-1)$.

13.215. $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{6}$, $y=-2x+\dfrac{2}{3}\pi+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

13.216. $x-y-3e^{-2}=0$. 13.217. $\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{16}\right)$, $(-1,1)$.

13.218. $x+2y-2=0$, $d=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

13.219. $\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{7}$, $\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{13}$. 13.220. $\operatorname{arc\,tg} 3$.

13.221. (a) $\theta_1=\theta_2=\operatorname{arc\,tg} 3$; (b) $\dfrac{\pi}{2}$; (c) $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{4}$.

13.224. $S=3\dfrac{3}{4}$. 13.225. $x+y=0$, $x+25y=0$.

13.227. -2 米/秒.

13.228. (a) 分别在 0 和 8 秒钟末了时;

(b) 分别在0.4和8秒钟末了时.

13.229. (a) 6.4米/秒; (b) −6.4米/秒.

13.230. $V_0=3$ 米/秒, $t=\frac{3}{2}$ 秒.

13.231. 0.14弧度/分.　　13.232. $-\frac{3}{\sqrt{5}}$ 米/秒.

13.233. (a) 0.875米/秒; (b) 下端离墙 $\frac{5}{\sqrt{2}}$ 米时;

(c) 下端离墙4米时。

13.234. $10\sqrt{\frac{2}{3}}\approx 8.16$ 公里/小时.

13.235. −2.8公里/小时.　　13.236. 144π 米²/秒.

13.237. $\frac{16}{\sqrt{3}}$.　　13.238. $\frac{3\sqrt{3}}{160}$ 米/秒.

13.239. $\frac{16}{25\pi}\approx 0.204$ 米/秒.　　13.240. 10厘米³/时.

13.241. 0.64厘米/分.

13.242. (a) $\Delta y=18$, $dy=11$; (b) $\Delta y=1.161$, $dy=1.1$;

(c) $\Delta y=0.110601$, $dy=0.11$.

13.243. $f'(x)=4$.　　13.244. $x=-2$.

13.245. (a) $-\frac{4}{x^3}dx$;　　(b) $\frac{5}{3\sqrt[3]{x^2}}dx$;

(c) $-\frac{m+n}{2x\sqrt{x}}dx$;　　(d) $-\frac{p\ln q}{q^x}dx$;

(e) $\left[(x^2-\sqrt{x})(2x+4)+\right.$

$\left.+(x^2+4x+1)\left(2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]dx$;

(f) $3(1+x-x^2)^2(1-2x)\,dx$;

(g) $2\,\mathrm{tg}\,x\cdot\sec^2 x\,dx$;

(h) $5^{\ln \mathrm{tg}\, x}\cdot\dfrac{2\ln 5}{\sin 2x}\,dx$;

(i) $\dfrac{(x^2-1)\sin x+2x\cos x}{(1-x^2)^2}\,dx$;

(j) $-2^{-\frac{1}{\cos x}}\cdot\ln 2\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$;

(k) $\left(3^{-\frac{1}{x^3}}\dfrac{3\ln 3}{x^4}+9x^2-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$;

(l) $-2x\sin(x^2)\,dx$; (m) $e^x(\sin^2 x+\sin 2x)\,dx$;

(n) $5x^{5x}(\ln x+1)\,dx$; (o) $3\,\mathrm{sh}\,3x\,dx$;

(p) $\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$; (q) $\dfrac{6x^2}{(x^3+1)^2}\,dx$.

13.246. (a) $dy\approx-0.0089$; (b) $dy\approx-0.0076$.

13.247. $\Delta y\approx 0.00582$.

13.248. (a) $\mathrm{arc\,tg}\,1.02\approx 0.795$; (b) $\mathrm{arc\,tg}\,0.97\approx 0.770$.

13.249. 0.7822. **13.250.** 0.5216.

13.251. 2.7456. **13.252.** 1.007.

13.253. 1.0434. **13.254.** -0.8947.

13.255. 0.4849. **13.256.** 0.995.

13.260. 1.9953. **13.261.** 0.01, 0.0052.

13.262. 0.51%. **13.263.** 0.5%, 0.25%.

13.264. 0.33%.

13.265. 5.76 米², 0.24 米², 4.2%.

13.266. $\dfrac{(2t^3+4t+7)(3t^2+2)}{3\sqrt[3]{[(t^3+2t+1)(t^3+2t+6)]^2}}\,dt$.

13.267. $\dfrac{8\ln 3\cdot t}{(t^2-1)^2}3^{-\frac{4}{t^2-1}}\cdot dt$. **13.268.** $\dfrac{4u-3}{2\sqrt{2u^2-3u+1}}\,du$.

13.269. $\frac{-2\,ds}{\cos 2s}$.

13.270. $y''=-2-12x^2$, $y'''=-24x$.

13.271. $f'''(2)=207360$.

13.272. $y''=-2\sin x-x\cos x$, $y'''=-3\cos x+x\sin x$.

13.273. $y''=2^x(\ln 2)^2$, $y'''=2^x(\ln 2)^3$.

13.274. $f''(0)=\frac{4}{e}$.　　13.275. $f''(1)=-\frac{1}{2}$.

13.276. $y^{(4)}=\frac{6}{x}$.　　13.277. $\frac{d^4\rho}{d\varphi^4}=16a\sin 2\varphi$.

13.278. $\frac{-3xr^2}{y^5}$.　　13.279. $2e^{x^2}(3x+2x^3)$.

13.280. $\frac{6x(2x^3-1)}{(x^3+1)^3}$.　　13.281. $\frac{-a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$.

13.282. $\frac{a+3\sqrt{x}}{4x\sqrt{x}(a+\sqrt{x})^3}$.　　13.283. $2\operatorname{arc\,tg} x+\frac{2x}{1+x^2}$.

13.284. $\frac{(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}}{4x\sqrt{x}}$.　　13.285. $2\sin x\sec^3 x$.

13.286. $-2\cos 2x\cdot\ln x-\frac{2}{x}\sin 2x-\frac{\cos^2 x}{x^2}$.

13.287. $e^x\left(\frac{x^2-2x+2}{x^3}\right)$.　　13.288. $-4\cos 4x$.

13.289. $-(\sin 2x+4\sin 4x-9\sin 6x)$.

13.290. $-\csc^2 x$.　　13.291. $\frac{a(a^2-1)\sin x}{\sqrt{(1-a^2\sin^2 x)^3}}$.

13.292. $x^x\left[(\ln x+1)^2+\frac{1}{x}\right]$.　　13.293. $\frac{\sin(x+y)}{[\cos(x+y)-1]^3}$.

13.294. $\frac{e^{x+y}(x-y)^2}{(x-e^{x+y})^3}-\frac{2(e^{x+y}-y)}{(x-e^{x+y})^2}$.

13.295. $\frac{e^{2s}(3-s)}{(2-s)^3}$. 13.296. $\frac{1}{e^2}$.

13.297. $\frac{d^2s}{dt^2}=-a\omega^2\sin\omega t$.

13.298. $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{df}{d\varphi}\cdot\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2f}{d\varphi^2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2$,

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{df}{d\varphi}\cdot\frac{d^3\varphi}{dx^3}+3\frac{d^2f}{d\varphi^2}\cdot\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^3f}{d\varphi^3}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^3.$$

13.299. $(-1)^n\frac{2\cdot n!}{(1+x)^{n+1}}$.

13.300. $(-1)^n\frac{(n-2)!}{x^{n-1}}$ $(n\geqslant 2)$.

13.301. $2^{n-1}\cdot\sin\left[2x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right]$.

13.302. $e^x(x+n)$. 13.303. $\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$.

13.311. $\frac{dy}{dx}=-\frac{b}{a}\operatorname{ctg}\varphi$, $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b}{a^2\sin^3\varphi}$,

$$\frac{d^3y}{dx^3}=-\frac{3b}{a^3}\frac{\cos\varphi}{\sin^5\varphi}.$$

13.312. $\frac{dy}{dx}=-\operatorname{tg}\varphi$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{3a\cos^4\varphi\sin\varphi}$,

$$\frac{d^3y}{dx^3}=-\frac{1}{9a^2}\sec^7\varphi\csc^3\varphi\,[4\sin^2\varphi-\cos^2\varphi].$$

13.313. $\frac{dy}{dx}=\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{a(1-\cos\varphi)^2}$.

13.314. $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2t}+\frac{3}{2}t$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-1}{4t^3}-\frac{3}{4t}$,

$$\frac{d^3y}{dx^3}=-\frac{3}{8t^5}(1+t^2).$$

13.315. $\frac{dy}{dx}=\frac{t}{2}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1+t^2}{4t}$, $\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{t^4-1}{8t^3}$.

13.316. $\frac{dx}{dy}=\frac{2a}{3b}\frac{1}{t}$, $\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{-2a}{9b^2}\frac{1}{t^4}$, $\frac{d^3x}{dy^3}=\frac{8a}{27b^3}\frac{1}{t^7}$.

13.317. $\frac{dy}{dx}=\frac{\sin t+t\cos t}{\cos t-t\sin t}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2+t^2}{a(\cos t-t\sin t)^3}$.

13.320. $\frac{d^3y}{dx^3}=0$.

13.321. $x+2y-4=0$, $2x-y-3=0$.

13.322. $4x+2y-3=0$, $2x-4y+1=0$.

13.323. $4x+3y-12a=0$, $3x-4y+6a=0$.

13.324. (a) $x'|_{t=t_0}=v_0\cos\alpha$, $y'|_{t=t_0}=v_0\sin\alpha-gt_0$;

(b) $v|_{t=t_0}=\sqrt{v_0^2-2v_0gt_0\sin\alpha+g^2t_0^2}$,

$$\theta=\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\alpha-\frac{gt_0}{v_0\cos\alpha}\right);$$

(c) $x''|_{t=t_0}=0$, $y''|_{t=t_0}=-g$.

第十四章

14.10. 有分别位于区间(1, 2), (2, 3), (3, 4)内的三个根。

14.16. 5.　14.17. $\frac{m}{n}a^{m-n}$.　14.18. $\frac{1}{n}$.

14.19. 1.　14.20. 2.　14.21. 2.

14.22. -2.　14.23. 0.　14.24. $-\frac{3}{5}$.

14.25. $-\frac{1}{2}$.　14.26. $-\frac{1}{8}$.　14.27. $\ln\frac{a}{b}$.

14.28. $-\frac{1}{6}$.　14.29. $\cos a$.　14.30. 2.

14.31. 1.　14.32. 1.　14.33. 3.

14.34. $\frac{2}{\pi}$.　14.35. 1.　14.36. $\frac{1}{2}$.

14.37. K.　14.38. ∞.　14.39. 1.

14.40. $-\frac{1}{2}$. 14.41. -1. 14.42. $\frac{1}{2}$.

14.43. 1. 14.44. e^a. 14.45. $\frac{1}{e}$.

14.46. 1. 14.47. $\frac{1}{\sqrt[6]{e}}$. 14.48. $\frac{1}{e}$.

14.49. 1. 14.50. 1. 14.51. 1.

14.52. e. 14.53. 1. 14.54. 2.

14.55. 1. 14.56. $\frac{4}{\pi}a^2$. 14.58. 1.

14.59. $f(x)=-56+21(x-4)+37(x-4)^2+$
$+11(x-4)^3+(x-4)^4$.

14.60. $f(x)=8-5(x+1)+(x+1)^3$.

14.61. $f(x)=x^6-9x^5+30x^4-45x^3+30x^2-9x+1$.

14.62. $f(x)=1+6(x-1)+15(x-1)^2+20(x-1)^3+$
$+15(x-1)^4+6(x-1)^5+(x-1)^6$.

14.63. $P(x)=-2(x-1)+2(x-1)^3+(x-1)^4$.

14.64. $f(x)=-[1+(x+1)+(x+1)^2+\cdots+(x+1)^n]+$
$+(-1)^{n+1}\frac{(x+1)^{n+1}}{[-1+\theta(x+1)]^{n+2}}$, $0<\theta<1$.

14.65. $f(x)=x+x^2+\frac{1}{2!}x^3+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}x^n+$
$+\frac{1}{(n+1)!}[n+1+\theta x]e^{\theta x}\cdot x^{n+1}$, $0<\theta<1$.

14.66. $f(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\frac{e^{\theta x}-e^{-\theta x}}{2(2n+1)!}x^{2n+1}$,
$0<\theta<1$.

14.67. $f(x)=\frac{2}{2!}x^2-\frac{2^3}{4!}x^4+\frac{2^5}{6!}x^6-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}+$

$$+(-1)^n\frac{2^{2n}}{(2n+1)!}\sin(2\theta x)\cdot x^{2n+1},\quad 0<\theta<1.$$

14.68. $f(x)=2-(x-2)+(x-2)^2-(x-2)^3+$

$$+\frac{(x-2)^4}{[1+\theta(x-2)]^5},\quad 0<\theta<1.$$

14.69. $f(x)=x+\dfrac{1+2\sin^2\theta x}{3\cos^4\theta x}x^3,\quad 0<\theta<1.$

14.70. $f(x)=x+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{1}{4!}\dfrac{9(\theta x)+6(\theta x)^3}{[1-(\theta x)^2]^{\frac{7}{2}}}x^4,\quad 0<\theta<1.$

14.71. $f(x)=(x-1)+\dfrac{3}{2}(x-1)^2+\dfrac{1}{3}(x-1)^3-\dfrac{1}{12}(x-1)^4+$

$$+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{2(x-1)^n}{n(n-1)(n-2)}+$$

$$+(-1)^n\frac{2}{(n+1)n(n-1)}\frac{(x-1)^{n+1}}{[1+\theta(x-1)]^{n-1}},\quad 0<\theta<1.$$

14.72. $\sqrt{x}=2+\dfrac{1}{4}(x-4)-\dfrac{1}{64}(x-4)^2+\dfrac{1}{512}(x-4)^3-$

$$-\frac{15(x-4)^4}{4!16[4+\theta(x-4)]^{\frac{7}{2}}},\quad 0<\theta<1.$$

14.74. $f(x)=1+x+\dfrac{1}{2!}x^2-\dfrac{x^3}{12}e^{\sin\theta x}\sin 2\theta x[3+\sin\theta x],$

$$0<\theta<1.$$

14.75. $\sqrt{e}\approx1.645.$　　**14.76.** $f(1.03)\approx0.8209.$

14.77. $f(1.97)\approx289.87,\quad f(2.02)\approx343.40.$

14.78. $f(1.005)\approx1.36425.$

14.79. $\ln(1-x)=-\ln 2-2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)-2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-$

$$-\frac{8}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3-\cdots-\frac{2^n}{n}\left(x-\frac{1}{2}\right)^n-$$

$$-\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{(n+1)\left[\frac{1}{2}-\theta\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]^{n+1}},\quad 0<\theta<1.$$

14.80. (a) $\sqrt[3]{30}\approx3.108,\quad |R_3|<1.88\times10^{-3}$;

(b) $\sin 18°\approx0.3087,\quad |R_3|<4.05\times10^{-4}$.

14.86. 单调区间为$(-\infty,-1)$, $(-1,3)$, $(3,+\infty)$.

14.87. 单调区间为$(-\infty,-1)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,+\infty)$.

14.88. 在$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{14},+\infty\right)$内单调增加,

在$\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{14}\right)$内单调减少.

14.89. 在$\left(-\infty,\frac{2}{3}a\right)$, $(a,+\infty)$内单调增加,

在$\left(\frac{2}{3}a,a\right)$内单调减少.

14.90. 在$(-\infty,0)$, $\left(0,\frac{1}{2}\right)$, $(1,+\infty)$内单调减少,

在$\left(\frac{1}{2},1\right)$内单调增加.

14.91. 在$(-\infty,0)$内单调增加, 在$(0,+\infty)$内单调减少.

14.92. 在$\left(0,\frac{1}{2}\right)$内单调减少, 在$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$内单调增加.

14.93. 在$\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{3},2\pi\right)$内单调减少,

在$\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)$内单调增加.

14.94. 在$\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$内单调增加,

在$\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\right)$内单调减少.

14.95. 在$(-\infty, +\infty)$内处处单调增加.

14.96. 在$(-\infty, +\infty)$内处处单调增加.

14.97. 在$\left(0, \frac{3}{4}a\right)$内单调增加，在$\left(\frac{3}{4}a, a\right)$内单调减少.

14.98. 在$(-1, 0)$内单调减少，在$(0, +\infty)$内单调增加.

14.99. 在$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$内单调减少，在$\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$内单调增加.

14.106. (i) $a>\frac{1}{e}$时没有实根，(ii) $0<a<\frac{1}{e}$时有二个实根，

(iii) $a=\frac{1}{e}$时只有$x=e$一个实根.

14.109. 极大：$y(0)=0$；　　极小：$y(1)=-1$.

14.110. 极大：$y(-1)=17$；　　极小：$y(3)=-47$.

14.111. 极大：$y(0)=4$；　　极小：$y(-2)=\frac{8}{3}$.

14.112. 极大：$y(1)=2$；　　极小：$y(-1)=-2$.

14.113. 极大：$y\left(\frac{12}{5}\right)=\sqrt{\frac{41}{20}}$.

14.114. 极大：$y(0)=\sqrt[3]{a^4}$；　　极小：$y(\pm a)=0$.

14.115. 极小：$y(0)=0$.　　14.116. 无极值.

14.117. 极大：$y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{81}{8}\sqrt[3]{18}$；极小：$y(-1)=0, y(5)=0$.

14.118. 极小：$y(e^{-\frac{1}{2}})=-\frac{1}{2e}$.

14.119. 极大：$y\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}$；

极小：$y\left(\frac{5\pi}{4}+2k\pi\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}$.

$(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots,)$

14.120. 极大：$y(-a)=-2a$；极小：$y(a)=2a$.

14.121. 极大：$y\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{4}$.

14.122. 极大：$y(2)=\frac{4}{e^2}$； 极小：$y(0)=0$.

14.123. 极小：$y(e)=e$.

14.124. 极大：$y(e)=e^{\frac{1}{e}}$.

14.125. 极大：$y\left(-\frac{3}{2}\right)=0$； 极小：$y\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{27}{2}$.

14.126. 极大：$y(1)=1$； 极小：$y(0)=0, y(2)=0$.

14.127. 沒有极值.

14.128. 极大：$y\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=1$；极小：$y\left(\frac{\pi}{2}+\overline{2k+1}\,\pi\right)=-1$.

$(k=0, \pm1, \pm2, \cdots.)$

14.129. 极小：$y(1)=2-4\ln 2$.

14.130. 极大：$y(\pm1)=\frac{1}{e}$； 极小：$y(0)=0$.

14.131. 极大：$y(-2)=21$；极小：$y(1)=-6$.

14.132. 极小：$y(1)=2$.

14.133. 极大：$y(1)=\frac{7}{3}$； 极小：$y(3)=1$.

14.134. 极大：$y(1)=10$； 极小：$y(5)=-22$.

14.135. 极大：$y(\pm1)=1$； 极小：$y(0)=0$.

14.136. 极大：$y(0)=2$； 极小：$y(\pm2)=-14$.

14.137. 极大：$y(3)=3834$, $y(-4)=-3712$;

极小：$y(-3)=-3834$, $y(4)=3712$.

14.138. 极大：$y(1)=2$. 14.139. 沒有极值.

14.140. 极大：$f(-\sqrt{2})=\frac{4+3\sqrt{2}}{4-3\sqrt{2}}$;

极小：$f(\sqrt{2})=\dfrac{4-3\sqrt{2}}{4+3\sqrt{2}}$.

14.141. 极大：$y\left(\dfrac{12}{5}\right)=\dfrac{1}{24}$.

14.142. 极小：$y\left(-\dfrac{1}{2}\ln 2\right)=2\sqrt{2}$.

14.143. 极大：$y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$.　**14.144.** 沒有极値.

14.145. 极大：$y\left(\dfrac{3}{4}\pi+2k\pi\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3}{4}\pi+2k\pi}$;

极小：$y\left(-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3}{4}\pi+2k\pi}$.

$(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots.)$

14.147. $a=2$, $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$ 为极大値.

14.148. 最大値：$y=13$;　　最小値：$y=4$.

14.149. 最大値：$y=8$;　　最小値：$y=0$.

14.150. 最大値：$y=2$;　　最小値：$y=-10$.

14.151. 最大値：$y=2$;　　最小値：$y=-12$.

14.152. 最大値：$y=10$;　　最小値：$y=6$.

14.153. 最大値：$y=1$;　　最小値：$y=\dfrac{3}{5}$.

14.154. 最大値：$y=\dfrac{3}{5}$;　　最小値：$y=-1$.

14.155. 沒有最大値;　　最小値：$y=(a+b)^2$.

14.156. 最大値：$y=\dfrac{\pi}{2}$;　　最小値：$y=-\dfrac{\pi}{2}$.

14.157. 最大値：$y=1$;　　沒有最小値.

14.158. 沒有最大値;　　最小値：$y=\left(\dfrac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$.

14.159. 最大值：$y=\sqrt[3]{9}$； 最小值：$y=0$.

14.160. 最大值：$y=\frac{\pi}{4}$； 最小值：$y=0$.

14.161. 最大值：$y=2$； 最小值：$y=-25$.

14.162. 将 8 分为 4 与 4 的和.

14.163. 箱子各边为 3 厘米，6 厘米，4 厘米.

14.164. 所剪去的小正方形边长为 1 厘米.

14.165. 该底边长 $\sqrt[3]{4V}$.

14.166. 柱的底半径为 $r=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$，高为 $H=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.

14.167. 圆锥形的高为 $H=\frac{20\sqrt{3}}{3}$ 厘米.

14.168. 圆柱体的高为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}R$.

14.169. 圆锥体的高为 $H=\frac{4}{3}R$.

14.170. 运动开始后 $1\frac{27}{43}$ 小时.

14.171. 矩形各边为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}R$，$\frac{\sqrt{5}}{5}R$.

14.172. $H=\frac{4}{3}R$. 14.173. $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}=1$.

14.174. 矩形各边为 $\sqrt{2}a$，$\sqrt{2}b$.

14.175. $\alpha=2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$. 14.176. $r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$，$H=\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$.

14.177. $r=h=\frac{l}{4+\pi}$ 时，能通过的光线最多.

14.178. 高为 $2a+\sqrt{\frac{as}{b}}$，宽为 $2b+\sqrt{\frac{bs}{a}}$ 时最有利.

14.179. 下干长为 $\frac{16-2\sqrt{3}}{3}$ 米，臂长为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 米.

14.180. 高 $H=\frac{R}{\sqrt{2}}$.　　14.181. 距离 $d=2.4$ 米.

14.182. 在 5 小时末.

14.183. 应放在河边，离甲城 $50-\frac{100}{\sqrt{6}}$ 公里处.

14.184. 在离乙城 1.5 公里处.

14.186. $s=\frac{\sqrt{(av_2^2-bv_1v_2)^2+(bv_1^2+av_1v_2)^2}}{v_1^2+v_2^2}$.

14.187. 在距离渔站 3 公里处登岸.

14.188. 夹角 $\alpha=60°$.　　14.189. $\alpha\approx14°$.

14.190. 杆长为 14 米.

14.191. 速度为 $10\sqrt[3]{20}$ 公里/小时.

14.192. (a) $m=1$;　　(b) $m=\frac{4}{3}$.

14.193. 在点(1, 11)邻近向下凹，在点(3, 3)邻近向上凹.

14.194. 在点 $\left(-1, -\frac{\pi}{4}\right)$ 邻近向上凹，在点 $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ 邻近向下凹.

14.195. 在点 (1, 0) 邻近是向上凹.

在点 $\left(\frac{1}{e^2}, \frac{-2}{e^4}\right)$ 邻近是向下凹.

14.198. 拐点: $\left(\frac{5}{3}, \frac{-250}{27}\right)$; 在 $\left(-\infty, \frac{5}{3}\right)$ 内向下凹;

在 $\left(\frac{5}{3}, +\infty\right)$ 内向上凹.

14.199. 沒有拐点; 处处向上凹.

14.200. 拐点: $(-3, 294)$, $(2, 114)$;

在 $(-\infty, -3)$, $(2, +\infty)$ 内向下凹; 在 $(-3, 2)$ 内向上凹.

14.201. 沒有拐点;处处向上凹.

14.202. 拐点: $\left(-3a, -\frac{9a}{4}\right)$, $(0, 0)$, $\left(3a, \frac{9a}{4}\right)$;

在$(-3a, 0)$, $(3a, +\infty)$内向下凹; 在$(-\infty, -3a)$, $(0, 3a)$内向上凹.

14.203. 拐点: (b, a); 在$(-\infty, b)$内向下凹; 在$(b, +\infty)$内向上凹.

14.204. 拐点: $(-1, \ln 2)$, $(1, \ln 2)$;

在$(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$内向下凹; 在$(-1, 1)$内向上凹.

14.205. 拐点: $\left(ae^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)$; 在$(0, ae^{\frac{3}{2}})$内向下凹; 在$(ae^{\frac{3}{2}}, +\infty)$内向上凹.

14.206. 沒有拐点;处处向上凹.

14.207. 拐点: $\left(\frac{1}{2}, e^{\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}}\right)$;

在$\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$内向下凹; 在$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$内向上凹.

14.208. 拐点: $(1, -7)$; 在$(0, 1)$内向下凹; 在$(1, +\infty)$内向上凹.

14.209. 拐点: $(0, 0)$; 在$(-\infty, 0)$内向下凹; 在$(0, +\infty)$内向上凹.

14.210. 沒有拐点;处处向下凹.

14.211. 拐点: $(1, -2)$; 在$(-\infty, 1)$内向下凹; 在$(1, +\infty)$内向上凹.

14.212. 拐点: $(b, 0)$; 在$(-\infty, b)$内向下凹; 在$(b, +\infty)$内向上凹.

14.213. 沒有拐点;处处向上凹.

14.214. 拐点: $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$; 在$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$,

$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ +\infty\right)$内向上凹；在$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$内向下凹.

14.215. 拐点：$(k\pi,\ 0)$；在$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\pi\right)$内向下凹；在$\left(k\pi,\ k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$内向上凹．　$(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots.)$

14.216. 拐点：$\left(2,\ \frac{2}{e^2}\right)$；在$(-\infty,2)$内向下凹；在$(2,+\infty)$内向上凹.

14.217. 拐点：$(1,4)$及$(1,\ -4)$.

14.218. 拐点：$(-1,\ -1)$, $\left(2-\sqrt{3},\frac{1-\sqrt{3}}{4(2-\sqrt{3})}\right)$,

$\left(2+\sqrt{3},\frac{1+\sqrt{3}}{4(2+\sqrt{3})}\right)$.

14.219. $a=-\frac{3}{2}$, $b=\frac{9}{2}$.

14.220. $x=x_0$不是极值点，$(x_0,\ f(x_0))$为拐点.

14.221. $y=0$.

14.222. $x=b$, $y=c$.

14.223. $x=-1, y=\frac{1}{2}x-1$.

14.224. $x+y=0$.

14.225. $y=x+2$.

14.226. $y=x$, $y=-x$.

14.227. $y=-1, y=-2x-1$.

14.228. $x=\frac{-1}{e}$, $y=x+\frac{1}{e}$.

14.229. $x=0$, $y=x$.

14.230. $x=0$, $y=x+3$.

14.231. $y=\frac{\pi}{2}x-1$.

14.232. $y=2x+\frac{\pi}{2}, y=2x-\frac{\pi}{2}$.

14.233. $x=1$, $y=0$.

14.234. $x=-2$, $y=0$.

14.235. $x=0$, $y=0$.

14.236. $x=0$.

14.237. $x=2a$, $y=x+a$, $y=-x-a$.

14.238. 极小：$y\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)=10-\frac{3}{4}\sqrt[3]{4}$，处处向上凹.

14.239. 对称于 y 轴; 极大: $y(0)=8a$;

拐点: $\left(\pm\frac{a}{\sqrt{3}}, 6a\right)$; 渐近线 $y=0$.

14.240. 定义域: $x\neq 0$; 拐点: $\left(\frac{1}{2}, e^{-2}\right)$; 渐近线 $y=1$ 及 $x=0$.

[注意: 当 $x\to+0$, $y\to 0$.]

14.241. 定义域: $(2k\pi, \overline{2k+1}\pi)$; 曲线全部在 x 轴下方.

极大: $y\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=0$; 渐近线 $x=k\pi$.

$(k=0, \pm1, \pm2, \cdots.)$

14.242. 定义域: $x\neq -1$; 极大: $y(-2)=-4$;

极小: $y(0)=0$; 渐近线 $x=-1$, $y=x-1$.

14.243. 极大: $y(1)=\frac{1}{e}$; 拐点: $\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$; 渐近线 $y=0$.

14.244. 对称于原点; 定义域: $x\neq\pm\sqrt{3}$; 拐点: $(0, 0)$;

渐近线: $y=0, x=\sqrt{3}, x=-\sqrt{3}$.

14.245. 对称于 y 轴,并在 x 轴上方; 极小: $y(0)=2$.

14.246. 定义域: $(-\infty, -1), [1, +\infty)$; 渐近线 $x=-1, y=1$.

14.247. 定义域: $(0, +\infty)$; 极大: $f(e)=\frac{1}{e}$;

拐点: $\left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)$; 渐近线 $x=0, y=0$.

14.248. 定义域: $(-1, +\infty)$; 极小: $y(0)=0$; 处处向上凹;

渐近线: $x=-1$.

14.249. 极大: $y(-1)=19$; 极小: $y(3)=-13$; 拐点: $(1, 3)$.

14.250. 对称于 y 轴; 极大: $y(0)=-5$; 极小: $y(\pm1)=-6$;

拐点: $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{50}{9}\right)$.

14.251. 定义域: $(0, +\infty)$; 拐点: $\left(e^{\frac{3}{2}}, e^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)$;

渐近线：$x=0$，$y=x$.

14.252. 极大：$y(0)=0$；极小：$y(1)=-1$；拐点：$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

14.253. 对称于原点；极大：$y(-1)=2$；极小：$y(1)=-2$；

拐点：$(0,0)$，$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{7\sqrt{2}}{8}\right)$，$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{7\sqrt{2}}{8}\right)$.

14.254. 对称于原点；极大：$y(1)=\frac{1}{2}$；极小：$y(-1)=-\frac{1}{2}$；

拐点：$\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$，$(0,0)$，$\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$；

渐近线：$y=0$.

14.225. 定义域：$x\neq\pm1$；对称于 y 轴；极小：$y(0)=1$；

渐近线：$x=1, x=-1, y=0$.

14.256. 定义域：$x\neq\pm1$；对称于原点；拐点：$(0,0)$；

渐近线：$x=1, x=-1, y=0$.

14.257. 对称于原点；极大：$y(-1)=\frac{\pi}{2}-1$；极小：$y(1)=1-$

$-\frac{\pi}{2}$；拐点：$(0,0)$；渐近线：$y=x+\pi$, $y=x-\pi$.

14.258. 定义域：$x\neq0$；极小：$y\left(\frac{1}{2}\right)=3$；拐点：$\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, 0\right)$；

渐近线：$x=0$.

14.259. 定义域：$x\neq1$；极小：$y(0)=-1$；拐点：$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{8}{9}\right)$；

渐近线：$x=1$，$y=0$.

14.260. 对称于原点；极大：$y(\sqrt{2})=\frac{1}{e}\sqrt{2e}$；极小：$y(-\sqrt{2})=$

$=-\frac{1}{e}\sqrt{2e}$；拐点：$(0,0)$，$(\pm\sqrt{6}, \pm\sqrt{6}\,e^{-\frac{3}{2}})$；

渐近线：$y=0$.

14.261. 极大：$y(2)=\frac{4}{e^2}$；极小：$y(0)=0$；拐点：$x=2\pm\sqrt{2}$；

渐近线：$y=0$.

14.262. 定义域：$x\neq 0$；极小：$y(1)=e$；渐近线：$x=0, y=0$.

14.263. 对称于 y 轴；极小：$y(0)=0$；拐点：$(\pm 1, \ln 2)$.

14.264. 定义域：$x\neq 0$；渐近线：$x=0$，$y=0$，$y=-1$.

14.265. 定义域：$[-1, +\infty)$；对称于 x 轴；拐点：$(0, 1)$，$(0, -1)$.

14.266. 定义域：$[0, +\infty)$；对称于 x 轴；极值：$y\left(\frac{1}{3}\right)=\pm\frac{2}{9}\sqrt{3}$.

14.267. 定义域：$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$；极大：$y(2k\pi)=1$；

极小：$y(\overline{2k+1}\pi)=-1$；渐近线：$x=\frac{2k+1}{2}\pi$.

$(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots.)$

14.268. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

14.269. 2.

14.270. 0.

14.271. $\left|\frac{2}{3a\sin 2t_1}\right|$.

14.272. $\frac{2}{\pi a}$.

14.273. $\frac{2+\theta^2}{a(1+\theta^2)^{\frac{3}{2}}}$.

14.274. $\frac{\sqrt{10}}{50}$.

14.275. 6.

14.276. $(0, 0)$.

14.277. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{2}\ln 2\right)$.

14.279. $(\xi-3)^2+(\eta+2)^2=8$.

14.280. $\left(\xi-\frac{\pi-10}{4}\right)^2+\left(\eta-\frac{9}{4}\right)^2=\frac{125}{16}$.

14.282. $0.18<x<0.19$.

14.283. $-0.64<x_1<-0.63$, $0.87<x_2<0.88$.

14.284. $0.38<x_1<0.39$, $1.24<x_2<1.25$.

14.285. $-0.20<x<-0.19$.

14.286. $1.675<x_1<1.676$, $0.539<x_2<0.540$,

$-2.215 < x_3 < -2.214.$

14.287. $1.045.$　　**14.288.** $x \approx 4.497.$

14.289. $0.5110 < x < 0.5111.$

第十五章

15.1. $y = x^2.$　　**15.2.** $y = \frac{5}{3}x^3.$

15.6. $s = s_0 + \frac{1}{\omega}(1 - \cos \omega t).$

15.7. (a) $v = 4t^3 + 3\cos t + 2;$

(b) $s = t^4 + 2t + 3\sin t - 3.$

15.8. (a) $(-5\cos t + 10, 2\sin t);$

(b) $\begin{cases} x = -5\cos t + 10, \\ y = 2\sin t \end{cases}$ 或 $\frac{(x-10)^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1.$

15.9. $-\frac{1}{2x^2} + C.$　　**15.10.** $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C.$

15.11. $\sqrt{\frac{2h}{g}} + C.$　　**15.12.** $\frac{m}{n+m}y^{\frac{n+m}{m}} + C.$

15.13. $\frac{15}{7}x^{\frac{7}{5}} - \frac{50}{3}x^{\frac{3}{10}} + x + C.$

15.14. $a^3x - a^2bx^3 + \frac{3}{5}ab^2x^5 - \frac{b^3}{7}x^7 + C.$

15.15. $\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} - \frac{6}{5}x^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}} + C.$

15.16. $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + x + C.$

15.17. $\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} - \frac{24}{17}x^{\frac{17}{12}} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + C.$

15.18. $-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}} - e^x + \ln|x| + C.$

15.19. $\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+9x+C$. 15.20. $\frac{1}{2}x^2-\sqrt{2}x+C$.

15.21. $\arcsin x+C$. 15.22. $3x-3\operatorname{arc\,tg} x+C$.

15.23. $-\frac{1}{x}+\operatorname{arc\,tg} x+C$. 15.24. $\frac{3^x}{\ln 3}+C$.

15.25. $\frac{3^x e^x}{\ln 3+1}+C$. 15.26. $2x-\frac{5\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln 2-\ln 3}+C$.

15.27. $\operatorname{tg} x-x+C$. 15.28. $x-\sin x+C$.

15.29. $-(\operatorname{ctg} x+\operatorname{tg} x)+C$. 15.30. $\sin x-\cos x+C$.

15.31. $\frac{1}{2}\operatorname{tg} x+\frac{x}{2}+C$. 15.32. $\frac{1}{202}(2x-3)^{101}+C$.

15.33. $\frac{3}{2(1-2x)}+C$. 15.34. $-\frac{3}{4}(3-2x)^{\frac{2}{3}}+C$.

15.35. $\frac{1}{3}\ln|3x-5|+C$.

15.36. $k\neq-1$, $\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{(k+1)}(a+bx)^{k+1}+C$;

$k=-1$, $\frac{1}{b}\ln|a+bx|+C$.

15.37. $-\frac{1}{3}\cos 3x+C$. 15.38. $-\frac{1}{\beta}\sin(\alpha-\beta x)+C$.

15.39. $-\frac{1}{5}\ln|\cos 5x|+C$. 15.40. $-\frac{1}{3}e^{-3x}+C$.

15.41. $\frac{1}{2}\frac{10^{2x}}{\ln 10}+C$. 15.42. $\frac{1}{m}\frac{1}{\ln a}a^{mx+n}+C$.

15.43. $\frac{1}{3}\operatorname{ch} 3x+C$. 15.44. $\frac{1}{2}\operatorname{sh}(2x-5)+C$.

15.45. $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+C$. 15.46. $\frac{1}{5}\arcsin 5x+C$.

15.47. $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3}{2}x+C$. 15.48. $\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg} 3x+C$.

15.49. $\frac{\sqrt{2}}{6}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{3}x+C.$

15.50. $\frac{1}{4}\ln(4x+\sqrt{1+16x^2})+C.$

15.51. $\frac{1}{3}\ln(3x+\sqrt{4+9x^2})+C.$

15.52. $\ln(x^2-3x+8)+C.$

15.53. $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.$

15.54. $\frac{1}{3}\ln|x^3+1|+C.$

15.55. $-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C.$

15.56. $\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}+C.$

15.57. $\frac{5}{18}(x^3+2)^{\frac{6}{5}}+C.$

15.58. $\sqrt{x^2+1}+C.$

15.59. $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^4+1)^2}+C.$

15.60. $\frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg}\frac{x^3}{2}+C.$

15.61. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{2}+C.$

15.62. $-\cos e^x+C.$

15.63. $\frac{1}{2}e^{x^2}+C.$

15.64. $-\frac{1}{3}e^{-x^3}+C.$

15.65. $\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3}+C.$

15.66. $\ln|\ln x|+C.$

15.67. $-\frac{2}{\sqrt{\sin\theta}}+C.$

15.68. $2\sqrt{\operatorname{tg}x}+C.$

15.69. $\frac{1}{3}(\operatorname{arc\,tg}x)^3+C.$

15.70. $-\frac{1}{\arcsin x}+C.$

15.71. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C.$

15.72. $\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.$

15.73. $\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}\sin 4x+C.$

15.74. $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{16}\sin 8x+C.$

15.75. $\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C.$

15.76. $\frac{1}{8}\cos^8 x-\frac{1}{6}\cos^6 x+C.$

15.77. $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg} x+C$. 15.78. $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg} x+x+C$.

15.79. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C$.

15.80. $\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C$.

15.81. $\frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}+C$.

15.82. $\sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{x}+C$.

15.83. $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$. 15.84. $\frac{1}{9}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}+C$.

15.85. $\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+C$.

15.86. $\frac{1}{5}\sqrt{(1+x^2)^5}-\frac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3}+C$.

15.87. $\frac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8}-\frac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5}+C$.

15.88. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}-\frac{3}{2}\arcsin x+C$.

15.89. $\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{24}\ln(x^6+4)+C$.

15.90. $-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$.

15.91. $x\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x+C$. 15.92. $-e^{-x}(x+1)+C$.

15.93. $\frac{1}{\omega}\left[x^2\sin\omega x+\frac{2}{\omega}x\cos\omega x-\frac{2}{\omega^2}\sin\omega x\right]+C$.

15.94. $\frac{a^x}{\ln a}\left(x^2-\frac{2}{\ln a}x+\frac{2}{\ln^2 a}\right)+C$.

15.95. $x(\ln x-1)+C$.

15.96. $x\ln^2 x-2x(\ln x-1)+C$.

15.97. $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x-\frac{1}{n+1}\right)+C$.

15.98. $x \operatorname{arc tg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$.

15.99. $\frac{1}{2}(x^2 \operatorname{arc tg} x-x+\operatorname{arc tg} x)+C$.

15.100. $x \arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$.

15.101. $\frac{e^{ax}}{n^2+a^2}(a\cos nx+n\sin nx)+C$.

15.102. $\frac{1}{3}(x^3+1)\ln(1+x)-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{6}-\frac{x}{3}+C$.

15.103. $-\frac{1}{x}(\ln^3 x+3\ln^2 x+6\ln x+6)+C$.

15.104. $x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C$.

15.105. $\frac{1}{99}\cdot\frac{1}{(1-x)^{99}}-\frac{1}{49}\frac{1}{(1-x)^{98}}+\frac{1}{97}\frac{1}{(1-x)^{97}}+C$.

15.106. $\frac{1}{3}\sqrt{(x+1)^3}-\frac{1}{3}\sqrt{(x-1)^3}+C$.

15.107. $\frac{1}{3}e^{x^3}(x^3-1)+C$.

15.108. $-\frac{1}{3}\frac{1}{\sin^3\theta}+\frac{1}{\sin\theta}+C$.

15.109. $\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x+C$.

15.110. $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x+C$.

15.111. $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+C$.

15.112. $-\frac{1}{1+\operatorname{tg} x}+C$.

15.113. $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 t+\operatorname{ctg} t+C$.

15.114. $\frac{1}{2}(\operatorname{tg} x+\ln|\operatorname{tg} x|)+C$.

15.115. $-e^{\frac{1}{x}}+C$.

15.116. $e^{e^x}+C$.

15.117. $\ln(e^x+e^{-x})+C$.

15.118. $\operatorname{arc tg}(\ln x)+C$.

15.119. $\frac{1}{2}(2+\ln x)^2+C$.

15.120. $-\frac{1}{4}\left(x\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C.$

15.121. $\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C.$

15.122. $x\,\mathrm{tg}\,x+\ln|\cos x|-\frac{1}{2}x^2+C.$

15.123. $\frac{1}{6}x^3+\frac{x^2}{4}\sin 2x+\frac{x}{4}\cos 2x-\frac{\sin 2x}{8}+C.$

15.124. $\frac{1}{3}\mathrm{sh}^3 x+\frac{1}{5}\mathrm{sh}^5 x+C.$

15.125. $\arcsin(2x-1)+C.$

15.126. $\frac{3}{2}\ln(x^2+2x+17)-\frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x+1}{4}+C.$

15.127. $\frac{1}{6}\sqrt{2+4x}(x-1)+C.$

15.128. $-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}\lg x+\frac{1}{2\ln 10}\cdot\frac{1}{x^2}\right)+C.$

15.129. $-\frac{x}{2}\mathrm{ctg}^2 x-\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\,x-\frac{1}{2}x+C.$

15.130. $\sin x\cos^3 x+\frac{3}{8}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x\right)+C.$

15.131. $\mathrm{tg}\,x\ln\cos x+\mathrm{tg}\,x-x+C.$

15.132. $\frac{1}{4}\ln(1+x^4)+\frac{1}{4(1+x^4)}+C.$

15.133. $\frac{1}{5}\ln|5x+\sqrt{25x^2-9}|+C.$

15.134. $\frac{1}{4}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{2x-1}{2}+C.$ 15.135. $\frac{1}{2}\arcsin(2x+3)+C.$

15.136. $\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$ 15.137. $\frac{1}{4}\,\mathrm{arc\,tg}\left(x+\frac{1}{2}\right)+C.$

15.138. $\arcsin\frac{x-1}{2}+C.$

15.139. $\ln(x-1+\sqrt{5-2x+x^2})+C.$

15.140. $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{2x-1}{2x+3}\right|+C.$

15.141. $\frac{1}{4}\ln(4x+1+\sqrt{16x^2+8x+5})+C.$

15.142. $\frac{1}{3}\ln|3x-1+\sqrt{9x^2-6x-1}|+C.$

15.143. $-\sqrt{1-x^2}+\arcsin x+C.$

15.144. $\frac{3}{2}\ln(x^2+9)-\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{3}+C.$

15.145. $\frac{2}{9}\sqrt{9x^2-4}-\frac{1}{3}\ln|3x+\sqrt{9x^2-4}|+C.$

15.146. $2\sqrt{1+x^2}+3\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C.$

15.147. $\sqrt{3x^2-5x+6}+C.$

15.148. $-\frac{2}{3}x^3\sqrt{a^3-x^3}-\frac{4}{9}\sqrt{(a^3-x^3)^3}+C.$

15.149. $\frac{x}{2}(\sin\ln x-\cos\ln x)+C.$

15.150. $\frac{1}{8}\sin 2x+\frac{1}{16}\sin 4x+\frac{x}{4}+\frac{\sin 6x}{24}+C.$

15.151. $\frac{1}{2}\ln|\sin(2x+1)|+C.$

15.152. $-\frac{1}{10}\cos\left(5x+\frac{\pi}{12}\right)+\frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)+C.$

15.153. $3\sin\frac{x}{6}+\frac{3}{5}\sin\frac{5}{6}x+C.$

15.154. $\frac{1}{7}\sec^7 x-\frac{2}{5}\sec^5 x\frac{\sec^3 x}{3}+C.$

15.155. $-\frac{1}{8}\csc^8 x+\frac{1}{3}\csc^6 x-\frac{\csc^4 x}{4}+C$.

15.156. $\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C$.

15.157. $2\sin\sqrt{x}+C$.

15.158. $2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+\frac{x^3}{4}\sqrt{4-x^2}+C$.

15.159. $-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\arcsin\frac{x}{a}+C$.

15.160. $-\sqrt{1-x^2}+\frac{2}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}-\frac{1}{5}\sqrt{(1-x^2)^5}+C$.

15.161. $\frac{1}{2}\left(\operatorname{arc\,tg} x-\frac{x}{1+x^2}\right)+C$.

15.162. $\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\frac{1}{x}\right|+C$. 15.163. $-\frac{1}{45}\frac{\sqrt{(9-x^2)^5}}{x^5}+C$.

15.164. $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$.

15.165. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$.

15.166. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$.

15.167. $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C$.

15.168. $-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+x+C$.

15.169. $\sqrt{1+x^2}\operatorname{arc\,tg} x-\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$.

15.170. $\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+9x-27\ln|x+3|+C$.

15.171. $\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+13)-\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+2}{3}+C$.

15.172. $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+8\ln|x|-4\ln|x+1|-3\ln|x-1|+C$.

15.173. $\frac{x}{4}+\ln|x|-\frac{7}{16}\ln|2x-1|-\frac{9}{16}\ln|2x+1|+C.$

15.174. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|+C.$

15.175. $\frac{x^2}{2}+\ln\left|\frac{x(x-2)\sqrt{(x+1)^3(x-1)}}{x+2}\right|+C.$

15.176. $C-\frac{11}{2}\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{4}{x-2}.$

15.177. $\ln\left|\frac{x^2}{x+1}\right|+\frac{6}{x+1}+C.$　15.178. $x+\frac{1}{x}+\ln\frac{(x-1)^2}{|x|}+C.$

15.179. $\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$

15.180. $\frac{x^2}{2}+2x-\frac{1}{4(x-1)^2}-\frac{9}{4(x-1)}+\frac{31}{8}\ln|x-1|+$

$+\frac{1}{8}\ln|x+1|+C.$

15.181. $\ln\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}+C.$　15.182. $\frac{x^3}{3}-x+\operatorname{arc\,tg} x+C.$

15.183. $\frac{1}{3}\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$

15.184. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x+C.$

15.185. $\frac{1}{4}\ln\frac{x^4}{(x+1)^2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x+C.$

15.186. $\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2(x+1)}+C.$

15.187. $\ln\frac{\sqrt{(x^2-2x+5)^3}}{|x-1|}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{2}+C.$

15.188. $\frac{1}{x^2(x^2+1)}+\ln\sqrt{x^2+1}+C.$

15.189. $\frac{1}{16}\frac{u}{(u^2+4)^2}+\frac{3}{128}\frac{u}{(u^2+4)}+\frac{3}{256}\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{2}+C.$

15.190. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}+C.$

15.191. $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}\right)+C.$

15.192. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3}\right|+C.$

15.193. $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}\right|+C.$

15.194. $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right|+C.$

15.195. $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1+3\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{5}}\right)+C.$

15.196. $\frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)+\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\right]+C.$

15.197. $x-\operatorname{tg}x+\frac{1}{\cos x}+C$　或　$x+\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}+C.$

15.198. $\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+C.$

15.199. $\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+x+C.$

15.200. $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln(\sqrt[4]{x}+1)+C.$

15.201. $\ln\frac{x}{(\sqrt[6]{x}+1)^6}+C.$

15.202. $-\frac{5}{2}\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}+\frac{10}{3}\frac{1}{\sqrt[10]{x^3}}-\frac{5}{\sqrt[5]{x}}+\frac{10}{\sqrt[10]{x}}+$

$+\ln\frac{x}{(1+\sqrt[10]{x})^{10}}+C.$

15.203. $\frac{2}{a}(\sqrt{ax+b}-m\ln|\sqrt{ax+b}+m|)+C.$

15.204. $\ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right|-\frac{\sqrt{2x+1}}{x}+C.$

15.205. $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+1)^4}+\frac{6}{7}\sqrt[6]{(x+1)^7}-$

$-(x+1)+\frac{6}{5}\sqrt[6]{(x+1)^5}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}+C.$

15.206. $2\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{x-2}{2}}+C.$

15.207. $\sqrt{2x+3}-\ln(2+\sqrt{2x+3})^2+C.$

15.208. $\frac{1}{15}\sqrt[3]{(1-3x)^5}-\frac{1}{6}\sqrt[3]{(1-3x)^2}+C.$

15.209. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}-3\sqrt[3]{(x+1)}+3\ln|\sqrt[3]{x+1}+1|+C.$

15.210. $\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\right|+2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C.$

15.211. $2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}+C.$　　15.212. $2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x+1}+C.$

15.213. $x-4\sqrt{1+x}+\ln(\sqrt{1+x}+1)^4+C.$

15.214. $\sqrt{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+C.$

15.215. $-\sqrt{5+x-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{21}}+C.$

15.216. $-\frac{1}{2}\arcsin\frac{8-3x}{5x}+C.$

15.217. $-\frac{1}{x}\sqrt{2x^2-2x+1}-$

$$-\ln\left|\frac{1}{x}-1+\frac{1}{x}\sqrt{2x^2-2x+1}\right|+C.$$

15.218. $-\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}+\frac{1}{x}\sqrt{1+x^2}+C.$

15.219. $-\frac{1}{a}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{|x|}+C.$

15.220. $\frac{1}{2}\ln(\sqrt[3]{1+x^2}-1)-\frac{1}{4}\ln(\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1)+$

$$+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\sqrt[3]{1+x^2}+1}{\sqrt{3}}+C.$$

15.221. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+\frac{24}{11}\sqrt[6]{x^{11}}+\frac{36}{13}\sqrt[6]{x^{13}}+\frac{8}{5}\sqrt{x^5}+\frac{6}{17}x^{\frac{17}{6}}+C.$

15.222. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+\frac{18}{7}\sqrt[6]{x^7}+\frac{9}{5}\sqrt[3]{x^5}+\frac{6}{13}\sqrt[6]{x^{13}}+C.$

15.223. $\frac{3}{5}\sqrt{(1+\sqrt[3]{x^2})^5}-2\sqrt{(1+\sqrt[3]{x^2})^3}+3\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}+C.$

15.224. $\ln(2+\sin 2x)+C.$

15.225. $-\frac{2}{3\pi}(\cos\pi x)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{7\pi}(\cos\pi x)^{\frac{7}{2}}+C.$

15.226. $-\frac{1}{2}\frac{1}{\sin^2\varphi}-2\ln|\sin\varphi|+\frac{1}{2}\sin^2\varphi+C.$

15.227. $4\sqrt[4]{\operatorname{tg}\varphi}+C.$

15.228. $-\frac{8}{3}\operatorname{ctg}^3 2x-8\operatorname{ctg}2x+C.$

15.229. $\sin x-\operatorname{arc\,tg}\sin x+C.$

15.230. $\sqrt{2}\ln\left|\csc\frac{x}{2}-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right|+C.$

15.231. $\frac{1}{2}(\ln \operatorname{tg} x)^2+C$.　15.232. $\csc x-\operatorname{ctg} x+C$.

15.233. $\operatorname{tg} x-\sec x+C$.　15.234. $2(\csc x-\operatorname{ctg} x)-x+C$.

15.235. $2(\sec x+\operatorname{tg} x)-x+C$.　15.236. $-2\sqrt{1-\sin x}+C$.

15.237. $\frac{1}{\ln 2}\arcsin 2^x+C$.　15.238. $\operatorname{arc tg} e^x+C$.

15.239. $x-\ln(1+e^x)+C$.　15.240. $2\ln(1+e^x)-x+C$.

15.241. $x-\ln(1+e^x)+\frac{1}{1+e^x}+C$.

15.242. $\frac{1}{4}e^{2x^2}+C$.

15.243. $2\sqrt{e^x-1}-2\operatorname{arc tg}\sqrt{e^x-1}+C$.

15.244. $\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C$.　15.245. $\frac{x^3}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{(x^2-1)^3}+C$.

15.246. $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-2\sqrt{x}+C$.　15.247. $-\arcsin\frac{1}{x}+C$.

15.248. $-\sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}}+C$.　15.249. $\ln|\operatorname{th} x|+C$.

15.250. $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+\ln\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+C$.

15.251. $\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arc tg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+\ln(2+\cos x)+C$.

15.252. $-\frac{1}{1+\operatorname{tg} x}+C$.

15.253. $\frac{1}{8}\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$.

15.254. $-\frac{x}{(x^2-1)^2}+C$.

15.255. $\frac{2-x}{4(x^2+2)}+\ln\sqrt{x^2+2}-\frac{\sqrt{2}}{8}\operatorname{arc tg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$.

15.256. $x \ln (x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C.$

15.257. $2\sqrt{x+1}\ \ln (x+1)-4\sqrt{x+1}+C.$

15.258. $\frac{x^2}{2} \ln (1+x^3)-\frac{3}{4}x^2-\frac{\ln (1+x)}{2}+\frac{1}{4} \ln (1-x+x^2)+$

$$+\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

15.259. $\frac{x^2}{2}e^{x^2}+C.$

15.260. $-\frac{1}{x} \arcsin x+\ln \left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+C.$

15.261. $2(x-2)\sqrt{1+e^x}-2 \ln \left(\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right)+C.$

15.262. $-\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{2(1+x)^2}-\frac{1}{4(1+x)}-\frac{\ln (1+x^2)}{8}+\frac{1}{4} \ln |1+x|+C.$

15.263. $(x+1) \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x}-\sqrt{x}+C.$

15.264. $-2\sqrt{x^3}\cos \sqrt{x}+6x\sin\sqrt{x}+12\sqrt{x}\cos\sqrt{x}-$

$$-12\sin\sqrt{x}+C.$$

15.265. $\frac{e^x}{1+x}+C.$

15.266. $\left(x-\frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} x\right) \operatorname{arc\,tg} x-\ln \sqrt{1+x^2}+C.$

15.267. $-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} x\right)\operatorname{arc\,tg} x+\ln \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}+C.$

15.268. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x+\ln \sqrt{1-x^2}+C.$

15.269. $\frac{4}{21}(3e^x-4)\sqrt[4]{(1+e^x)^3}+C.$

15.270. $\frac{1}{2}e^{\operatorname{arc\,tg} x}\frac{(1+x)}{\sqrt{1+x^2}}+C.$

15.271. $2\sqrt{x}-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+C$.

15.272. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\left(\ln^2 x-\frac{4}{3}\ln x+\frac{8}{9}\right)+C$.

15.273. $-3\sqrt[3]{x^2}\cos\sqrt[3]{x}+6(\sqrt[3]{x}\sin\sqrt[3]{x}+\cos\sqrt[3]{x})+C$.

15.274. $x\operatorname{arc\,tg}(1+\sqrt{x})-\sqrt{x}+\ln(x+2+2\sqrt{x})+C$.

15.275. $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\frac{a\operatorname{tg}\frac{x}{2}-b+\sqrt{a^2+b^2}}{a\operatorname{tg}\frac{x}{2}-b-\sqrt{a^2+b^2}}\right|+C$.

15.276. $a\arcsin\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+C$.

15.277. $\sqrt{x^2-a^2}-a\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$.

15.278. $2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}+C$.　　15.279. $2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C$.

15.280. $2\operatorname{Arsh}\sqrt{\frac{x+a}{b-a}}+C$.　　15.281. $\frac{\pi}{2}x+C$.

第十六章

16.1. $31\frac{1}{2}$.　　16.2. $\frac{1}{3}(b^3-a^3)+b-a$.

16.3. $\frac{25}{2}g$.　　16.4. $W=\int_R^{R+h} mg\frac{R^2}{r^2}dr$.

16.5. (a) $m\approx\sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$;

(b) $m=\int_{T_0}^{T_1} v(t)dt$.

16.6. (a) $\frac{1}{2}(b^2-a^2)$;　　(b) $e-1$;　　(c) $\ln 2$.

16.7. (a) $\int_0^1 x^2dx$ 较大;　　(b) $\int_1^2 x^3dx$ 较大;

(c) $\int_1^2 \ln x\,dx$ 较大;　　(d) $\int_3^4 (\ln x)^2dx$ 较大.

16.8. (a) $6\leqslant\int_1^4(x^2+1)\,dx\leqslant 51$;

(b) $\pi\leqslant\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(1+\sin^2 x)\,dx\leqslant 2\pi$;

(c) $\frac{\pi}{9}\leqslant\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}x\operatorname{arc\,tg}x\,dx\leqslant\frac{2}{3}\pi$;

(d) $2e^{-\frac{1}{4}}\leqslant\int_0^2 e^{x^2-x}\,dx\leqslant 2e^2$.

16.9. 24.5. 16.10. $\frac{6}{7}$. 16.11. 0, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 1.

16.12. -2. 16.13. $-\sqrt{1+x^2}$. 16.14. $\operatorname{ctg} t$.

16.15. $-\frac{\cos x}{1-\sin x}$. 16.16. 当 $x=0$ 时. 16.17. $\frac{2}{3}t^3$.

16.18. 140 厘米. 16.19. $10.100\dot{3}$; 10; $0.100\dot{3}$; $0.0100\dot{3}$.

16.20. 20. 16.21. $a\left(a^2-\frac{a}{2}+1\right)$.

16.22. $2\frac{5}{8}$. 16.23. $4\frac{5}{6}$. 16.24. $4\frac{2}{3}$.

16.25. $45\frac{1}{6}$. 16.26. $\frac{\pi}{6}$. 16.27. $\frac{\pi}{3}$.

16.28. $\frac{\pi}{12a}$. 16.29. $\frac{\pi}{6}$. 16.30. $\frac{(a-b)^3}{6}$.

16.31. $\frac{\pi}{4}+1$. 16.32. $\frac{abc}{6}$. 16.33. $13\frac{1}{3}$.

16.34. $1-\frac{\pi}{4}$. 16.35. $\frac{1}{2}(1-\ln 2)$.

16.36. $\frac{1}{4}$. 16.37. $\pi-\frac{4}{3}$. 16.38. $\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}$.

16.42. 1. 16.43. π. 16.44. $\frac{1}{4}(e^2+1)$.

16.45. $\frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}}-1)$. 16.46. 1. 16.47. $\frac{1}{4}(\pi-2)$.

16.48. $\frac{1}{2}(1-\ln 2)$. 16.49. $\pi(\pi^2-6)$. 16.50. $\frac{1}{5}(e^{\pi}-2)$.

16.51. $2-\frac{3}{4\ln 2}$. 16.52. $\frac{(9-4\sqrt{3})\pi}{36}+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

16.53. $\frac{7}{72}$. 16.54. $5(1-\sqrt[5]{16})$. 16.55. $\frac{5\pi}{64}-\frac{1}{8}$.

16.56. $\frac{2}{7}$. 16.57. $\frac{T}{\pi}\cos\varphi_0$. 16.58. $\frac{\pi}{2\omega}$.

16.59. $\frac{1}{5}(e-1)^5$. 16.60. $\frac{3}{2}$. 16.61. $\ln\frac{2e}{1+e}$.

16.62. $\operatorname{arc\,tg} e-\frac{\pi}{4}$. 16.63. $\frac{\pi}{2}$. 16.64. $\ln\frac{3}{2}$.

16.65. $2(2-\ln 3)$. 16.66. $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{3}$. 16.67. $\frac{1}{6}$.

16.68. $\frac{\pi}{6}$. 16.69. $\ln\frac{\sqrt{3}}{3}(\sqrt{2}+1)$.

16.70. $\ln\frac{7+2\sqrt{7}}{9}$. 16.71. $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$. 16.72. $\frac{3\pi}{16}$.

16.73. $\frac{a^4\pi}{16}$. 16.74. $a(\sqrt{3}-1)$. 16.75. 2.

16.76. $1-\frac{\pi}{4}$. 16.77. $\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{5}}$.

16.78. $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. 16.79. $\frac{8}{35}$. 16.80. $\frac{5\pi}{16}$.

16.83. $1-\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$. 16.84. 0. 16.87. 0.

16.88. $\frac{3\pi}{2}$. 16.91. 2. 16.92. $e-\sqrt{e}$.

16.93. $-\frac{\sqrt{2}}{3}$. 16.94. 1. 16.95. $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$.

16.96. $\frac{5}{8}a^2\pi$. 16.97. $\frac{\pi^2}{8}-1$. 16.98. $\frac{1}{6}$.

16.99. $\frac{5}{12}(4\sqrt[5]{4}-1)$. 16.100. 12.

16.101. $\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$. 16.102. $\frac{4}{3}$.

16.103. $\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln(2-\sqrt{3})$. 16.104. $\frac{1}{2}\ln\frac{4+\sqrt{17}}{1+\sqrt{2}}$.

16.105. $\frac{1}{a}\ln\frac{3}{2}$. 16.106. $6-2e$. 16.107. $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}$.

16.108. $\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$. 16.109. $\frac{\ln 3}{2an}$. 16.110. $\frac{\pi^2}{72}+\frac{\sqrt{3}}{6}\pi-1$.

16.111. $x\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})-a\ln a-\sqrt{x^2-a^2}$.

16.112. $\frac{1}{2}\ln 2-1+\frac{\pi}{4}$. 16.113. $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)$.

16.114. $\sqrt{\frac{6}{7}}\left(\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{7}{6}}-\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{7}{18}}\right)$.

16.115. $\frac{\pi}{4}$. 16.116. $2\left(1-\frac{1}{e}\right)$.

16.117. 极小值 $y=-\frac{17}{12}$. 拐点$\left(2,-\frac{4}{3}\right)$; $\left(\frac{4}{3},-\frac{112}{81}\right)$.

16.118. 最小值 $I(0)=0$, 最大值 $I(1)=\frac{5\pi}{3\sqrt{3}}$.

16.119. $\frac{\pi^2}{4}$. 16.125. 2.904; 3.304; 3.104; 3.126.

16.126. 3.044; 3.244; 3.144; 3.144.

16.127. (a) 0.836; (b) 1.089. 16.128. 0.9573.

16.129. $\frac{1}{3}$. 16.130. ∞(发散). 16.131. $\frac{1}{a}$.

16.132. 发散. 16.133. π. 16.134. π.

16.135. ∞(发散). 16.136. ∞(发散). 16.137. 1.

16.138. $1-\ln 2$. 16.139. $\frac{1}{2}$. 16.140. $\frac{1}{2}$.

16.141. $\frac{1}{2}$. 16.142. $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$.

16.143. $n!$. 16.144. 1. 16.145. 发散.

16.146. $\frac{\pi}{2}$. 16.147. 发散. 16.148. $2\frac{2}{3}$.

16.149. $\frac{\pi}{3}$.

16.150. 发散. 16.151. 发散.

16.152. $\frac{\pi}{2}$. 16.153. π.

16.154. $\frac{1}{2}(a+b)\pi$.

16.155. 当 $k>0$ 时收敛于 $\frac{k}{k^2+b^2}$; 当 $k\leqslant 0$ 时发散.

16.156. 当 $k>1$ 时收敛于 $\frac{1}{(k-1)(\ln 2)^{k-1}}$; 当 $k\leqslant 1$ 时发散.

16.157. 当 $k<1$ 时收敛于 $\frac{1}{1-k}(b-a)^{1-k}$; 当 $k\geqslant 1$ 时发散.

第十七章

17.1. $10\frac{2}{3}$. 17.2. $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$. 17.3. $b-a$.

17.4. $10\frac{2}{3}$. 17.5. $85\frac{1}{3}$. 17.6. $25\frac{3}{5}$.

17.7. 2. 17.8. $\frac{9}{4}$. 17.9. $\frac{16}{3}p^2$.

17.10. $e+\frac{1}{e}-2$. 17.11. $\frac{16}{3}$. 17.12. $\frac{7}{6}$.

17.13. $2\pi+\frac{4}{3}$, $6\pi-\frac{4}{3}$. 17.14. πa^2.

17.15. $\frac{4}{3}$. 17.16. πa^2. 17.17. $\frac{3}{8}\pi a^2$.

17.18. πa^2. 17.19. $\frac{\pi a^2}{4}$. 17.20. a^2.

17.21. $18\pi a^2$. 17.22. $3\pi a^2$.

17.23. $\frac{a^2}{4}(e^{2\pi}-e^{-2\pi})$. 17.24. $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$.

17.25. $\frac{a^2}{4}\ln(2+\sqrt{3})=\frac{a^2}{4}\ln\left(\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}\right)$. 17.26. $\frac{5}{4}\pi$.

17.27. $\frac{\pi}{6}$. 17.28. $\frac{\pi}{6}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

17.29. $\frac{11}{8}\pi a^2$. 17.30. $\frac{5}{4}\pi-2$, $2-\frac{\pi}{4}$.

17.31. $\left(1+\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a^2$. 17.32. 2.

17.33. $3\pi a^2$. 17.34. $\frac{8}{3}\pi a^2 b$.

17.35. $\frac{4}{3}\pi ab^2$, $\frac{4}{3}\pi a^2 b$. 17.36. $\frac{\pi a^2}{4}\left[2a+\frac{a}{2}(e^2-e^{-2})\right]$.

17.37. $\frac{3}{10}\pi$. 17.38. $160\pi^2$. 17.39. $\frac{\pi r^2 h}{3}$.

17.40. $\frac{\pi h^2}{3}(3r-h)$. 17.41. $5\pi^2 a^3$. 17.42. $\frac{\pi a}{2}$.

17.43. $6\pi^3 a^3$. 17.44. 160π. 17.45. $2\pi^2 a^2 b$.

17.46. $\frac{2\pi}{3}$. 17.47. $\frac{1000}{3}\sqrt{3}$. 17.48. $4\sqrt{3}$.

17.49. $\frac{2}{3}a^3\operatorname{tg}\alpha$. 17.50. $\frac{2}{3}a^2 b\operatorname{tg}\alpha$. 17.51. $\frac{16}{3}a^3$.

17.52. $\frac{4}{3}\pi abc$.　　17.53. πabc^2.　　17.54. 24π.

17.55. $\frac{\sqrt{2}\,p}{2}+\frac{p}{2}\ln(1+\sqrt{2})$.　　17.56. $\frac{1}{4}(e^2+1)$.

17.57. $\ln 3-\frac{1}{2}$.　　17.58. $\frac{a}{2}\pi^2$.

17.59. $\ln(1+\sqrt{2})$.　　17.60. $\sqrt{2}(e^{\frac{\pi}{2}}-1)$.

17.61. $\frac{m}{2}\left(\ln \operatorname{tg}\frac{\varphi}{4}-\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\csc\frac{\varphi}{2}\right)$.　　17.62. $\ln\frac{3}{2}+\frac{5}{12}$.

17.63. $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$.

17.64. $2\pi a$.　　17.65. $6a$.

17.66. $8a$.　　17.67. 4.

17.68. $\left(a\left[\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\right],\frac{3}{2}a\right)$.　17.69. $\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}a,\frac{a}{8}\right)$.

17.70. $km_1m_2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$.　　17.71. $\frac{500}{3}$ 克·厘米.

17.72. 30 克米.

17.73. $\frac{27}{7}k\sqrt[3]{c^2a^7}$, 其中 k 为阻力系数.

17.74. $\frac{10^3}{4}\pi r^4$ 公斤米.　　17.75. 1875π 吨米.

17.76. 12750π 公斤米.　　17.77. $\frac{10^3}{6}\pi r^2h^2$ 公斤米.

17.78. $\frac{4}{3}\pi r^4$.　　17.79. 2560 吨.　　17.80. 5000 吨.

17.81. $\frac{2}{3}a^3$ 吨.　　17.82. $\frac{2}{3}a^2b$.

17.83. $\frac{a^2b}{6}$, 2 倍.　　17.84. 168 克.

17.85. (a) 660000 公斤;　　(b) 11 米.

17.86. $Wab\left(h+\frac{b}{2}\sin\alpha\right)$.

17.88. $\frac{2}{3}(11\sqrt{11}-1)\approx 23.7$ 米.

17.89. $\frac{2kmM}{a}\frac{1}{\sqrt{4a^2+l^2}}$.

17.90. $\frac{2l\sigma}{a\sqrt{a^2+l^2}}$，场强的方向为中垂线方向.

17.91. 场强的方向垂直于板的方向，大小为 $2\pi\sigma\left(1-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$；

场强的方向垂直于板的方向，大小为 $2\pi\sigma$.

第十八章

18.1. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots$.

18.2. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}+\frac{1}{7\cdot 2^7}+\frac{1}{9\cdot 2^9}+\cdots$.

18.3. $\frac{1+1}{1+1^2}+\frac{1+2}{1+2^2}+\frac{1+3}{1+3^2}+\frac{1+4}{1+4^2}+\frac{1+5}{1+5^2}+\cdots$.

18.4. $\frac{1!}{1}+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\frac{4!}{4^4}+\frac{5!}{5^5}+\cdots$.

18.5. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots$.

18.6. $\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}+\cdots$.

18.7. $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}-\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 4}}-\frac{1}{\sqrt{4\cdot 5}}+\frac{1}{\sqrt{5\cdot 6}}-\cdots$.

18.8. $u_n=\frac{1}{2n-1}$.　　18.9. $u_n=\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$.

18.10. $u_n=(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n}$.　　18.11. $u_n=\frac{n-2}{n+1}$.

18.12. $u_n=\frac{n}{n^2+1}$.　　18.13. $u_n=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}$.

18.14. $u_n=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots(2n-1)}{1\cdot4\cdot7\cdot10\cdots(3n-2)}$.

18.15. $u_n=\frac{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)}{1\cdot5\cdot9\cdots(4n-3)}$.　　18.16. $u_n=\frac{x^{\frac{n}{2}}}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}$.

18.17. $u_n=(-1)^{n+1}\frac{a^{n+1}}{2n+1}$.　　18.18. 收敛.

18.19. 发散. 18.20. 发散. 18.21. 发散. 18.22. 发散.
18.23. 发散. 18.24. 发散. 18.25. 发散. 18.26. 收敛.
18.27. 发散. 18.28. 发散. 18.29. 发散. 18.30. 收敛.
18.31. 收敛. 18.32. 发散. 18.33. 发散. 18.34. 收敛.
18.35. 收敛. 18.36. 收敛. 18.37. 收敛. 18.38. 收敛.
18.39. 收敛. 18.40. 发散. 18.41. 发散. 18.42. 收敛.
18.43. 收敛. 18.44. 发散. 18.45. 发散. 18.46. 收敛.

18.47. 收敛.　　18.48. 收敛.　　18.49. $\begin{cases}a>1 & \text{收敛},\\ 0<a\leqslant1 & \text{发散}.\end{cases}$

18.50. 收敛. 18.51. 收敛. 18.52. 发散. 18.53. 收敛.
18.54. 发散. 18.55. 收敛. 18.56. 收敛. 18.57. 收敛.
18.58. 收敛. 18.59. 收敛. 18.60. 发散. 18.61. 发散.
18.62. 收敛. 18.63. 收敛. 18.64. 发散. 18.65. 发散.
18.66. 收敛. 18.67. 发散. 18.68. 收敛. 18.69. 发散.
18.70. 发散. 18.71. 发散. 18.72. 收敛. 18.73. 收敛.
18.74. 条件收敛.　18.75. 绝对收敛.　18.76. 条件收敛.
18.77. 条件收敛.　18.78. 绝对收敛.　18.79. 绝对收敛.
18.80. 绝对收敛.　18.81. 发散.　18.82. 绝对收敛.
18.83. 绝对收敛.　　18.84. 条件收敛.

18.85. $\begin{cases} p\leqslant 0 & \text{发散,} \\ 0<p\leqslant 1 & \text{条件收敛,} \\ p>1 & \text{绝对收敛.} \end{cases}$ 18.86. 收敛.

18.87. 收敛. 18.88. 发散. 18.89. 发散. 18.90. 收敛.

18.91. 收敛. 18.92. 收敛. 18.93. 收敛.

18.94. 当 $p<1$, $q<1$ 时收敛,否则发散.

18.95. $\frac{1}{16}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$. 18.96. $\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$.

18.97. $\frac{1}{2h^{n+1}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$.

18.98. n 为奇数时, 0; $n=2m$ 为偶数时, $\frac{1}{h^{2m+1}}\cdot\frac{2m-1}{2}\cdot$

$$\cdot\frac{2m-3}{2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{(2m-1)(2m-3)\cdots3\cdot1}{2^m h^{2m+1}}\sqrt{\pi}.$$

18.99. $\frac{e}{2}\left[1+\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{e}{2}[1+\sqrt{\pi}]$.

18.100. $e\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=e\sqrt{\pi}$. 18.101. $-\frac{4}{9}$.

18.102. 1. 18.103. $\frac{1}{(\alpha-1)^2}$.

18.104. $(-1, 1)$. 18.105. 在点 $x=0$ 处收敛.

18.106. $(-\infty, +\infty)$. 18.107. $[-1, 1]$.

18.108. $[-3, 3)$. 18.109. $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

18.110. $(-2, 0]$. 18.111. $[4, 6)$.

18.112. $(0, 2]$. 18.113. $(2, 4)$.

18.114. $[-1, 1]$. 18.115. $(-\infty, +\infty)$.

18.116. $(0, 6)$. 18.117. $[-1, 0)$.

18.118. $(-\infty, +\infty)$. 18.119. $\left(\frac{1}{10}, 10\right)$.

18.120. $(-1, 0)$ 及 $(0, 1)$. 18.121. $(0, +\infty)$.

18.122. $(-1, 1)$.

18.123. $\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\text{arc tg } x-x$.

18.124. $\frac{1}{(1-x)^2}$. 18.125. $\frac{1}{(1-x)^3}$.

18.126. $\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=3$.

18.127. $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(1+\sqrt{2})$.

18.128. $\text{arc tg } x$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n=-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

18.129. $\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$, $(-\infty, +\infty)$.

18.130. $\text{ch } x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $(-\infty, +\infty)$.

18.131. $\ln(a+x)=\ln a+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{a}\right)^n$, $(-a, a]$.

18.132. $a^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x\ln a)^n}{n!}$, $(-\infty, +\infty)$.

18.133. $\sin\frac{x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1}$, $(-\infty, +\infty)$.

18.134. $\cos^2 x=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{2\cdot(2n)!}$, $(-\infty, +\infty)$.

18.135. $\sin^2 x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2x)^{2n}}{2(2n)!}$, $(-\infty, +\infty)$.

18.136. $\sqrt[3]{8-x^3}=2\left[1-\frac{x^3}{24}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdots(3n-4)}{3^n n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{3n}\right]$,

$[-2, 2]$.

18.137. $\frac{x}{\sqrt{1-2x}}=x+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}$, $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

18.138. $\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}=x^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2n+2}$, $(-1,1)$.

18.139. $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)$,
$(-\infty,+\infty)$.

18.140. $\ln(1+x-2x^2)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}2^n-1}{n}x^n$, $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$.

18.141. $(1+x)\ln(1+x)=x+\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n-1)n}x^n$, $(-1,1]$.

18.142. $e^x\cdot\sin x=x+x^2+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^5}{30}+\cdots+\dfrac{(-4)^n x^{4n+1}}{(4n+1)!}+$

$$+\frac{2\cdot(-4)^n}{(4n+2)!}x^{4n+2}+\frac{2(-4)^n}{(4n+3)!}x^{4n+3}+0\cdot x^{4n+4}+\cdots,$$
$(-\infty,+\infty)$.

18.143. $\arcsin x=x+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}\dfrac{2}{2n+1}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2n+1}$, $[-1,1]$.

18.144. $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_0+a_1+\cdots+a_n)x^n$.

18.145. $\sqrt{x^3}=1+\dfrac{3}{2}(x-1)+$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{3}{(n+1)(n+2)2^n}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{n+2},\ [0,2].$$

18.146. $\lg x=\dfrac{1}{\ln 10}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(x-1)^n}{n}$, $(0,2]$.

18.147. $\dfrac{1}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n$, $(0,2)$.

18.148. $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(x-3)^n}{3^n}$, $(0,6)$.

18.149. $\cos x=\dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\dfrac{\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)^{2n}}{(2n)!}+\sqrt{3}\dfrac{\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]$,
$(-\infty,+\infty)$.

18.150. $\frac{1}{x^2+3x+2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n$, $(-6, -2)$.

18.151. 1.0986. 18.152. 7.389. 18.153. 0.3679.

18.154. 1.649. 18.155. 0.0971. 18.156. 0.2487.

18.157. 1.005. 18.158. 3.017. 18.159. 1.9744.

18.160. 0.9806. 18.161. 0.0175. 18.162. 0.9848.

18.163. 0.487. 18.164. 0.0057. 18.165. 0.494.

18.166. 2.0000. 18.167. 3.518.

第十九章

19.1. $2x^2=\frac{2}{3}\pi^2+8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$, $[-\pi, \pi]$.

19.2. $x^3=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{n^3}(6-n^2\pi^2)\sin nx$, $(-\pi, \pi)$.

19.3. $2\sin\frac{x}{3}=\frac{18\sqrt{3}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n\sin nx}{9n^2-1}$, $(-\pi, \pi)$.

19.4. $\cos\frac{x}{2}=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}\cos nx$, $[-\pi, \pi]$.

19.5. $e^x+1=\frac{1}{2\pi}(e^\pi-e^{-\pi}+2\pi)+$

$+\frac{e^\pi-e^{-\pi}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}(\cos nx-n\sin nx)$, $(-\pi, \pi)$.

19.6. $e^{ax}=\frac{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}{\pi}\left[\frac{1}{2a}+\right.$

$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+a^2}(a\cos nx-n\sin nx)\right]$, $(-\pi, \pi)$.

19.7. $f(x)=\frac{(a-b)}{4}\pi+\frac{2}{\pi}(b-a)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}+$

$+(a+b)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}$, $(-\pi, \pi)$.

19.8. $$e^{-x}+x=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left\{\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{1+n^2}\cos nx+\right.$$
$$\left.+\left[\frac{n(e^{\pi}-e^{-\pi})}{1+n^2}-\frac{2\pi}{n}\right]\sin nx\right\},\ (-\pi,\pi).$$

19.9. $$f(x)=\frac{\pi^2-\pi+1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(-1)^n\frac{6}{n^2}\cos nx+\frac{1}{n\pi}\left[\pi+1-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{6}{n^2}+(-1)^n\left(\frac{6}{n^2}-3\pi^2-1-\pi\right)\right]\sin nx\right\},\ (-\pi,0),\ (0,\pi).$$

19.10. $$f(x)=\frac{1+\pi-e^{-\pi}}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1-(-1)^ne^{-\pi}}{1+n^2}\cos nx+\right.$$
$$\left.+\left[\frac{-n+(-1)^nne^{-\pi}}{1+n^2}+\frac{1}{n}(1-(-1)^n)\right]\sin nx\right\},\ (-\pi,\pi).$$

19.11. $$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}-(-1)^n\frac{\pi}{2}\right]\sin nx,\ (-\pi,\pi).$$

19.12. $$f(x)=\frac{3}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[1+2\cos\frac{n\pi}{2}-3(-1)^n\right]\sin nx,$$
$$\left(-\pi,\ -\frac{\pi}{2}\right),\ \left(-\frac{\pi}{2},0\right),\ \left(0,\frac{\pi}{2}\right),\ \left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right).$$

19.13. $$2x^2=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{-2}{n^3}+(-1)^n\left(\frac{2}{n^3}-\frac{\pi^2}{n}\right)\right]\sin nx,\ [0,\pi).$$

19.14. $$\frac{\pi-x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx,\ (0,\pi].$$

19.15. $$2x+3=\pi+3-\frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2},\ [0,\pi].$$

19.16. $$e^{2x}=\frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4+n^2}[e^{2\pi}(-1)^n-1]\cos nx,\ [0,\pi].$$

19.17. $$-\sin\frac{x}{2}+1=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n8n}{4n^2-1}-\frac{2}{n}\Big((-1)^n-1\Big)\right]\sin nx,$$
$$(0,\ \pi].$$

19.18. $$f(x)=\frac{h}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nh}{n}\cos nx,\ [0,h),\ (h,\pi].$$

19.19. $f(x)=\frac{8h}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\sin(2n-1)x$, $[0,\pi]$.

19.20. $$f(x)=1+\frac{3}{8}\pi+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n^2}\left[(-1)^n-\cos\frac{n\pi}{2}\right]-\right.$$
$$\left.-\frac{\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2}\right\}\cos nx,\quad \left[0,\frac{\pi}{2}\right),\ \left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right].$$

19.21. $$f(x)=-\frac{5}{2}+\frac{7}{12}\pi^2+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left\{(-1)^n\frac{4\pi}{n}-\frac{2\pi}{n}\cos\frac{n\pi}{2}+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{4}{n^2}-\frac{\pi^2}{2}-5\right)\sin\frac{n\pi}{2}\right\}\cos nx,\left[0,\frac{\pi}{2}\right),\ \left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right].$$

19.22. $$x^2-x=\frac{4}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{16}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}+\right.$$
$$\left.+\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right],\ (-2,2).$$

19.23. $-x^2+1=\frac{11}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}\cos 2n\pi x$, $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

19.24. $f(x)=\frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{l}$, $[0,l]$.

19.25. $$f(x)=-\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{3}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n]\cos\frac{n\pi x}{3}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{n\pi}[1+(-1)^n8]\sin\frac{n\pi x}{3}\right\},\ (-3,0),(0,3).$$

19.26. $$f(x)=-\frac{1}{4}+$$
$$+2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n-1)^2\pi^2}+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi}\right]\cos(2n-1)\pi x+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\left(1-\cos\frac{n\pi}{2}\right)\sin n\pi x,$$
$$[-1,0),\ \left(0,\frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2},1\right].$$

19.27. $f(x)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi x}{l}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}\cos\frac{2n\pi x}{l}$, $[0,l]$.

19.28. $\cos\frac{\pi x}{l}=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos\frac{2n\pi x}{l}}{4n^2-1}$, $\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]$.

第二十章

20.1. $\frac{9}{16}$. 20.2. $(xy)^{x+y}$.

20.3. $(x+y)^{xy}+(xy)^{2x}$. 20.4. $t^2 f(x, y)$.

20.7. $z=\left(\frac{u+v}{u-v}\right)^v$, 其中 $u=x^2+y^2$, $v=xy$.

20.9. $x>0, y>0, z>0$.

20.10. $x<0, y<0$ 和 $x>0, y>0$.

20.11. $x+y>0, x-y>0$. 20.12. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$.

20.13. $y^2>4x-8$. 20.14. $|y|\leqslant|x|, x\neq 0$.

20.15. $x\geqslant 0, y\geqslant 0, x^2\geqslant y$.

20.16. $x^2+y^2<1, y^2\leqslant 4x, x^2+y^2\neq 0$.

20.17. $x\geqslant 0, 2n\pi\leqslant y\leqslant(2n+1)\pi$ 及 $x\leqslant 0$,

$(2n+1)\pi\leqslant y\leqslant(2n+2)\pi$. $(n=0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots.)$

20.18. $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$. 20.19. $x+y\neq n$, n 为整数.

20.20. $x^2+y^2=R^2$.

20.21. $x>0, y>x+1$ 及 $x<0, x<y<x+1$.

20.22. $r^2<x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$. 20.23. 2.

20.24. 0. 20.25. 0.

20.26. 不存在. 20.27. 1.

20.28. (a) $y=0$, 而 x 任意的趋于 0;

(b) $y=\frac{x}{3}$, 而 x 任意的趋于 0.

20.29. $x=y$. 20.30. $y^2=2x$. 20.31. $\frac{2}{5}$.

20.32. $\frac{1}{2}$.　　20.33. 1, $1+2\ln 2$.

20.34. 1, -1.　　20.35. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

20.36. $f'_x\left(0, \frac{\pi}{4}\right)=-1$, $f'_y\left(0, \frac{\pi}{4}\right)=0$.　　20.37. $\frac{3}{2}$.

20.38. $\frac{\partial z}{\partial x}=y^{-2}e^y$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x(y-2)}{y^3}e^y$.

20.39. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2}{y\sin\frac{2x}{y}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-2x}{y^2\sin\frac{2x}{y}}$.

20.40. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{2\sqrt{x(1-xy^2)}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\sqrt{\frac{x}{1-xy^2}}$.

20.41. $\frac{\partial z}{\partial x}=\operatorname{ctg}(x-2y)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-2\operatorname{ctg}(x-2y)$.

20.42. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{x^2}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}+\frac{1}{y}\cos\frac{y}{x}\cos\frac{x}{y}$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}-\frac{1}{x}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}$.

20.43. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{y}{x}}\ln 3$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{y}{x}}\ln 3$.

20.44. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y\sqrt{x^y}}{2x(1+x^y)}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\sqrt{x^y}\ln x}{2(1+x^y)}$.

20.45. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{(x^2+y^2)\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right)^2}$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-x}{(x^2+y^2)\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right)^2}$.

20.46. $\frac{\partial l}{\partial \rho}=e^{\pi\cos\varphi}$, $\frac{\partial l}{\partial \varphi}=-\pi\rho\sin\varphi\, e^{\pi\cos\varphi}$.

20.47. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=ye^{\sin \pi xy}(1+\pi xy\cos \pi xy)$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=xe^{\sin \pi xy}(1+\pi xy\cos \pi xy).$$

20.48. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{x+\ln y}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{y(x+\ln y)}$.

20.49. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\left(\dfrac{-y}{x^2}\right)\sqrt{x}\cos\dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\sin\dfrac{y}{x}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\cos\frac{y}{x}}{\sqrt{x}}.$$

20.50. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x\cos(x^2+y^2+z^2)$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2y\cos(x^2+y^2+z^2),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=2z\cos(x^2+y^2+z^2).$$

20.51. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x$,

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}\cdot x^{\frac{y}{z}}\cdot\ln x.$$

20.52. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=y^z\cdot x^{y^z-1}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=zy^{z-1}x^{y^z}\cdot\ln x$,

$$\frac{\partial u}{\partial z}=y^z x^{y^z}\ln x\cdot\ln y.$$

20.53. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{-z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$,

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{(x-y)^z\ln(x-y)}{1+(x-y)^{2z}}.$$

20.54. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=(3x^2+y^2+z^2)e^{x(x^2+y^2+z^2)}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=2xye^{x(x^2+y^2+z^2)}$,

$\frac{\partial u}{\partial z}=2xz\,e^{x(x^2+y^2+z^2)}$.

20.55. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{e^{xy}(ye^x+ye^y-e^x)}{(e^x+e^y)^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{e^{xy}(xe^x+xe^y-e^y)}{(e^x+e^y)^2}$.

20.56. $\frac{\partial u}{\partial t}=\rho e^{t\varphi}+1$, $\frac{\partial u}{\partial \varphi}=\rho t e^{t\varphi}-e^{-\varphi}$, $\frac{\partial u}{\partial \rho}=e^{t\varphi}$.

20.57. $\frac{\partial \rho}{\partial \varphi}=e^{\theta+\varphi}[\sin(\theta-\varphi)+\cos(\theta-\varphi)]$,

$\frac{\partial \rho}{\partial \theta}=e^{\theta+\varphi}[\cos(\theta-\varphi)-\sin(\theta-\varphi)]$.

20.58. $\frac{\pi}{4}$.　　20.59. $\frac{\pi}{6}$.

20.60. $\operatorname{arc\,tg}\frac{4}{7}$.　　20.65. $du=\frac{2(s\,dt-t\,ds)}{(s-t)^2}$.

20.66. $dz=\frac{y\,dx-x\,dy}{y\sqrt{y^2-x^2}}$.　　20.67. $du=\frac{3\,dx-2\,dy+dz}{3x-2y+z}$.

20.68. $du=e^{x(x^2+y^2+z^2)}[(3x^2+y^2+z^2)dx+2xy\,dy+2xz\,dz]$.

20.69. $du=yzx^{yz-1}dx+zx^{yz}\ln x\,dy+yx^{yz}\ln x\,dz$.

20.70. $\Delta z\approx-0.20404$, $dz=-0.2$.

20.71. $\Delta z=0.0714$, $dz=0.075$.

20.72. $\Delta z=22.75$, $dz=22.4$, 相对误差$=1.5\%$.

20.73. $\frac{1}{36}$.　　20.74. $0.25e$.　　20.75. 2.95.

20.76. 0.005.　　20.77. 108.909.

20.78. -5 厘米.　　20.79. 1.2π 厘米^3.

20.80. 近似值：14.8 米^3，精确值：13.632 米^3.

20.81. -0.167 米.　　20.82. 0.124 厘米.

20.83. -30π 厘米^3.　　20.84. 1.13 米，1.6%.

20.87. $\frac{\partial z}{\partial u}=3u^2\sin v\cos v(\cos v-\sin v)$,

$$\frac{\partial z}{\partial v}=-2u^3\sin v\cos v(\sin v+\cos v)+u^3(\sin^3 v+\cos^3 v).$$

20.88. $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2u}{v^2}\ln(3u-2v)+\frac{3u^2}{(3u-2v)v^2}$,

$$\frac{\partial z}{\partial v}=-\frac{2u^2}{v^3}\ln(3u-2v)-\frac{2u^2}{(3u-2v)v^2}.$$

20.89. $\frac{dz}{dt}=-e^t-e^{-t}$.

20.90. $\frac{dz}{dt}=e^{\sin t-2t^3}(\cos t-6t^2)$.

20.91. $\frac{dz}{dt}=\frac{3-12t^2}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}}$. **20.92.** $\frac{dz}{dx}=\frac{e^x(1+x)}{1+x^2e^{2x}}$.

20.93. $\frac{dz}{dt}=\left(3-\frac{4}{t^3}-\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)\sec^2\left(3t+\frac{2}{t^2}-\sqrt{t}\right)$.

20.94. $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2(u-2v)(u+3v)}{(v+2u)^2}$, $\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{(2v-u)(9u+2v)}{(v+2u)^2}$.

20.95. $\frac{du}{dx}=e^{ax}\sin x$.

20.96. $dz=\frac{1}{x^2y^2}e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}[(x^4-y^4+2x^3y)y\,dx+$

$$+(y^4-x^4+2xy^3)x\,dy].$$

20.97. $\frac{\partial z}{\partial x}=2(2x+y)^{2x+y}[\ln(2x+y)+1]$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=(2x+y)^{2x+y}[\ln(2x+y)+1].$$

20.98. $\frac{\partial z}{\partial x}=x^{x^y}\cdot x^{y-1}(1+y\ln x)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x^{x^y+y}\cdot\ln^2 x$.

20.99. $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial F}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial F}{\partial y}\sin\varphi$,

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi}=-\frac{\partial F}{\partial x}r\sin\varphi+\frac{\partial F}{\partial y}r\cos\varphi.$$

20.102. $\frac{dz}{dx}=u^v\left[\frac{v}{u}\frac{du}{dx}+\ln u\frac{dv}{dx}\right]$.

20.103. $\frac{\partial z}{\partial x}=2x\frac{\partial f}{\partial u}+ye^{xy}\frac{\partial f}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-2y\frac{\partial f}{\partial u}+xe^{xy}\frac{\partial f}{\partial v}$.

20.108. -0.008 厘米/秒. **20.109.** $\frac{25}{3}\pi\times10^3$ 厘米/秒.

20.110. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2a^2\cos 2(ax+by)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2ab\cos 2(ax+by)$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2b^2\cos 2(ax+by)$.

20.111. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{xy^3}{\sqrt{(1-x^2y^2)^3}}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{\sqrt{(1-x^2y^2)^3}}$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^3y}{\sqrt{(1-x^2y^2)^3}}$.

20.112. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\ln y(\ln y-1)}{x^2}y^{\ln x}$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{(\ln x)(\ln y)+1}{xy}\cdot y^{\ln x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\ln x(\ln x-1)}{y^2}y^{\ln x}$.

20.113. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{-2y}{(1+y^2)^2}$.

20.114. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^{2y+xe^y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(1+xe^y)e^{y+xe^y}$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=xe^{y+xe^y}(1+xe^y)$.

20.115. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{-2xy^3z}{(z^2-xy)^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{z(z^4-2xyz^2-x^2y^2)}{(z^2-xy)^3}$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{-2x^3yz}{(z^2-xy)^3}$.

20.116. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

20.118. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2y(2y-1)x^{2y-2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x^{2y-1}(1+2y\ln x)$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4(\ln^2 x)x^{2y}.$$

20.126. $f''_{xx}(0,0,1)=2,\quad f''_{xz}(1,0,2)=2,$

$f''_{yz}(0,-1,0)=0,\quad f'''_{xzz}(2,0,1)=0.$

20.130. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=4x^2\cdot f''(x^2+y^2+z^2)+2f'(x^2+y^2+z^2).$

20.131. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{2x}{y^3}f'_2\left(x,\dfrac{x}{y}\right)+\dfrac{x^2}{y^4}f''_{22}\left(x,\dfrac{x}{y}\right).$

20.132. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=f'_2+zf'_3+xf''_{12}+xzf''_{13}+xyf''_{22}+$

$$+2xyzf''_{23}+xyz^2f''_{33},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}=x^2yf''_{23}+xf'_3+x^2yzf''_{33};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=yf'_3+xyf''_{31}+xy^2f''_{32}+xy^2zf''_{33}.$$

20.140. $2y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=0.$

20.141. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2}{1-xy}.$

20.142. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2-e^x}{\cos y-2xy}.$

20.143. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a^2}{(x+y)^2}.$

20.144. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y}{x-y}.$

20.145. $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{x}.$

20.146. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{yz-\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy},\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{xz-2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy},$

$$\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{xz-2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-yz}.$$

20.147. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{yz}{e^z-xy},\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{xz}{e^z-xy},\quad \dfrac{\partial x}{\partial y}=-\dfrac{x}{y}.$

20.148. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{ayz-x^2}{z^2-axy},\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{axz-y^2}{z^2-axy},\quad \dfrac{\partial x}{\partial y}=\dfrac{axz-y^2}{x^2-ayz}.$

20.149. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{x+z}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z^2}{y(x+z)}$, $\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{z}{y}$.

20.150. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z^2}{2y-3xz}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-z}{2y-3xz}$, $\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{1}{z}$.

20.153. $dz=-\frac{1}{\sin 2z}(\sin 2x\,dx+\sin 2y\,dy)$.

20.154. $dz=-\frac{z}{x}\,dx+\frac{(2xyz-1)z}{(2xz-2xyz+1)y}\,dy$.

20.155. 0.49875.

20.162. $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^4}{a^2y^3}$.　　20.163. $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2a^3xy}{(y^2-ax)^3}$.

20.166. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{4-4z+z^2+x^2}{(2-z)^3}$.

20.167. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2y^2ze^z-2y^3xz-y^2z^2e^z}{(e^z-xy)^3}$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{ze^{2z}-xyz^2e^z-x^2y^2z}{(e^z-xy)^3}$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2x^2ze^z-2x^3yz-x^2z^2e^z}{(e^z-xy)^3}$.

20.168. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{-16xz}{(3z^2-2x)^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{6z^2+4x}{(3z^2-2x)^3}$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{-6z}{(3z^2-2x)^3}$.

20.171. 切线: $\frac{x-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$;

法平面: $x+y+\sqrt{2}z=\frac{\pi}{2}+4$.

20.172. 切线: $\frac{x-\frac{1}{2}}{1}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-1}{8}$;

法平面: $2x-8y+16z-1=0$.

20.173. 切线：$\frac{\sqrt{2}x-a}{-a}=\frac{\sqrt{2}y-a}{a}=\frac{4z-b\pi}{4b}$；

法平面：$2\sqrt{2}a(x-y)-b(4z-b\pi)=0$.

20.174. 切线：$x-x_0=\frac{y_0}{m}(y-y_0)=-2z_0(z-z_0)$；

法平面：$(x-x_0)+\frac{m}{y_0}(y-y_0)-\frac{1}{2z_0}(z-z_0)=0$.

20.175. 切线：$\frac{x-1}{16}=\frac{y-1}{9}=\frac{z-1}{-1}$；

法平面：$16x+9y-z-24=0$.

20.176. $P_1(-1, 1, -1)$ 及 $P_2\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}\right)$.

20.177. $a\ln(1+\sqrt{2})$.　　　20.178. $26+\frac{25}{6}\ln 5$.

20.179. $6+\frac{\sqrt{2}}{2}\ln(2\sqrt{2}+3)$.

20.180. $\frac{a}{4}(2+\ln 3)$.　　　20.181. 5.

20.182. 法线：$\begin{cases}\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2},\\ z=0;\end{cases}$

切平面：$x+2y-4=0$.

20.183. 法线：$\frac{x-3}{9}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-1}$；

切平面：$9x+y-z-27=0$.

20.184. 法线：$\frac{x-2}{-1}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-1}{1}$；

切平面：$x+2y-z+5=0$.

20.185. 法线：$\frac{x-x_0}{ax_0}=\frac{y-y_0}{by_0}=\frac{z-z_0}{cz_0}$；

切平面：$ax_0x+by_0y+cz_0z=1$.

20.186. 法线: $\frac{x-x_0}{2ax_0}=\frac{y-y_0}{2by_0}=\frac{z-z_0}{-1}$;

切平面: $2ax_0x+2by_0y-z-z_0=0$.

20.187. 法线: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-\frac{\pi}{4}}{2}$;

切平面: $x-y+2z-\frac{\pi}{2}=0$.

20.188. $x-y+2z=\pm\sqrt{\frac{11}{2}}$.

20.189. $(-3,-1,3)$, $\frac{x+3}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{1}$.

20.191. $\arccos\frac{3}{\sqrt{22}}$. 20.192. $\arccos\frac{8}{\sqrt{77}}$.

20.195. $f(x,y)=5+2(x-1)^2-(x-1)(y+2)-(y+2)^2$.

20.196. $\Delta f=15h^2-6hk+k^2+h^3$.

20.197. $f(x,y)=y+\frac{1}{2!}(2xy-y^2)+$

$$+\frac{1}{3!}(3x^2y-3xy^2+2y^3)+R_3.$$

20.198. $f(x,y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(y-\frac{\pi}{4}\right)-$

$$-\frac{1}{4}\left[\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2-2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(y-\frac{\pi}{4}\right)+\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2\right]+R_2,$$

其中 $R_2=-\frac{1}{6}\left[\cos\xi\sin\eta\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\right.$

$$+3\sin\xi\cos\eta\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2\left(y-\frac{\pi}{4}\right)+$$

$$+3\cos\xi\sin\eta\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2+$$

$$+\sin\xi\cos\eta\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^3\Big].$$

20.199. $x^y=1+(x-1)+(x-1)(y-1)+$

$$+\frac{1}{2}(x-1)^2(y-1)+R_3,\quad 1.1^{1.02}\approx 1.1021.$$

20.200. $\dfrac{\cos x}{\cos y}\approx 1-\dfrac{1}{2}(x^2-y^2).$

20.201. $z=1+2(x-1)-(y-1)-8(x-1)^2+$

$$+10(x-1)(y-1)-3(y-1)^2+R_2.$$

20.202. $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\dfrac{(x+y)^k}{k}+R_n,$

其中 $R_n=\dfrac{1}{(n+1)!}\left(x\dfrac{\partial}{\partial x}+y\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1}f(\theta x,\theta y),\quad 0<\theta<1.$

20.203. $1+(x+y)+\dfrac{1}{2!}(x^2+y^2+2xy)+\cdots+$

$$+\frac{1}{n!}[x^n+C_n^1x^{n-1}y+\cdots+y^n]+R_n,$$

其中 $R_n=\dfrac{e^{\theta(x+y)}}{(n+1)!}[x^{n+1}+C_{n+1}^1x^ny+\cdots+y^n],\quad 0<\theta<1.$

20.204. $f(x,y,z)=3[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2-$

$-(x-1)(y-1)-(x-1)(z-1)-(y-1)(z-1)]+$

$+(x-1)^3+(y-1)^3+(z-1)^3-3(x-1)(y-1)(z-1).$

20.205. (a) $\sqrt{1-x^2-y^2}=1-\dfrac{1}{2!}(x^2+y^2)+$

$$+\frac{1}{4!}(-3x^4-6x^2y^2-3y^4)+\cdots=1-\frac{x^2+y^2}{2}-$$

$$-\frac{1}{8}(x^4+2x^2y^2+y^4)-\cdots\quad(x^2+y^2<1).$$

(b) $\sqrt{1-x^2-y^2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x+y-1)+$

$$+\frac{1}{2!}\left\{-\frac{3}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{2}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{3}{\sqrt{2}}\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\right\}+\frac{1}{3!}\left\{-\frac{9}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3-\right.$$

$$-\frac{15}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\left(y-\frac{1}{2}\right)-\frac{15}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-$$

$$\left.-\frac{9}{\sqrt{2}}\left(y-\frac{1}{2}\right)^3\right\}+\cdots=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{1-(x+y-1)-\right.$$

$$-\frac{1}{2!}\left[3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+3\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\right]-\frac{1}{3!}\left[9\left(x-\frac{1}{2}\right)^3+\right.$$

$$+15\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\left(y-\frac{1}{2}\right)+15\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+$$

$$\left.\left.+9\left(y-\frac{1}{2}\right)^3\right]+\cdots\right\}\quad\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2<1\right).$$

20.206. 极大：$f(2,-2)=8$. **20.207.** 极小：$f(-1,1)=0$.

20.208. $f\left(\frac{a}{3},\frac{a}{3}\right)=\frac{a^3}{27}$，当 $a>0$ 时为极大值，

当 $a<0$ 时为极小值.

20.209. 极大：$f(a,b)=a^2b^2$.

20.210. 极小：$f\left(\frac{1}{2},-1\right)=-\frac{e}{2}$.

20.211. 极大：$z(1,-1)=6$；极小：$z(1,-1)=-2$.

20.212. 极大：$z\left(\frac{16}{7},0\right)=-\frac{8}{7}$；极小：$z(-2,0)=1$.

20.213. 极大：$z\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$.

20.214. 极小：$z\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2},\frac{a^2b}{a^2+b^2}\right)=\frac{a^2b^3}{a^2+b^2}$.

20.215. 极小: $u(3,3,3)=9$.

20.216. 极大: $u\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)=3$;

极小: $u\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)=-3$.

20.217. 极小: $u\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)=u\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=$

$$=u\left(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=-\frac{1}{3\sqrt{6}};$$

极大: $u\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)=$

$$=u\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=$$

$$=u\left(\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=\frac{1}{3\sqrt{6}}.$$

20.218. $\left(\frac{8}{5},\frac{16}{5}\right)$.

20.219. 当长、宽、高都是 $\frac{d}{\sqrt{3}}$ 时,可得最大体积.

20.220. 当两边都是 $\frac{l}{\sqrt{2}}$ 时,可得最大的周界.

20.221. 当长、宽、高都是 $\frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{6}}$ 时,可得最大的体积 $V=\left(\frac{Q}{6}\right)^{\frac{3}{2}}$.

20.222. 当长、宽都是 $\sqrt[3]{2k}$, 而高为 $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2k}$ 时,表面积最小.

20.223. 当三个正数各等于 $\frac{a}{3}$ 时,乘积为最大.

20.224. 当长、宽都是 $\frac{2a}{\sqrt{3}}$, 而高为 $\frac{a}{\sqrt{3}}$ 时,可得最大的体积.

20.226. $\left(\frac{21}{13},2,\frac{63}{26}\right)$.　　　　20.227. $\frac{7}{4\sqrt{2}}$.

20.228. 矩形的边长为 $\frac{2}{3}P$ 及 $\frac{1}{3}P$.

20.229. 最近点 $\left(9, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right)$, 最远点 $\left(-9, -\frac{1}{8}, -\frac{3}{8}\right)$.

20.230. 当长、宽、高分别是 $\frac{2a}{\sqrt{3}}, \frac{2b}{\sqrt{3}}, \frac{2c}{\sqrt{3}}$ 时,可得最大的体积

$$V=\frac{8}{3\sqrt{3}}abc.$$

20.231. $\left(\sqrt{\frac{a^3}{a+b}}, \sqrt{\frac{b^3}{a+b}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{a^3}{a+b}}, \sqrt{\frac{b^3}{a+b}}\right)$,

$\left(\sqrt{\frac{a^3}{a+b}}, -\sqrt{\frac{b^3}{a+b}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{a^3}{a+b}}, -\sqrt{\frac{b^3}{a+b}}\right)$.

20.233. $$a=\frac{n\sum_{i=1}^{n} x_iy_i-\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}=$$

$$=\frac{\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{i=2}^{n}(x_j-x_i)(y_j-y_i)}{\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{i=2}^{n}(x_j-x_i)^2},$$

$$b=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)-\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}=$$

$$=\frac{\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{i=2}^{n}\begin{vmatrix} x_j & x_i \\ y_j & y_i \end{vmatrix}(x_j-x_i)}{\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{i=2}^{n}(x_j-x_i)^2}.$$

第二十一章

21.2. 是.　21.3. 是.　21.4. 不是.　21.5. 是.

21.6. (a) 是. (b) 不是.　21.7. 是.　21.8. 是.

21.12. $y^2y'^2+y^2=1$.

21.13. $y-y'\sqrt{1-x^2}=0$.

21.14. $y=xy'+y'^2$.

21.15. $y=y'x-\frac{1}{2}y''x^2$.

21.16. $y''+m^2y=0$.

21.17. $xy''+2y'-xy=0$.

21.18. $y'''=0$.

21.19. $y''+4y=0$.

21.20. $x^2yy''+x^2y'^2-2xyy'+y^2=0$.

21.21. $2xy''+y'=0$.

21.22. $2yy'-x(y'^2-1)=0$.

21.23. $y'''=0$.

21.24. $y'''y'=\frac{3}{2}(y'')^2$.

21.25. $y^2-x^2=25$.

21.26. $y=xe^{2x}$.

21.27. $y=-\cos x$.

21.28. $y=\frac{1}{6}(-5e^{-x}+9e^{x}-4e^{2x})$.

21.29. $y=e^{cx}$.

21.30. $y=\frac{x^3}{5}+\frac{x^2}{2}+C$.

21.31. $\arcsin y-\arcsin x=C$.

21.32. $\frac{y}{1-ay}=C(a+x)$.

21.33. $y\sqrt{1+x^2}=C$.

21.34. $\frac{1+y^2}{1-x^2}=C$.

21.35. $\sin y=\ln(1+x)-x+C$.

21.36. $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y=C$.

21.37. $y=C\cos x-3$.

21.38. $10^x+10^{-y}=C$.

21.39. $\ln^2 x+\ln^2 y=C$.

21.40. $(e^x+1)(e^y-1)=C$.

21.41. $\sin x\cdot\sin y=C$.

21.42. $\cos x-\sqrt{2}\cos y=0$.

21.43. $\ln y=\csc x-\operatorname{ctg} x$.

21.44. $y^2-1=2\ln(1+e^x)-2\ln(1+e)$.

21.45. $e^y=\frac{1}{2}(1+e^{2x})$.

21.46. $2(x^3-y^3)+3(x^2-y^2)+5=0$.

21.47. $\sqrt{72500}\approx 269.3$ 厘米/秒.

21.48. 微分方程 $\pi(200h-h^2)\,dh=-0.6\sqrt{2g}\,h^{\frac{1}{2}}\,dt$; $t\approx 18.4$ 分.

21.49. $R=R_0e^{-0.000433t}$; 时间以年为单位.

21.50. $xy=6$.

21.51. $x^2+y^2=C$.

21.52. $y=\mp 2\ln\left(\dfrac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}\right)\pm\sqrt{4-x^2}$.

21.53. $y=x\arcsin\dfrac{x}{C}$.

21.54. $y=2x\operatorname{arc\,tg}(Cx)$.

21.55. $\sqrt{x^2+y^2}=Ce^{-\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}$.

21.56. $2xy-y^2=C$.

21.57. $(2y^2+2xy-x^2)^2=C\left(\dfrac{y+\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}x}{y+\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}x}\right)^{-\frac{1}{\sqrt{3}}}$.

21.58. $x-\sqrt{xy}=C$.

21.59. $y+\sqrt{y^2-x^2}=Cx^2$.

21.60. $yx=Ce^{-\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}$.

21.61. $y=xe^{Cx+1}$.

21.62. $\ln Cx=-e^{-\frac{y}{x}}$.

21.63. $y^2=x^2[C+\ln(x^2)]$.

21.64. $Cx=e^{\sin\frac{y}{x}}$.

21.65. $y=ce^{\frac{x^3}{3y^3}}$.

21.66. $y^3=y^2-x^2$.

21.67. $y^2=2x^2(\ln x+2)$.

21.68. $\dfrac{x+y}{x^2+y^2}=1$.

21.69. $(y-x+1)^2(y+x-1)^5=C$.

21.70. $\ln[(y+3)^2+(x+2)^2]+2\operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{y+3}{x+2}\right)=C$.

21.71. $(x+y-1)(x+3y+3)=C$.

21.72. $2x^2+2xy+y^2-8x-2y=C$.

21.73. $(y-x)^2+10y-2x=C$.

21.74. $x+2y+3\ln(x+y-2)=C$.

21.75. $x^2=y^4+Cy^6$.

21.76. $y^2=x\ln(Cy^2)$.

21.77. $y=(x+C)e^{-x}$.

21.78. $y=(\operatorname{tg}x-1)+Ce^{-\operatorname{tg}x}$.

21.79. $y=(e^x+C)(x+1)^n$.

21.80. $y=\left(\frac{4}{3}x^3+C\right)\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$.

21.81. $y=2x-1+Ce^{-2x}$.

21.82. $y=\left(\frac{x^2}{2}+C\right)e^{-x^2}$.

21.83. $y=\frac{1}{3}x^2+\frac{3}{2}x+2+\frac{C}{x}$.

21.84. $y=\frac{1}{5}e^{3x}+Ce^{-2x}$.

21.85. $y=-\cos x+\frac{\sin x}{x}+\frac{C}{x}$.

21.86. $y=(x+C)e^{-\sin x}$.

21.87. $y=C\cos x-2\cos^2 x$.

21.88. $y=Cx+x\ln\ln x$.

21.89. $y(x^2-1)-\sin x=C$.

21.90. $y=(C+e^x)e^{-\frac{1}{x}}$.

21.91. $y=\frac{-x^2}{4a}+\frac{C}{x^2}$.

21.92. $y=(x+C)(1+x^2)$.

21.93. $y=\frac{x}{\cos x}$.

21.94. $y=\frac{e^x}{x}+\frac{6a-e^a}{x}$.

21.95. $y=\frac{\pi-1-\cos x}{x}$.

21.96. $y=x+\sqrt{1-x^2}$.

21.97. $y=\sin x-1+2e^{-\sin x}$.

21.98. $y^{-5}=Cx^5+\frac{5}{2}x^3$.

21.99. $y^{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{3}(1-x^2)+C(1-x^2)^{\frac{1}{4}}$.

21.100. $7y^{-\frac{1}{3}}=C_1x^{\frac{2}{3}}-3x^3$.

21.101. $\left(1+\frac{3}{y}\right)e^{\frac{3}{2}x^2}=C$.

21.102. $y^3=ax+Cx\sqrt{1-x^2}$.

21.103. $y^2 = Ce^{2x} - \left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right)$.

21.104. $\frac{1}{y} = (\ln x) + 1 + Cx$.

21.105. $xy^{-3} + \frac{3}{4}x^2(2\ln x - 1) = C$.

21.106. $y^2 - 2x = Cy^3$.　　21.107. $x = y^2(1 + Ce^{\frac{1}{y}})$.

21.108. (a) $i = \frac{E}{R} + Ce^{-\frac{R}{L}t}$;

(b) $i = \frac{E_m}{(L^2\omega^2 + R^2)}[R\sin\omega t - L\omega\cos\omega t] + Ce^{-\frac{R}{L}t}$.

21.109. $y = 2(e^x - x - 1)$.　　21.110. $x^3 + 3x^2y^2 + \frac{4}{3}y^3 = C$.

21.111. $a^2x - yx^2 - y^2x - \frac{y^3}{3} = C$.

21.112. $\sin(x + y^2) + 3xy = C$.　21.113. $x^2y^3 - ax^5 = C$.

21.114. $xe^y - y^2 = C$.

21.115. $2(x+y) + \sin 2y + \sin 2x - 4\sin\alpha\sin y\sin x = C$.

21.116. $y\cos x + x\sin y = C$.

21.117. $\frac{x^2 + y^2}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} = C$.

21.118. $x^2 + y^2 - xy = C$.　　21.119. $\frac{x^3}{3} - 2yx + \frac{y^2}{2} = C$.

21.120. $\frac{1}{m+1}x^{m+1} + x^2y^2 + \frac{y^{n+1}}{n+1} + \ln xy = C$.

21.121. $\frac{x^2}{2} + \arcsin\frac{x}{y} + y = C$.

21.122. $x - y = \ln(x+y) + C$.　21.123. $e^x(x^2 + y^2) = C$.

21.124. $a\ln x^2y - y = C$.　　21.125. $x^2e^x + my^2 = Cx^2$.

21.126. $x^2 + \frac{e^x}{y} = C$.　　21.127. $\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} = \frac{x^2}{2} + C$.

21.128. $\frac{x}{y}+\frac{1}{2}x^2=C$.　　21.129. $3(x+y)+\frac{y}{x}=C$.

21.130. $\ln(y+1)-\frac{1}{xy}=C$.　　21.131. $2Cy=C^2x^2-1$.

21.132. $\operatorname{tg} y=C(1-e^x)^3$.

21.133. $\frac{1}{2}\ln(y^2-1)+\operatorname{arc\,tg} x=C$.

21.134. $xy^2=C(x+2y)$.

21.135. $C\sqrt{x^2+y^2}=e^{\frac{y}{x}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}$.

21.136. $y-\operatorname{arc\,tg}(x+y)=C$.

21.137. $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)=C$.

21.138. $\frac{1}{y}=1+\ln x+Cx$.

21.139. $\frac{2}{\sin y}+\cos x+\sin x=Ce^{-x}$.

21.140. $(x+C)\cos y=\ln x$.

21.141. $\sqrt{y}=x^2\left(\frac{1}{2}\ln x+C\right)$.

21.142. $y=x^2+Cx^2e^{\frac{1}{x}}$.　　21.143. $x^4-x^2y^2+y^4=C$.

21.144. $y=Cx-\ln x-1$.　　21.145. $\frac{x^2}{2}+\frac{x}{y}=C$.

21.146. $e^x(x-1)\sin y+e^xy\cos y=C$.

21.147. $x^3-6x^2y-6xy^2+y^3=C$.

21.148. $x=(\operatorname{arc\,tg} y-1)+Ce^{-\operatorname{arc\,tg} y}$.

21.149. $y=\frac{1+x}{1-x}$.

21.150. $y=\frac{1}{\cos x}\left(\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}-1-\frac{\pi}{2}\right)$.

21.151. $x=y^n$.　　21.152. $y=\frac{1}{2k}\left(Ce^{kx}+\frac{1}{C}e^{-kx}\right)$.

21.153. $x^2+2Cy-C^2=0$.

21.154. $C\pm x=\sqrt{a^2-y^2}-a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}$.　曳物线.

21.155. $(x-C)^2+y^2=a^2$. 中心在 x 轴上的圆周.

21.156. $r^n=C\sin n\theta$.　　21.157. $v\approx0.466$ 千米/小时.

21.158. $T=a+(T_0-a)e^{-kt}$.　21.159. 1 小时.

21.160. $P=e^{-0.000167h}$.

21.161. $v=\mu\,\mathrm{tg}\,(r-\lambda t)\left(其中\ k^2=\frac{c^2}{m},\ \mu^2=\frac{g}{k^2},\ r=\mathrm{arc\,tg}\,\frac{v_0}{\mu},\ \lambda=\mu k^2\right)$.

21.162. $v=-\frac{g}{k}(1-e^{-kt})+v_0e^{-kt}\quad\left(其中\ k=\frac{K}{m}\right)$.

21.163. $v=\frac{a}{b}(1-e^{-\frac{b}{m}t})$.

21.164. $y=\frac{\omega^2}{2g}x^2+C$（抛物线族），$y$ 轴的方向与对称轴的方向一致.

21.165. $y=\frac{x^3}{6}-\sin x+C_1x+C_2$.

21.166. $y=\frac{1}{2}(x^2-1)\,\mathrm{arc\,tg}\,x-\frac{1}{2}x\ln(1+x^2)+C_1x+C_2$.

21.167. $y=xe^x-3e^x+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3$.

21.168. $y=\frac{x^2}{2}\ln x+C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4$.

21.169. $y=x\,\mathrm{arc\,tg}\,x-\ln\sqrt{1+x^2}+C_1x+C_2$.

21.170. $y=x\,\mathrm{arc\,sh}\,x-\sqrt{1+x^2}+C_1x+C_2$.

21.171. $\pm\left[\sqrt{(1+C_1y)y}-\frac{1}{\sqrt{C_1}}\ln\left(\sqrt{C_1y}+\sqrt{1+C_1y}\right)\right]=$

$=a\sqrt{2}C_1x+C_2.$

21.172. $x+C_2=\pm\frac{a^{\frac{1}{4}}}{4}\left[\frac{1}{3}(4\sqrt{y}+C_1)^{\frac{3}{2}}-C_1\sqrt{4\sqrt{y}+C_1}\right].$

21.173. $y=C_1e^x-\frac{x^2}{2}-x+C_2.$ 21.174. $y=C_1e^x+C_2x+C_3.$

21.175. $y=-\sqrt{1-(x+C_1)^2}+C_2.$

21.176. $y=-\ln\cos(x+C_1)+C_2.$

21.177. $y=C_1\ln x+C_2.$ 21.178. $y=1-\frac{1}{C_1x+C_2}.$

21.179. $y=\sin(x+C_2)-C_1.$

21.180. $y=\cos(x+C_1)+C_2x+C_3.$

21.181. $y+C_1\ln(y-C_1)=x+C_2.$

21.182. $y=C_1\operatorname{sh}\left(\frac{x}{C_1}+C_2\right).$ 21.183. $y=C_1e^{\frac{x}{C_1}+C_2}-C_1.$

21.184. $y=\sqrt{2x-x^2}$ $(0<x<2).$

21.185. $y=-\frac{1}{a}\ln(ax+1).$

21.186. $y=\frac{e^{ax}}{a^3}-\frac{e^a}{2a}x^2+\frac{1}{a^2}(a-1)e^ax+\frac{e^a}{2a^3}(2a-a^2-2).$

21.187. $y=\left(\frac{1}{2}x+1\right)^4.$ 21.188. $y=x.$

21.189. $S=\frac{1}{2}(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)gt^2+v_0t.$

21.190. $y=\frac{x^3}{6}+\frac{x}{2}+1.$

21.191. $S=\frac{\mu}{\lambda}\ln\operatorname{ch}\lambda t$ (其中 $K^2=\frac{c^2}{m}$, $\mu^2=\frac{g}{K_2}$,

$\lambda=\mu K^2=\frac{g}{\mu}\Big)$.

21.192. $(x\pm C_2)^2+(y\pm C_1)^2=K^2$.

21.194. $x=a\cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t$.　　21.195. 是.

21.196. 是.　21.197. 是.　21.198. 是.　21.199. 是.

21.200. 不是.　21.201. 不是.　21.202. 不是.

21.203. 是.　21.204. 是.

21.205. $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$.　21.206. $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{3x}$.

21.207. $y=C_1+C_2e^{4x}$.

21.208. $y=C_1e^{(1+\sqrt{2})x}+C_2e^{(1-\sqrt{2})x}$.

21.209. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-\frac{4}{3}x}$.　21.210. $y=C_1\cos x+C_2\sin x$.

21.211. $y=e^{-3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$.

21.212. $y=e^x\left(C_1\cos\frac{x}{2}+C_2\sin\frac{x}{2}\right)$.

21.213. $y=C_1e^x+C_2xe^x$.　21.214. $x=C_1e^{\frac{5}{2}t}+C_2te^{\frac{5}{2}t}$.

21.215. $y=C_1e^{-\frac{x}{4}}+C_2xe^{-\frac{x}{4}}$.

21.216. $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x$.

21.217. $y=(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x$.

21.218. $y=C_1+C_2x+C_3e^x+C_4xe^x$.

21.219. $y=C_1e^{(1+a)x}+C_2e^{(1-a)x}$, $a>0$.

21.220. $y=e^{5x}(A\cos 3x+B\sin 3x)$.

21.221. $y=e^{2x}(A\cos x+B\sin x)$.

21.222. $y=e^{3x}(A\cos\sqrt{2}\,x+B\sin\sqrt{2}\,x)$.

21.223. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}+C_3e^{5x}$.

21.224. $y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}+C_3e^{2x}$.

21.225. $y=C_1e^{-kx}+e^{\frac{k}{2}x}\left(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}kx+B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}kx\right)$, $k>0$.

21.226. $y=C_1e^x+e^{-\frac{1}{2}x}\left(A\cos\frac{\sqrt{15}}{2}x+B\sin\frac{\sqrt{15}}{2}x\right)$.

21.227. $y=C_1e^x+C_2e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_3e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$.

21.228. $y=C_1e^{\sqrt{5+2\sqrt{6}}x}+C_2e^{-\sqrt{5+2\sqrt{6}}x}+$
$+C_3e^{\sqrt{5-2\sqrt{6}}x}+C_4e^{-\sqrt{5-2\sqrt{6}}x}$.

21.229. $y=(C_1+C_2x)e^x+(C_3+C_4x)e^{-2x}$.

21.230. $y=(C_1+C_2x)e^x+A\cos x+B\sin x$.

21.231. $y=4e^x+2e^{3x}$.

21.232. $y=2e^{-\frac{x}{2}}+xe^{-\frac{x}{2}}$.

21.233. $y=-e^{4x}+e^{-x}$.

21.234. $y=3e^{-2x}\sin 5x$.

21.235. $y=\cos 3x-\frac{1}{3}\sin 3x$.

21.236. $y=C_1e^{\frac{x}{2}}+C_2e^{-x}+e^x$.

21.237. $y=C_1\cos ax+C_2\sin ax+\frac{e^x}{1+a^2}$.

21.238. $y=C_1e^x+C_2e^{6x}+\frac{5}{74}\sin x+\frac{7}{74}\cos x$.

21.239. $y=C_1+C_2e^{-\frac{5}{2}x}+\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{5}x^2+\frac{7}{25}x$.

21.240. $y=e^{\frac{3}{5}x}\left(C_1\cos\frac{4}{5}x+C_2\sin\frac{4}{5}x\right)-\frac{5}{9}e^{\frac{3}{5}x}\cos x$.

21.241. (a) $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+\frac{3}{10}\sin x-\frac{9}{10}\cos x$;

(b) $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+\frac{3}{2}x^2e^{-x}-3xe^{-x}$;

(c) $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+\frac{e^{-x}}{2}(\sin x-\cos x)$.

21.242. (a) $y=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}+\frac{2}{9}x^2+\frac{5}{27}x+\frac{11}{27}$;

(b) $y=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}+\frac{x^2}{2}e^{3x}\left(\frac{1}{3}x+1\right)$;

(c) $y=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}+\frac{x^2}{2}e^{3x}$.

21.243. (a) $y=e^x(C_1\sin 2x+C_2\cos 2x)+\frac{e^x}{4}$;

(b) $y=e^x(C_1\sin 2x+C_2\cos 2x)+\frac{\cos 2x}{17}-\frac{4}{17}\sin 2x$;

(c) $y=e^x(C_1\sin 2x+C_2\cos 2x)-\frac{x}{4}e^x\cos 2x$.

21.244. (a) $y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}+\frac{e^{-2x}}{16}+\frac{3}{4}$;

(b) $y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}+\frac{x^3}{12}e^{2x}+\frac{1}{32}\left(x+\frac{1}{2}\right)e^{-2x}$;

(c) $y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}+(2x^2+4x+3)+\frac{x^2}{2}e^{2x}+\frac{\cos 2x}{8}$.

21.245. $y=-\frac{671}{216}+\frac{97}{36}x-\frac{11}{12}x^2+\frac{x^3}{6}+C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+C_3e^{-3x}$.

21.246. $y=-69+54x-18x^2+4x^3+C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}+C_3e^{2x}$.

21.247. $y=C_1+C_2x+C_3e^x+C_4xe^x+x^2+\frac{1}{6}x^3$.

21.248. $y=e^x\left(C_1+\frac{x}{10}\right)+C_2e^{-x}+A\cos 2x+B\sin 2x$.

21.249. $y=x^2-2+\frac{x}{2}\sin x+C_1\cos x+C_2\sin x$.

21.250. $y=e^{4x}\left(\frac{x^2}{2}+C_2x+C_1\right)+\frac{x}{16}+\frac{1}{32}$.

21.251. $y=xe^{-2x}+2x^2e^{2x}+C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}+C_3xe^{2x}$.

21.252. $y=-\frac{7}{5}+2x+e^x+xe^{-5x}+C_1e^{-2x}+C_2e^{-5x}$.

21.253. $y=\frac{1}{3}\sin 2x-\cos x-\frac{1}{3}\sin x$.

21.254. $y=4-3e^{-x}+e^{-2x}$.

21.255. $y=C_1\frac{\ln x}{x}+\frac{C_2}{x}$.　　21.256. $y=C_1x+\frac{C_2}{x}$.

21.257. $y=x(C_1+C_2\ln x)$.　　21.258. $y=C_1x^3+C_2x^7$.

21.259. $y=C_1\sin(\ln x)+C_2\cos(\ln x)+\frac{x}{2}$.

21.260. $y=C_1x+C_2x\ln x+x\ln^2 x$.

21.261. $y=C_1x+C_2x^2+x^3+x\ln x$.

21.262. $W=A_1r^2+A_2r^2\ln r+A_3\ln r+A_4+\frac{qr^4}{64D}$.

21.263. $y=A_1e^{\left(\frac{-\frac{\beta}{m}+\sqrt{\frac{\beta^2}{m^2}-\frac{4\alpha}{m}}}{2}\right)t}+B_1e^{\left(\frac{-\frac{\beta}{m}-\sqrt{\frac{\beta^2}{m^2}-\frac{4\alpha}{m}}}{2}\right)t}$

（当 $\beta^2-4m\alpha>0$）;

$y=e^{-\frac{\beta}{2m}t}(A_1+A_2t)$　（当 $\beta^2-4m\alpha=0$）;

$y=e^{-\frac{\beta}{2m}t}\left(A_1\cos\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\alpha}{m}-\frac{\beta^2}{m^2}}\,t+\right.$

$\left.+A_2\sin\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\alpha}{m}-\frac{\beta^2}{m^2}}\,t\right)$（当 $\beta^2-4m\alpha<0$）.

21.264. $y=C_1e^{\sqrt{\frac{Q}{EI}}x}+C_2e^{-\sqrt{\frac{Q}{EI}}x}+\frac{\omega x^2}{2Q}+\frac{\omega EI}{Q^2}$.

21.265. $v=-(S_0-l)K\sin Kt$,　$S=l+(S_0-l)\cos Kt$

$\left(\text{其中 } K=\sqrt{\frac{g}{l}}\right)$.

21.266. $\theta=A\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t+B\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t$. 周期$=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

21.267. 运动方程: $\frac{2}{g}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)=2-K(x+2)$　$(K=1)$;

$T=2\pi\sqrt{\frac{2}{g}}$ 秒.

21.268. $x=\frac{2g\sin 30t-60\sqrt{g}\sin\sqrt{g}t}{g-900}$ 厘米.

运动的微分方程是 $\frac{4}{g}\frac{d^2x}{dt^2}=K(x-y)$,

其中 $K=4$, $g=980$ 厘米/秒^2.

21.269. $6\frac{d^2s}{dt^2}=gs$; $t=\sqrt{\frac{6}{g}}\ln(6+\sqrt{35})$.

21.270. $\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{g}{18}[(10+s)-(8-s)]$; $t=\frac{3}{\sqrt{g}}\ln(9+\sqrt{80})$.

21.271. 运动的微分方程是 $m\ddot{x}=mg-k\dot{x}$;

$x=\frac{mg}{k}t-\frac{m^2g}{k^2}(1-e^{-\frac{k}{m}t})$.

21.272. $y=(a_0+1)\left\{1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right\}-x-1$

或 $y=Ce^x-x-1$ (其中 $C=a_0+1$).

21.273. $y=a_0\left\{1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\right\}+\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots$

或 $y=Ce^{-x}+\operatorname{sh}x$ (其中 $C=a_0$).

21.274. $$y=C\left[1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 2!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{2^n\cdot n!}+\cdots\right]+$$
$$+\left[-1+x+\frac{x^3}{1\cdot 3}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}+\cdots\right].$$

21.275. $y=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\frac{9}{32}x^4+\frac{21}{320}x^5+\cdots$.

21.276. $y=x+\frac{1}{1\cdot 2}x^2+\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\frac{1}{3\cdot 4}x^4+\cdots$, 当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时此级数收敛.

21.277. $y=a_0\left(1-\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{4!}x^4-\frac{3}{6!}x^6-\frac{15}{8!}x^8-\cdots\right)+a_1x$.

21.278. $y=a_0\left[1+\frac{1}{1\cdot 3}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 7}\left(\frac{x^2}{2}\right)^4+\right.$

$$+\frac{1}{1\cdot2\cdot3^2\cdot7\cdot11}\left(\frac{x^2}{2}\right)^6+\cdots\Big]+a_1x\Big[1+\frac{1}{1\cdot5}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2+$$

$$+\frac{1}{1\cdot2\cdot5\cdot9}\left(\frac{x^2}{2}\right)^4+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot5\cdot9\cdot13}\left(\frac{x^2}{2}\right)^6+\cdots\Big].$$

21.279. $x=a\left(1-\frac{1}{2!}t^2+\frac{2}{4!}t^4-\frac{9}{6!}t^6+\frac{55}{8!}t^8-\cdots\right).$

21.280. $$y=a_0\Big[1+\frac{a}{c}\frac{x}{1!}+\frac{a}{c}\frac{(a+1)}{(c+1)}\frac{x^2}{2!}+$$

$$+\frac{a(a+1)(a+2)}{c(c+1)(c+2)}\frac{x^3}{3!}+\cdots+$$

$$+\frac{a}{c}\frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)}{(c+1)(c+2)\cdots(c+n-1)}\frac{x^n}{n!}+\cdots\Big]$$

是方程的一个特解.

21.281. $y=1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\cdot4^2}-\frac{x^6}{2^2\cdot4^2\cdot6^2}+\cdots.$

第二十二章

22.1. $\iint\limits_D \sigma(x,y)\,d\sigma.$ **22.2.** $\frac{1}{2}\omega^2\iint\limits_D y^2\mu(x,y)\,d\sigma.$

22.3. $Q=(t_2-t_1)\iint\limits_D C(x,y)\mu(x,y)\,d\sigma.$

22.4. $8\pi(5-\sqrt{2})<I<8\pi(5+\sqrt{2}).$

22.5. $36\pi<I<100\pi.$ **22.6.** $2<I<8.$

22.7. $-8<I<\frac{2}{3}.$ **22.8.** $0.$ **22.9.** $I_1=4I_2.$

22.10. $0.$ **22.11.** $\frac{1}{e}.$ **22.12.** $\ln\frac{4}{3}.$

22.13. $(e-1)^2.$ **22.14.** $-\frac{\pi}{16}.$ **22.15.** $2.$

22.16. $\ln \dfrac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$.

22.17. $\int_0^1 dx \int_{x-1}^{1-x} f(x, y)\, dy$,

$\int_{-1}^0 dy \int_0^{1+y} f(x, y)\, dx + \int_0^1 dy \int_0^{1-y} f(x, y)\, dx$.

22.18. $\int_1^3 dx \int_x^{3x} f(x, y)\, dy$,

$\int_1^3 dy \int_1^y f(x, y)\, dx + \int_3^9 dy \int_{\frac{y}{3}}^3 f(x, y)\, dx$.

22.19. $\int_3^5 dx \int_{\frac{3x+1}{2}}^{\frac{3x+4}{2}} f(x, y)\, dy$,

$\int_5^{6\frac{1}{2}} dy \int_3^{\frac{2y-1}{3}} f(x, y)\, dx + \int_{6\frac{1}{2}}^8 dy \int_{\frac{2y-4}{3}}^{\frac{2y-1}{3}} f(x, y)\, dx +$

$+ \int_8^{9\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{2y-4}{3}}^5 f(x, y)\, dx$.

22.20. $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2}^{4-x^2} f(x, y)\, dy$,

$\int_0^2 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y)\, dx + \int_2^4 dy \int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} f(x, y)\, dx$.

22.21. $\int_0^1 dx \int_{\frac{x}{2}}^{2x} f(x, y)\, dy + \int_1^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{2}{x}} f(x, y)\, dy$,

$\int_0^1 dy \int_{\frac{y}{2}}^{2y} f(x, y)\, dx + \int_1^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{2}{y}} f(x, y)\, dx$.

22.22. $\int_{-2}^2 dx \int_{-3\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}^{3\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} f(x, y)\, dy$, $\quad \int_{-3}^3 dy \int_{-2\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}}^{2\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}} f(x, y)\, dx$.

22.23. $\int_0^4 dx \int_{3-\sqrt{4x-x^2}}^{3+\sqrt{4x-x^2}} f(x, y)\, dy$, $\quad \int_1^5 dy \int_{2-\sqrt{4-(y-3)^2}}^{2+\sqrt{4-(y-3)^2}} f(x, y)\, dx$.

22.24. $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} f(x, y)\, dy$. 22.25. $\int_0^1 dy \int_{e^y}^{e} f(x, y)\, dx$.

22.26. $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\, dx$.

22.27. $\int_0^a dy \int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{y} f(x, y)\, dx$.

22.28. $\int_0^1 dy \int_y^{2-y} f(x, y)\, dx$. 22.29. $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x, y)\, dx$.

22.30. $\int_{-1}^0 dy \int_{-2\sqrt{1+y}}^{2\sqrt{1+y}} f(x, y)\, dx + \int_0^8 dy \int_{-2\sqrt{1+y}}^{2-y} f(x, y)\, dx$.

22.31. $\int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\, dx + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x, y)\, dx$.

22.32. $\int_0^a dy \left[\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\, dx + \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x, y)\, dx\right] +$

$+ \int_a^{2a} dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x, y)\, dx$.

22.33. $\frac{76}{3}$. 22.34. -2. 22.35. 9.

22.36. $2\frac{1}{4}$. 22.37. $\frac{33}{140}$. 22.38. $14a^4$.

22.39. $\frac{9}{8}\ln 3 - \ln 2 - \frac{1}{2}$.

22.40. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2R\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\, dr$.

22.41. $\frac{\pi}{2}\int_0^R f(r^2) r\, dr$.

22.42. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\sin 2\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\, dr$.

22.43. $\frac{R^2}{2}\int_0^{\operatorname{arc\,tg} R} f(\operatorname{tg}\theta)\, d\theta$. 22.44. $\frac{a^3}{3}$.

22.45. $\pi\left(1-\frac{1}{e}\right)$.

22.46. $\frac{\pi}{4}(\ln 4-1)$.

22.47. $\pi h R^2$.

22.48. $\frac{1}{3}R^3\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$.

22.49. $\frac{\pi}{8}(\pi-2)$.

22.50. $\frac{3}{64}\pi^2$.

22.51. $-6\pi^2$.

22.52. 2.

22.53. $\frac{ab}{6}$.

22.54. $\frac{2}{3}(p+q)\sqrt{pq}$.

22.55. $\frac{a^2}{2}\ln 2$.

22.56. $\frac{b^2-a^2}{2}\,\frac{m-k}{(m+1)(k+1)}$.

22.57. $2a^2$.

22.58. $\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)a^2$.

22.59. $\frac{5}{8}\pi a^2$.

22.60. $\frac{\pi}{4}$.

22.61. $186\frac{2}{3}$.

22.62. $\frac{1}{6}$.

22.63. $13\frac{1}{3}$.

22.64. $\frac{81}{10}$.

22.65. $\frac{16}{3}R^3$.

22.66. $\frac{4}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$.

22.67. $-\frac{9}{8}$.

22.68. $\frac{7}{2}\ln 2-\frac{3}{2}\ln 5$.

22.69. $\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right)$.

22.70. $\frac{1}{16}\pi^2-\frac{1}{2}$.

22.71. $\frac{1}{180}$.

22.72. $\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}dy\int_{0}^{x^2+y^2}f(x,y,z)\,dz$.

22.73. $\int_{0}^{a}dx\int_{0}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}dy\int_{0}^{\frac{xy}{c}}f(x,y,z)\,dz$.

22.74. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}dx\int_{-\sqrt{1-4x^2}}^{\sqrt{1-4x^2}}dy\int_{3x^2+y^2}^{1-x^2}f(x,y,z)\,dz$.

22.75. $\frac{16}{3}\pi$. 22.76. $\frac{1}{8}$. 22.77. $\frac{1}{48}$.

22.78. $\frac{8}{9}a^2$. 22.79. $\frac{4\pi}{15}(A^5-a^5)$.

22.80. $\pi\left(\ln 2-2+\frac{\pi}{2}\right)$. 22.81. 0.

22.82. $\frac{abc}{6}$. 22.83. 12. 22.84. $\frac{1}{6}\pi-\frac{\sqrt{3}}{8}$.

22.85. $\frac{a^3}{12}$. 22.86. $\frac{4}{3}\pi$. 22.87. $\frac{3}{2}\pi a^3$.

22.88. $\frac{5}{6}\pi a^3$. 22.89. $\frac{1}{3}\pi a^3$. 22.90. $\sqrt{2}\pi$.

22.91. $\frac{\pi}{2}a^2$. 22.92. $\frac{16}{3}\pi a^2$. 22.93. $8r^2$.

22.94. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$. 22.95. $2r^2(\pi-2)$.

22.96. $16\sqrt{2}\pi$. 22.97. $\frac{(820-81\ln 2)}{72}\pi$.

22.98. 24π. 22.99. $2\pi a^2\left(1-\frac{1}{e}\right)$.

22.100. $M=\frac{1}{3}$. 22.101. $\bar{x}=\frac{a}{3}$, $\bar{y}=\frac{a}{3}$.

22.102. $\bar{x}=\frac{3}{5}x_0$, $\bar{y}=\frac{3}{8}y_0$. 22.103. $\bar{x}=\frac{4}{3\pi}a$, $\bar{y}=\frac{4}{3\pi}a$.

22.104. $\bar{x}=0$, $\bar{y}=\frac{4b}{3\pi}$. 22.105. $\bar{x}=\frac{b^2+ab+a^2}{2(a+b)}$, $\bar{y}=0$.

22.106. $\bar{x}=0$, $\bar{y}=\frac{28}{9\pi}$. 22.107. $I_x=\frac{ab^3}{3}$, $I_y=\frac{ba^3}{3}$.

22.108. $I_y=\frac{\pi a^3b}{4}$. 22.109. $I_x=\frac{72}{5}$, $I_y=\frac{96}{7}$.

22.110. $I_x=\frac{1}{44}$, $I_y=\frac{1}{36}$. 22.111. $I_0=\frac{178}{105}a^4$.

22.112. $I_0=\frac{\pi}{4}ab(a^2+b^2)$.

22.113. $I_0=\frac{\pi}{4}R^4$.

22.114. $I=\frac{8}{5}a^4$.

22.115. $I_x=\frac{ab^3}{12}$.

22.116. $I_y=\frac{4\sqrt{2}}{7}p^4$.

22.117. $I_0=\frac{3}{2}\pi a^4$.

22.118. $I_0=\frac{3}{64}\pi a^4$.

22.119. $M=\frac{48}{5}\sqrt{6}$.

22.120. $M=\frac{8}{15}\pi$.

22.121. $M=\frac{4}{15}$.

22.122. $\bar{x}=0,\ \bar{y}=0,\ \bar{z}=\frac{1}{4}$.

22.123. $\bar{x}=0,\ \bar{y}=0,\ \bar{z}=\frac{1}{3}$.

22.124. $\bar{x}=0,\ \bar{y}=0,\ \bar{z}=\frac{3}{8}a$.

22.125. $\bar{x}=0,\ \bar{y}=0,\ \bar{z}=\frac{2}{3}$.

22.126. $I_{xy}=\frac{2}{15}\pi a^5$.

22.127. $I_z=\frac{1}{2}\pi hR^4=\frac{R^2}{2}M$.

22.128. $I_z=\frac{\pi R^2h}{4}\left(\frac{h^2}{3}+R^2\right)=\frac{M}{4}\left(\frac{h^2}{3}+R^2\right)$.

22.129. $\frac{4}{3}a^2$.

22.130. $2\pi r(R-r)$.

22.131. $2\pi\gamma(R^2-r^2)$.

22.132. $\frac{\pi R^2H}{6}(3R^2+2H^2)$.

22.133. $\frac{\pi\gamma h^{n+3}\operatorname{tg}^2\alpha}{n+3}$.

22.134. $\bar{x}=0,\ \bar{y}=0,\ \bar{z}=\frac{5}{4}R$.

第二十三章

23.1. $2\pi a^{2n+1}$.

23.2. $2\pi^2a^3(1+2\pi^2)$.

23.3. $\frac{256}{15}a^3$.

23.4. $a^{\frac{7}{3}}$.

23.5. $1+\sqrt{2}$.

23.6. $2a^2$.

23.7. $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{17}}{8}-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+1)+\frac{1}{2}\ln(\sqrt{17}+4)$.

23.8. $\frac{\pi a}{4}e^a+2(e^a-1)$. 23:9. $\frac{1}{3p}[(p^2+y_0^2)^{\frac{3}{2}}-p^3]$.

23.10. $\frac{1}{3}[(2+t_0^2)^{\frac{3}{2}}-2^{\frac{3}{2}}]$. 23.11. $\frac{8a\pi^3\sqrt{2}}{3}$.

23.12. $-\frac{56}{15}$. 23.13. 3. 23.14. -8.

23.15. 32. 23.16. $\frac{4}{5}$. 23.17. $-\frac{14}{15}$.

23.18. (a) $\frac{1}{3}$; (b) $\frac{1}{12}$; (c) $\frac{17}{30}$; (d) $-\frac{1}{20}$.

23.19. (a) 0; (b) $\frac{2}{3}$; (c) 2.

23.20. 4π. 23.21. 0. 23.22. 0.

23.23. πa^2. 23.24. 0. 23.25. -2π.

23.26. $\frac{4}{3}$. 23.27. 6. 23.28. 0.

23.29. $-\pi a^2$. 23.30. $\frac{1}{35}$. 23.31. 13.

23.32. $3\sqrt{3}$. 23.33. 4. 23.34. -2.

23.35. $-\frac{3}{2}$. 23.36. 9. 23.37. 62.

23.38. $1+\pi$. 23.39. $e^a\cos b-1$.

23.42. $u(x, y)=x^3+3x^2y-3xy^2-y^3+C$.

23.43. $u(x, y)=y^2\cos x+x^2\cos y+C$.

23.44. $u(x, y)=\frac{e^y-1}{1+x^2}+C$. 23.45. $u(x, y)=\frac{x-y}{(x+y)^2}+C$.

23.46. $u(x, y)=e^{x+y}(x-y+1)+ye^x+C$.

23.47. $u(x, y)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{3y-x}{2\sqrt{2}\,x}+C.$

23.48. $n=1,\quad u(x, y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}+C.$

23.49. $a=b=-1,\quad u(x, y)=\frac{x-y}{x^2+y^2}+C.$

23.50. $\iint\limits_{S} y^2\,dx\,dy$　　23.51. $\frac{\pi a^4}{2}.$

23.52. $-2\pi ab.$　　23.53. $\frac{\pi m a^2}{8}.$

23.54. $mS+e^{x_2}\varphi(y_2)-e^{x_1}\varphi(y_1)-m(y_2-y_1)-$

$-\frac{m}{2}(x_2-x_1)(y_2+y_1).$

23.55. $\frac{3}{8}\pi a^2.$　　23.56. $6\pi a^2.$　　23.57. $2a^2.$

23.58. $\frac{1}{3}[(x_2^2+1)^{\frac{3}{2}}-(x_1^2+1)^{\frac{3}{2}}].$

23.59. $M=\delta a.$　　23.60. $\frac{2}{9}k(126-10\sqrt{5}).$

23.61. $\sqrt{a^2+b^2}\left(2\pi a^2+\frac{8}{3}\pi^3 b^2\right).$

23.62. $\sqrt{3}(1-e^{-t_0}).$

23.63. $\frac{a}{8}\left(3\sqrt{3}-1+\frac{3}{2}\ln\frac{2\sqrt{3}+3}{3}\right).$

23.64. $\left(-\frac{4}{5}a, 0\right).$　　23.65. $\left(\frac{4}{3}a, \frac{4}{3}a\right).$

23.66. 重心在扇形对称轴上与圆心距离 $\frac{a\sin\varphi}{\varphi}$ 处.

23.67. $\left(a\frac{\sin m}{m},\ a\frac{1-\cos m}{m},\ \frac{hm}{2}\right).$

23.68. $\left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right)$. 23.69. $-\frac{8}{15}$.

23.70. $-|F|R$. 23.71. (a) $\frac{a^2-b^2}{2}$; (b) 0.

23.73. $-mg(z_2-z_1)$. 23.75. $\frac{1}{3}(r_A^3-r_B^3)$.

23.76. $\frac{k}{2}\ln 2$. 23.77. $-\frac{k\ln 2}{|c|}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

23.78. $4\sqrt{61}$.

23.79. $\frac{3-\sqrt{3}}{2}+(\sqrt{3}-1)\ln 2$.

23.80. πa^3. 23.81. πR^3.

23.82. $\frac{2\pi R^5}{15}$. 23.83. $\frac{\pi}{2}(1+\sqrt{2})$.

23.84. $\frac{64}{15}\sqrt{2}\,a^4$. 23.85. $2\pi \operatorname{arc\,tg}\frac{H}{R}$.

23.86. $\frac{2\pi R^7}{105}$. 23.87. 1. 23.88. $2\pi e^2$.

23.89. 3. 23.90. $\frac{1}{8}$. 23.91. 6π.

23.92. $R^2h\left(\frac{2R}{3}+\frac{\pi h}{8}\right)$. 23.93. 0.

23.94. $\frac{\pi}{8}$. 23.95. $3a^4$. 23.96. $-\frac{9}{2}\pi$.

23.97. $\frac{12\pi a^5}{5}$. 23.98. $\frac{\pi}{15}(12\sqrt{3}+2)$.

23.99. $\frac{4}{3}\mu_0\pi a^4$. 23.100. $\frac{8}{3}\pi a^4$ (a 为球的半径).

23.101. $\left(0, 0, \frac{a}{2}\right)$. 23.102. $\frac{3\pi}{16}$.

23.103. (a) 0; (b) πh^3. 23.104. (a) 0; (b) 0.

附　录

附　　录

I. 希腊字母

字母		读音
A	α	Alpha
B	β	Beta
Γ	γ	Gamma
Δ	δ	Delta
E	ε	Epsilon
Z	ζ	Zeta
H	η	Eta
Θ	θ	Theta
I	ι	Iota
K	κ	Kappa
Λ	λ	Lambda
M	μ	Mu
N	ν	Nu
Ξ	ξ	Xi
O	o	Omicron
Π	π	Pi
P	ρ	Rho
Σ	σ	Sigma
T	τ	Tau
Υ	υ	Upsilon
Φ	φ	Phi
X	χ	Chi
Ψ	ψ	Psi
Ω	ω	Omega

II. 代　　数

1. 指数和对数运算

$a^x a^y = a^{x+y}$, $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, $(a^x)^y = a^{xy}$, $\sqrt[y]{a^x} = a^{\frac{x}{y}}$.

$\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$, $\log(N_1 \cdot N_2) = \log N_1 + \log N_2$,

$\log\frac{N_1}{N_2}=\log N_1-\log N_2$, $\log(N^n)=n\log N$,

$\log\sqrt[n]{N}=\frac{1}{n}\log N$, $\log_b N=\frac{\log_a N}{\log_a b}$.

$e\doteq 2.7183$,

$\lg e\doteq 0.4343$, $\ln 10\doteq 2.3026$.

2. 有限项数项級数

(1) $1+2+3+\cdots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$;

(2) $p+(p+1)+(p+2)+\cdots+(n-1)+n=$

$$=\frac{(n+p)(n-p+1)}{2};$$

(3) $1+3+5+\cdots+(2n-3)+(2n-1)=n^2$;

(4) $2+4+6+\cdots+(2n-2)+2n=n(n+1)$;

(5) $1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

(6) $1^3+2^3+3^3+\cdots+(n-1)^3+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$;

(7) $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}$;

(8) $1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$;

(9) $a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(a+\overline{n-1}d)=n\left(a+\frac{n-1}{2}d\right)$;

(10) $a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}=a\frac{1-q^n}{1-q}$ $(q\neq 1)$.

3. 牛頓公式

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3+\cdots+$$

$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}a^{n-m}b^m+\cdots+nab^{n-1}+b^n.$$

$$(a-b)^n=a^n-na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3+$$

$$\cdots+(-1)^m\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}a^{n-m}b^m+$$

$$+\cdots+(-1)^nb^n.$$

4. 因式分解公式

$(x\pm y)^2=x^2\pm 2xy+y^2$;

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$;

$(x\pm y)^3=x^3\pm 3x^2y+3xy^2\pm y^3$;

$(x\pm y)^n$ 按"牛顿公式"展开;

$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$;

$(x^n-y^n):(x-y)=x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1}$;

$(x^n+y^n):(x+y)=x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-\cdots-$

$-xy^{n-2}+y^{n-1}$ (n 是奇数).

$(x^n-y^n):(x+y)=x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-\cdots+$

$+xy^{n-2}-y^{n-1}$ (n 是偶数).

III. 三 角

1. 基本公式

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$, $\csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}$,

$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha$, $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$, $\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$,

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\csc^2\alpha, \qquad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

2. 约化公式

函　数	$\beta=\frac{\pi}{2}\pm\alpha$	$\beta=\pi\pm\alpha$	$\beta=\frac{3}{2}\pi\pm\alpha$	$\beta=2\pi-\alpha$
$\sin\beta$	$+\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\beta$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$+\cos\alpha$
$\operatorname{tg}\beta$	$\mp\operatorname{ctg}\alpha$	$\pm\operatorname{tg}\alpha$	$\mp\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg}\beta$	$\mp\operatorname{tg}\alpha$	$\pm\operatorname{ctg}\alpha$	$\mp\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$

3. 和差公式

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\mp1}{\operatorname{ctg}\beta\pm\operatorname{ctg}\alpha}.$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$\cos A\cos B=\frac{1}{2}[\cos(A-B)+\cos(A+B)],$$

$$\sin A\sin B=\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)],$$

$$\sin A\cos B=\frac{1}{2}[\sin(A-B)+\sin(A+B)].$$

4. 倍角和半角公式

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,\qquad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},\qquad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}.$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},\qquad \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}.$$

5. 任意三角形的基本关系

(1) $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R.$ （正弦定理）

(2) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$ （余弦定理）

(3) $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)}.$ （正切定理）

(4) $S = \dfrac{1}{2}ab\sin C.$ （面积公式）

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},\quad p = \frac{1}{2}(a+b+c).$$

6. 双曲函数和反双曲函数

(1) $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2},\qquad \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2},$

$\operatorname{th} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},\qquad \operatorname{sch} x = \dfrac{1}{\operatorname{ch} x},$

$\operatorname{csch} x = \dfrac{1}{\operatorname{sh} x},\qquad \operatorname{cth} x = \dfrac{1}{\operatorname{th} x}.$

(2) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1,\qquad \operatorname{sch}^2 x + \operatorname{th}^2 x = 1,$

$\operatorname{cth}^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1,$

$\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \operatorname{th} x,\qquad \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \operatorname{cth} x.$

(3) $\operatorname{Ar\,sh} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$,

$\operatorname{Ar\,ch} x=\pm\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \qquad (x\geqslant 1)$,

$\operatorname{Ar\,th} x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \qquad (|x|<1)$,

$\operatorname{Ar\,cth} x=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} \qquad (|x|>1)$.

IV. 初等几何

在下列公式中，字母 R, r 表示半径，h 表示高，l 表示斜高.

1. 圆；圆扇形

圆：周长$=2\pi r$；面积$=\pi r^2$.

圆扇形：面积$=\frac{1}{2}r^2\alpha$　（式中 α 为扇形的圆心角，以弧度计）.

2. 正圆錐

体积$=\frac{1}{3}\pi r^2h$；侧面积$=\pi rl$；全面积$=\pi r(r+l)$.

3. 截圆錐

体积$=\frac{\pi h}{3}(R^2+r^2+Rr)$；侧面积$=\pi l(R+r)$.

4. 球

体积$=\frac{4}{3}\pi r^3$；面积$=4\pi r^2$.

V. 导数和微分

1. 基本公式

$(c)'=0$,

$(x)'=1$,

$(\ln x)'=\frac{1}{x}$,

$(x^n)'=nx^{n-1}$,

$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$,

$\left(\frac{1}{x^n}\right)'=-\frac{n}{x^{n+1}}$,

$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$,

$(\sqrt[n]{x})'=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$,

$(e^x)'=e^x$,

$(a^x)'=a^x\ln a$,

$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

$(\operatorname{arc tg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$,

$(\operatorname{arc ctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$,

$(\operatorname{arc sec} x)'=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$,

$(\operatorname{arc csc} x)'=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$,

$(\operatorname{sh} x)'=\operatorname{ch} x$,

$(\operatorname{ch} x)'=\operatorname{sh} x$.

$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}$,

$(\lg x)'=\frac{1}{x}\lg e\approx\frac{0.4343}{x}$,

$(\sin x)'=\cos x$,

$(\cos x)'=-\sin x$,

$(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$,

$(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$,

$(\sec x)'=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x\sec x$,

$(\csc x)'=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg} x\csc x$,

$(\operatorname{th} x)'=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$,

$(\operatorname{cth} x)'=-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$,

$(\operatorname{Ar sh} x)'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,

$(\operatorname{Ar ch} x)'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$,

$(\operatorname{Ar th} x)'=\frac{1}{1-x^2}$,

$(\operatorname{Ar cth} x)'=-\frac{1}{x^2-1}$.

2. 运算法则

$(cu)'=cu'$,　　$f'_x[\varphi(x)]=f'(u)\cdot\varphi'(x)$

$(u\pm v)'=u'\pm v'$,　　$d(cu)=cdu$,

$(uv)'=uv'+vu'$,　　$d(u\pm v)=du\pm dv$,

$(uvw)'=uvw'+uwv'+vwu'$,　　$d(uv)=u\,dv+v\,du$,

$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{vu'-uv'}{v^2}$,　　$d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\,du-u\,dv}{v^2}$.

VI. 不定积分

1. 基本积分公式

$\int 0\cdot dx=C$,　　$\int x^n dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C\quad(n\neq-1)$,

$\int \dfrac{dx}{x}=\ln|x|+C$,　　$\int e^x\,dx=e^x+C$,　　$\int a^x dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$,

$\int \sin x\,dx=-\cos x+C$,　　$\int \operatorname{sh} x\,dx=\operatorname{ch} x+C$,

$\int \cos x\,dx=\sin x+C$,　　$\int \operatorname{ch} x\,dx=\operatorname{sh} x+C$,

$\int \operatorname{tg} x\,dx=-\ln|\cos x|+C$,　　$\int \operatorname{th} x\,dx=\ln|\operatorname{ch} x|+C$,

$\int \operatorname{ctg} x\,dx=\ln|\sin x|+C$,　　$\int \operatorname{cth} x\,dx=\ln|\operatorname{sh} x|+C$,

$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x+C$,　　$\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}=\operatorname{th} x+C$,

$\int \dfrac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg} x+C$,　　$\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x}=-\operatorname{cth} x+C$,

$\int \dfrac{dx}{a^2+x^2}=\dfrac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{a}+C$,

$\int \dfrac{dx}{a^2-x^2}=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right|+C$,

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\operatorname{Ar\,sh}\frac{x}{a}+C=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\operatorname{Ar\,ch}\frac{x}{a}+C=\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+C.$$

2. 积分运算

$$\int [f(x)+\varphi(x)+\cdots+\psi(x)]dx=$$

$$=\int f(x)\,dx+\int \varphi(x)\,dx+\cdots+\int \psi(x)\,dx,$$

$$\int af(x)\,dx=a\int f(x)\,dx \qquad (a\neq 0,\ a \text{ 是常数}),$$

$$\int uv'\,dx=uv-\int vu'\,dx,$$

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du.$$

3. 积分表

(1) $$\int \frac{dx}{a+bx}=\frac{1}{b}\ln(a+bx)+C.$$

(2) $$\int (a+bx)^n\,dx=\frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)}+C, \qquad n\neq -1.$$

(3) $$\int \frac{x\,dx}{a+bx}=\frac{1}{b^2}[a+bx-a\ln(a+bx)]+C.$$

(4) $$\int \frac{x^2\,dx}{a+bx}=\frac{1}{b^3}\left[\frac{1}{2}(a+bx)^2-2a(a+bx)+a^2\ln(a+bx)\right]+C.$$

(5) $$\int \frac{dx}{x(a+bx)}=-\frac{1}{a}\ln\frac{a+bx}{x}+C.$$

(6) $\int \frac{dx}{x^2(a+bx)} = -\frac{1}{ax} + \frac{b}{a^2} \ln \frac{a+bx}{x} + C.$

(7) $\int \frac{x\,dx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^2}\left[\ln(a+bx) + \frac{a}{a+bx}\right] + C.$

(8) $\int \frac{x^2\,dx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^3}\left[a+bx-2a\ln(a+bx) - \frac{a^2}{a+bx}\right] + C.$

(9) $\int \frac{dx}{x(a+bx)^2} = \frac{1}{a(a+bx)} - \frac{1}{a^2} \ln \frac{a+bx}{x} + C.$

(10) $\int \frac{x\,dx}{(a+bx)^3} = \frac{1}{b^2}\left[-\frac{1}{a+bx} + \frac{a}{2(a+bx)^2}\right] + C.$

(11) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C.$

(12) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + C.$

(13) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} + C.$

(14) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + C.$

(15) $\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tg} x\sqrt{\frac{b}{a}} + C \quad (a>0,\ b>0).$

(16) $\int \frac{dx}{a-bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}} + C.$

(17) $\int \frac{x\,dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2b} \ln\left(x^2 + \frac{a}{b}\right) + C.$

(18) $\int \frac{x^2\,dx}{a+bx^2} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b} \int \frac{dx}{a+bx^2}.$

(19) $\int \frac{dx}{x(a+bx^2)} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x^2}{a+bx^2} + C.$

(20) $\int \frac{dx}{x^2(a+bx^2)} = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a} \int \frac{dx}{a+bx^2}.$

(21) $\int \frac{dx}{(a+bx^2)^2}=\frac{x}{2a(a+bx^2)}+\frac{1}{2a}\int\frac{dx}{a+bx^2}.$

(22) $\int \sqrt{a+bx}\,dx=\frac{2}{3b}\sqrt{(a+bx)^3}+C.$

(23) $\int x\sqrt{a+bx}\,dx=-\frac{2(2a-3bx)\sqrt{(a+bx)^3}}{15b^2}+C.$

(24) $\int x^2\sqrt{a+bx}\,dx=\frac{2(8a^2-12abx+15b^2x^2)\sqrt{(a+bx)^3}}{105b^3}+C.$

(25) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx}}=-\frac{2(2a-bx)}{3b^2}\sqrt{a+bx}+C.$

(26) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a+bx}}=\frac{2(8a^2-4abx+3b^2x^2)}{15b^3}\sqrt{a+bx}+C.$

(27) $\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}+C\quad(a>0).$

(28) $\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}=\frac{2}{\sqrt{-a}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{a+bx}{-a}}+C\quad(a<0).$

(29) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx}}=\frac{-\sqrt{a+bx}}{ax}-\frac{b}{2a}\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}.$

(30) $\int \frac{\sqrt{a+bx}\,dx}{x}=2\sqrt{a+bx}+a\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}.$

(31) $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$

或 $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\operatorname{Ar\,sh}\frac{x}{a}+C.$

(32) $\int \sqrt{(x^2+a^2)^3}\,dx=\frac{x}{8}(2x^2+5a^2)\sqrt{x^2+a^2}+$

$+\frac{3a^4}{8}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$

或 $\frac{x}{8}(2x^2+5a^2)\sqrt{x^2+a^2}+\frac{3a^4}{8}\operatorname{Ar\,sh}\frac{x}{a}+C.$

(33) $\int x\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}{3}+C.$

(34) $\int x^2\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{x}{8}(2x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2}-$

$$-\frac{a^4}{8}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$$

或 $\frac{x(2x^2+a^2)}{8}\sqrt{x^2+a^2}-\frac{a^4}{8}\operatorname{Ar\,sh}\frac{x}{a}+C.$

(35) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$ 或 $\operatorname{Ar\,sh}\frac{x}{a}+C.$

(36) $\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}=\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}+C.$

(37) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\sqrt{x^2+a^2}+C.$

(38) $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}-\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$

或 $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}-\frac{a^2}{2}\operatorname{Ar\,sh}\frac{x}{a}+C.$

(39) $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}=-\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}+\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$

或 $-\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}+\operatorname{Ar\,sh}\frac{x}{a}+C.$

(40) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{1}{a}\ln\frac{x}{a+\sqrt{x^2+a^2}}+C.$

(41) $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}=-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}+C.$

(42) $\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+a^2}}=-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{2a^2x^2}+\frac{1}{2a^3}\ln\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}+C.$

(43) $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}\,dx}{x}=\sqrt{a^2+x^2}-a\ln\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}+C.$

(44) $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}\,dx}{x^2}=-\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}+\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+C$

或 $\frac{-\sqrt{a^2+x^2}}{x}+\operatorname{Ar\,sh}\frac{x}{a}+C.$

(45) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C.$

(46) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C.$

(47) $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}+C.$

(48) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\sqrt{a^2-x^2}+C.$

(49) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}+C.$

(50) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C.$

(51) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C.$

(52) $\int \sqrt{(a^2-x^2)^3}\,dx=$

$$=\frac{x}{8}(5a^2-2x^2)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{3a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

(53) $\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx=-\frac{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}{3}+C.$

(54) $\int x\sqrt{(a^2-x^2)^3}\,dx=-\frac{\sqrt{(a^2-x^2)^5}}{5}+C.$

(55) $\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{a^2-x^2}+$

$$+\frac{a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

(56) $$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}-\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

(57) $$\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{a}\ln\frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}}+C.$$

(58) $$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x}+C.$$

(59) $$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2a^2x^2}+\frac{1}{2a^3}\ln\frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}}+C.$$

(60) $$\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx=\sqrt{a^2-x^2}-a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}+C.$$

(61) $$\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

(62) $$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C\quad\text{或 }\operatorname{Ar\,ch}\frac{x}{a}+C.$$

(63) $$\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}=-\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}}+C.$$

(64) $$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\sqrt{x^2-a^2}+C.$$

(65) $$\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C$$

$$\text{或 }\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\operatorname{Arch}\frac{x}{a}+C.$$

(66) $$\int\sqrt{(x^2-a^2)^3}\,dx=\frac{x}{8}(2x^2-5a^2)\sqrt{x^2-a^2}+$$

$$+\frac{3a^4}{8}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C$$

$$\text{或 }\frac{x}{8}(2x^2-5a^2)\sqrt{x^2-a^2}+\frac{3a^4}{8}\operatorname{Ar\,ch}\frac{x}{a}+C.$$

(67) $\int x\sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}{3}+C.$

(68) $\int x\sqrt{(x^2-a^2)^3}\,dx=\frac{\sqrt{(x^2-a^2)^5}}{5}+C.$

(69) $\int x^2\sqrt{x^2-a^2}\,dx=$

$$=\frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^4}{8}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C$$

或 $\frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^4}{8}\,\mathrm{Ar\,ch}\,\frac{x}{a}+C.$

(70) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C$

或 $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\,\mathrm{Ar\,ch}\,\frac{x}{a}+C.$

(71) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}=-\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}+\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C$

或 $-\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}+\mathrm{Ar\,ch}\frac{x}{a}+C.$

(72) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\mathrm{arc\,sec}\,x+C.$

(73) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{1}{a}\mathrm{arc\,sec}\,\frac{x}{a}+C.$

(74) $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x}+C.$

(75) $\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{2a^2x^2}+\frac{1}{2a^3}\mathrm{arc\,sec}\,\frac{x}{a}+C.$

(76) $\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}\,dx}{x}=\sqrt{x^2-a^2}-a\,\mathrm{arc\,cos}\frac{a}{x}+C.$

(77) $\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}\,dx}{x^2}=-\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}+\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C$

或 $\frac{-\sqrt{x^2-a^2}}{x}+\operatorname{Ar\,ch}\frac{x}{a}+C.$

$$(78)\ \int\frac{dx}{a+bx+cx^2}=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2cx+b}{\sqrt{4ac-b^2}}+C & (b^2<4ac).\\ \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\frac{2cx+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2cx+b+\sqrt{b^2-4ac}}+C & (b^2>4ac).\end{cases}$$

$$(79)\ \int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{c}}\ln(2cx+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2})+C.$$

$$(80)\ \int\sqrt{a+bx+cx^2}\,dx=\frac{2cx+b}{4c}\sqrt{a+bx+cx^2}-$$

$$-\frac{b^2-4ac}{8\sqrt{c^3}}\ln(2cx+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2})+C.$$

$$(81)\ \int\frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{\sqrt{a+bx+cx^2}}{c}-\frac{b}{2\sqrt{c^3}}\ln(2cx+$$

$$+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2})+C.$$

$$(82)\ \int\frac{dx}{a+bx-cx^2}=\frac{1}{\sqrt{b^2+4ac}}\ln\frac{\sqrt{b^2+4ac}+2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}-2cx+b}+C.$$

$$(83)\ \int\frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\arcsin\frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+C.$$

$$(84)\ \int\sqrt{a+bx-cx^2}\,dx=\frac{2cx-b}{4c}\sqrt{a+bx-cx^2}+$$

$$+\frac{b^2+4ac}{8\sqrt{c^3}}\arcsin\frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+C.$$

$$(85)\ \int\frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}}=$$

$$=-\frac{\sqrt{a+bx-cx^2}}{c}+\frac{b}{2\sqrt{c^3}}\arcsin\frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+C.$$

(86) $\int\sqrt{\frac{a+x}{b+x}}\,dx=\sqrt{(a+x)(b+x)}+$

$$+(a-b)\ln(\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x})+C.$$

(87) $\int\sqrt{\frac{a-x}{b+x}}\,dx=$

$$=\sqrt{(a-x)(b+x)}+(a+b)\arcsin\sqrt{\frac{x+b}{a+b}}+C.$$

(88) $\int\sqrt{\frac{a+x}{b-x}}\,dx=$

$$=-\sqrt{(a+x)(b-x)}-(a+b)\arcsin\sqrt{\frac{b-x}{a+b}}+C.$$

(89) $\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx=-\sqrt{1-x^2}+\arcsin x+C.$

(90) $\int\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C.$

(91) $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C.$ (92) $\int e^x dx=e^x+C.$

(93) $\int e^{ax}dx=\frac{e^{ax}}{a}+C.$ (94) $\int\sin x\,dx=-\cos x+C.$

(95) $\int\cos x\,dx=\sin x+C.$ (96) $\int\operatorname{tg} x\,dx=-\ln\cos x+C.$

(97) $\int\operatorname{ctg} x\,dx=\ln\sin x+C.$

(98) $\int\sec x\,dx=\ln(\sec x+\operatorname{tg} x)+C=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)+C.$

(99) $\int\csc x\,dx=\ln(\csc x-\operatorname{ctg} x)+C=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C.$

(100) $\int\sec^2 x\,dx=\operatorname{tg} x+C.$

(101) $\int \csc^2 x\, dx = -\operatorname{ctg} x + C.$

(102) $\int \sec x \operatorname{tg} x\, dx = \sec x + C.$

(103) $\int \csc x \operatorname{ctg} x\, dx = -\csc x + C.$

(104) $\int \sin^2 x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

(105) $\int \cos^2 x\, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

(106) $\int \sin^n x\, dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\, dx.$

(107) $\int \cos^n x\, dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\, dx.$

(108) $\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{1}{n-1}\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}.$

(109) $\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1}\frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}.$

(110) $\int \sin x \cos^n x\, dx = \frac{-\cos^{n+1} x}{n+1} + C.$

(111) $\int \sin^n x \cos x\, dx = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1} + C.$

(112) $\int \cos^m x \sin^n x\, dx =$

$$= \frac{\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \cos^{m-2} x \sin^n x\, dx.$$

(113) $\int \cos^m x \sin^n x\, dx =$

$$= -\frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \cos^m x \sin^{n-2} x\, dx.$$

$$(114)\ \int \sin mx \sin nx\, dx = -\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C.$$

$$(115)\ \int \cos mx \cos nx\, dx = \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C.$$

$$(116)\ \int \sin mx \cos nx\, dx = -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C.$$

(114)–(116): $(m \neq n)$

$$(117)\ \int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C \quad (a>b).$$

$$(118)\ \int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln \frac{\sqrt{b-a}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \sqrt{b+a}}{\sqrt{a-b}\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \sqrt{b+a}} + C \quad (a<b).$$

$$(119)\ \int \frac{dx}{a+b\sin x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{a\operatorname{tg}\frac{x}{2}+b}{\sqrt{a^2-b^2}} + C \quad (a>b).$$

$$(120)\ \int \frac{dx}{a+b\sin x} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln \frac{a\operatorname{tg}\frac{x}{2} + b - \sqrt{b^2-a^2}}{a\operatorname{tg}\frac{x}{2} + b + \sqrt{b^2-a^2}} + C \quad (a<b).$$

$$(121)\ \int \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \frac{1}{ab} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b\operatorname{tg} x}{a}\right) + C.$$

$$(122)\ \int \frac{dx}{a^2\cos^2 x - b^2\sin^2 x} = \frac{1}{2ab} \ln \frac{b\operatorname{tg} x + a}{b\operatorname{tg} x - a} + C.$$

(123) $\int e^{x}\sin x\,dx=\frac{e^{x}(\sin x-\cos x)}{2}+C.$

(124) $\int e^{ax}\sin nx\,dx=\frac{e^{ax}(a\sin nx-n\cos nx)}{a^2+n^2}+C.$

(125) $\int e^{x}\cos x\,dx=\frac{e^{x}(\sin x+\cos x)}{2}+C.$

(126) $\int e^{ax}\cos nx\,dx=\frac{e^{ax}(n\sin nx+a\cos nx)}{a^2+n^2}+C.$

(127) $\int xe^{ax}\,dx=\frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1)+C.$

(128) $\int x^{n}e^{ax}\,dx=\frac{x^{n}e^{ax}}{a}-\frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx.$

(129) $\int xa^{mx}\,dx=\frac{xa^{mx}}{m\ln a}-\frac{a^{mx}}{(m\ln a)^2}+C.$

(130) $\int x^{n}a^{mx}\,dx=\frac{a^{mx}x^{n}}{m\ln a}-\frac{n}{m\ln a}\int a^{mx}x^{n-1}\,dx.$

(131) $\int e^{ax}\cos^{n}x\,dx=\frac{e^{ax}\cos^{n-1}x\,(a\cos x+n\sin x)}{a^2+n^2}+$

$$+\frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int e^{ax}\cos^{n-2}x\,dx.$$

(132) $\int \operatorname{sh} x\,dx=\operatorname{ch} x+C.$

(133) $\int \operatorname{ch} x\,dx=\operatorname{sh} x+C.$

(134) $\int \operatorname{th} x\,dx=\ln\operatorname{ch} x+C.$

(135) $\int \operatorname{cth} x\,dx=\ln\operatorname{sh} x+C.$

(136) $\int \operatorname{sch} x\,dx=2\operatorname{arc\,tg} e^{x}+C.$

(137) $\int \operatorname{csch} x\,dx=\ln\operatorname{th}\frac{x}{2}+C.$

(138) $\int \mathrm{sch}^2 x\,dx = \mathrm{th}\,x + C.$

(139) $\int \mathrm{csch}^2 x\,dx = -\mathrm{cth}\,x + C.$

(140) $\int \mathrm{sch}\,x\,\mathrm{th}\,x\,dx = -\mathrm{sch}\,x + C.$

(141) $\int \mathrm{csch}\,x\,\mathrm{cth}\,x\,dx = -\mathrm{csch}\,x + C.$

(142) $\int \mathrm{sh}^2 x\,dx = -\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\mathrm{sh}\,2x + C.$

(143) $\int \mathrm{ch}^2 x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\mathrm{sh}\,2x + C.$

(144) $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C.$

(145) $\int \frac{dx}{x\ln x} = \ln(\ln x) + C.$

(146) $\int x^n \ln x\,dx = x^{n+1}\left[\frac{\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right] + C.$

(147) $\int \ln^n x\,dx = x\ln^n x - n\int \ln^{n-1} x\,dx.$

(148) $\int x^m \ln^n x\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\ln^n x - \frac{n}{m+1}\int x^m \ln^{n-1} x\,dx.$

(149) $\int \arcsin\frac{x}{a}\,dx = x\arcsin\frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2} + C.$

(150) $\int x\arcsin\frac{x}{a}\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right)\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{4}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$

(151) $\int x^2 \arcsin\frac{x}{a}\,dx =$

$$= \frac{x^3}{3}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{9}(x^2 + 2a^2)\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

(152) $\int \frac{\arcsin\frac{x}{a}\,dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\arcsin\frac{x}{a} - \frac{1}{a}\ln\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} + C.$

(153) $\int \operatorname{arc} \cos \frac{x}{a} dx = x \operatorname{arc} \cos \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} + C.$

(154) $\int x \operatorname{arc} \cos \frac{x}{a} dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) \operatorname{arc} \cos \frac{x}{a} - \frac{x}{4} \sqrt{a^2 - x^2} + C.$

(155) $\int x^2 \operatorname{arc} \cos \frac{x}{a} dx =$

$$= \frac{x^3}{3} \operatorname{arc} \cos \frac{x}{a} - \frac{1}{9}(x^2 + 2a^2)\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

(156) $\int \frac{\operatorname{arc} \cos \frac{x}{a} dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \operatorname{arc} \cos \frac{x}{a} + \frac{1}{a} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} + C.$

(157) $\int \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a} dx = x \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \ln(a^2 + x^2) + C.$

(158) $\int x \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a} dx = \frac{1}{2}(x^2 + a^2) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a} - a\frac{x}{2} + C.$

(159) $\int x^2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a} dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a} - \frac{ax^2}{6} + \frac{a^3}{6} \ln(a^2 + x^2) + C.$

(160) $\int x^n \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a} - \frac{a}{n+1} \int \frac{x^{n+1} dx}{a^2 + x^2}$

$(n \neq -1).$

(161) $\int \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a} dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a} - \frac{1}{2a} \ln \frac{a^2 + x^2}{x^2} + C.$

(162) $\int \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a} dx}{x^n} = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a} +$

$$+ \frac{a}{n-1} \int \frac{dx}{x^{n-1}(a^2 + x^2)} \qquad (n \neq 1).$$

(163) $\int \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{x}{a} dx = x \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln(a^2 + x^2) + C.$

(164) $\int x \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{x}{a} dx = \frac{1}{2}(x^2 + a^2) \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{x}{a} + \frac{ax}{2} + C.$

(165) $\int x^2 \operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{a}dx=$

$$=\frac{x^3}{3}\operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{a}+\frac{ax^2}{6}-\frac{a^3}{6}\ln(a^2+x^2)+C.$$

(166) $\int x^n \operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{a}dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{a}+\frac{a}{n+1}\int\frac{x^{n+1}\,dx}{a^2+x^2}$

$(n\neq-1).$

(167) $\int\frac{\operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{a}\,dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{a}+\frac{1}{2a}\ln\frac{a^2+x^2}{x^2}+C.$

(168) $\int\frac{\operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{a}\,dx}{x^n}=$

$$=-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}\operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{a}-\frac{a}{n-1}\int\frac{dx}{x^{n-1}(a^2+x^2)}$$

$(n\neq1).$

(169) $\int \operatorname{Ar\,sh}\frac{x}{a}\,dx=x\operatorname{Ar\,sh}\frac{x}{a}-\sqrt{x^2+a^2}+C.$

(170) $\int \operatorname{Ar\,ch}\frac{x}{a}\,dx=x\operatorname{Ar\,ch}\frac{x}{a}-\sqrt{x^2-a^2}+C.$

(171) $\int \operatorname{Ar\,th}\frac{x}{a}\,dx=x\operatorname{Ar\,th}\frac{x}{2}+\frac{a}{2}\ln(a^2-x^2)+C.$

(172) $\int \operatorname{Ar\,cth}\frac{x}{a}\,dx=x\operatorname{Ar\,cth}\frac{x}{a}+\frac{a}{2}\ln(x^2-a^2)+C.$

VII. 初等函数的幂级数展开式

(1) $(1\pm x)^m=1\pm mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2\pm\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+$

$$+\cdots+(\pm 1)^n\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots,$$

$$|x|\leqslant 1,\quad m>0.$$

(2) $(1\pm x)^{-m}=$

$$=1\mp mx+\frac{m(m+1)}{2!}x^2\mp\frac{m(m+1)(m+2)}{3!}x^3+$$

$$+\cdots+(\mp 1)^n\frac{m(m+1)\cdots(m+n-1)}{n!}x^n+\cdots,$$

$$|x|<1,\ m>0.$$

(3) $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,\qquad |x|<\infty.$

(4) $\sin(x+a)=$

$$=\sin a+x\cos a-\frac{x^2\sin a}{2!}-\frac{x^3\cos a}{3!}+\frac{x^4\sin a}{4!}+$$

$$+\cdots+\frac{x^n\sin\left(a+\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}+\cdots,\qquad |x|<\infty.$$

(5) $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,\qquad |x|<\infty.$

(6) $\cos(x+a)=$

$$=\cos a-x\sin a-\frac{x^2\cos a}{2!}+\frac{x^3\sin a}{3!}+\frac{x^4\cos a}{4!}-$$

$$-\cdots+\frac{x^n\cos\left(a+\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}+\cdots,\qquad |x|<\infty.$$

(7) $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,\qquad |x|<\infty.$

(8) $a^x=e^{x\ln a}=1+x\ln a+\frac{(x\ln a)^2}{2!}+\frac{(x\ln a)^3}{3!}+$

$$+\cdots+\frac{(x\ln a)^n}{n!}+\cdots,\qquad |x|<\infty.$$

(9) $\ln x=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+$

$$+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}+\cdots,\quad 0<x\leqslant 2.$$

(10) $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+$

$$+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\cdots,\quad -1<x\leqslant 1.$$

(11) $\ln(1-x)=-\left[x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots\right],\quad -1\leqslant x<1.$

(12) $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots\right],\quad |x|<1.$

(13) $\arcsin x=x+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}+$

$$+\cdots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)(2n+1)}+\cdots,\quad |x|\leqslant 1.$$

(14) $\arccos x=\frac{\pi}{2}-\left[x+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{1\cdot 3x^5}{2\cdot 4\cdot 5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}+\right.$

$$\left.+\cdots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)(2n+1)}+\cdots\right],\quad |x|\leqslant 1.$$

(15) $\operatorname{arc\,tg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+$

$$+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots,\quad |x|\leqslant 1.$$

(16) $\operatorname{arc\,ctg} x=\frac{\pi}{2}-\left[x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\right.$

$$\left.+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots\right],\quad |x|\leqslant 1.$$

(17) $\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+$

$$+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots, \qquad |x|<\infty.$$

(18) $$\operatorname{ch} x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots, \qquad |x|<\infty.$$

(19) $$\operatorname{Ar\,sh} x=x-\frac{1}{2\cdot 3}x^{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^{5}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^{7}+$$
$$+\cdots+(-1)^{n}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)(2n+1)}x^{2n+1}+\cdots, \qquad |x|\leqslant 1.$$

(20) $$\operatorname{Ar\,th} x=x+\frac{x^{3}}{3}+\frac{x^{5}}{5}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots, \qquad |x|<1.$$

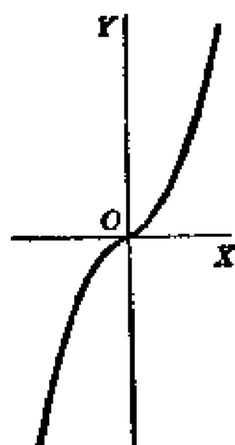
(21) 尤拉公式

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x, \qquad e^{-ix}=\cos x-i\sin x.$$

或 $$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.$$

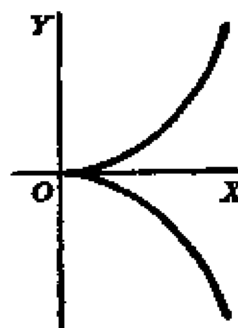
VIII. 几种常用的曲线

(1) 三次抛物线



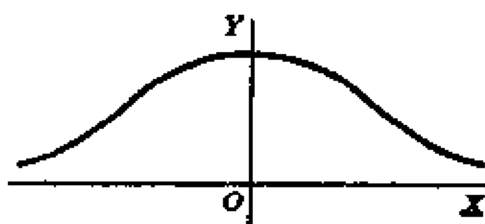
$y=ax^3$.

(2) 半立方抛物线



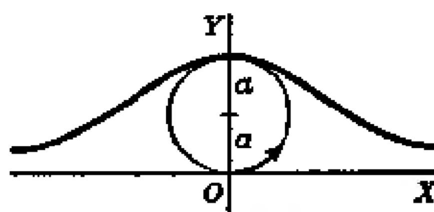
$y^2=ax^3$.

(3) 概率曲线



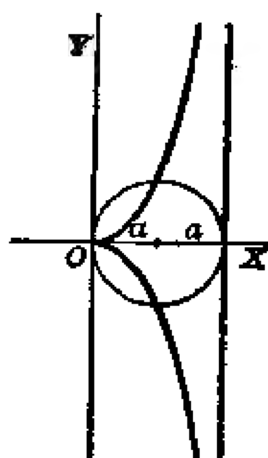
$$y=e^{-x^2}.$$

(4) 箕 舌 线



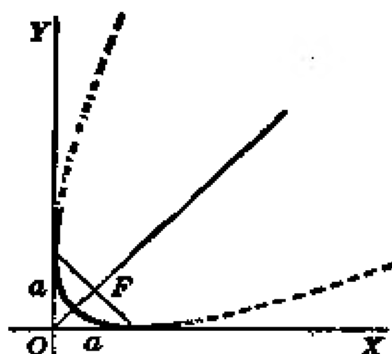
$$y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}.$$

(5) 蔓 叶 线



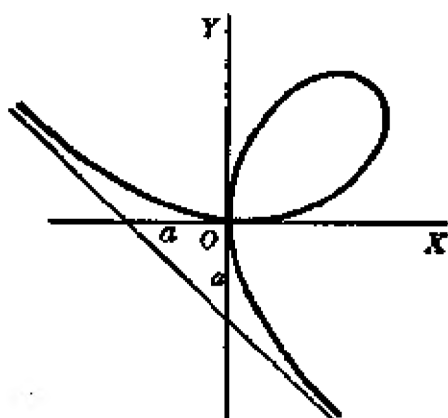
$$y^2(2a-x)=x^3.$$

(6) 抛 物 线



$$x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}.$$

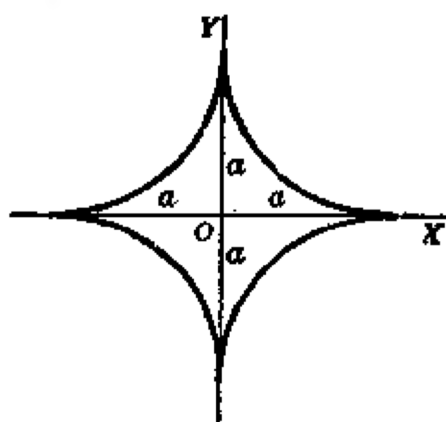
(7) 笛卡儿叶形线



$$x^3+y^3-3axy=0.$$

$$x=\frac{3at}{1+t^3};\quad y=\frac{3at^2}{1+t^3}.$$

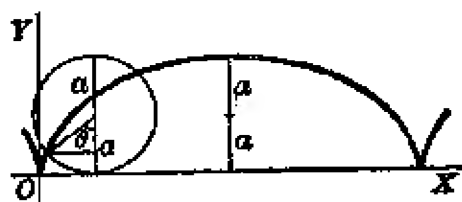
(8) 星形线(内摆线的一种)



$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}.$$

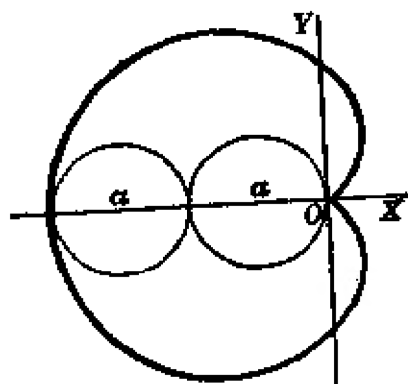
$$\begin{cases}x=a\cos^3\theta,\\ y=a\sin^3\theta.\end{cases}$$

(9) 摆　　线



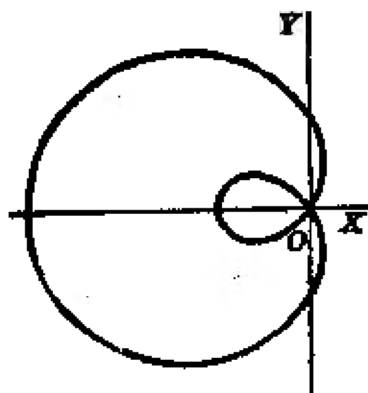
$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta), \\ y = a(1 - \cos\theta). \end{cases}$$

(10) 心形线(外摆线的一种)



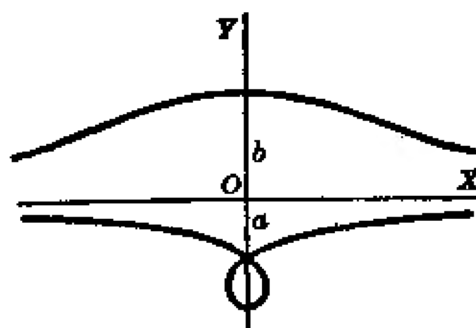
$$x^2 + y^2 + ax = a\sqrt{x^2 + y^2},$$
$$r = a(1 - \cos\theta).$$

(11) 蚶　　线



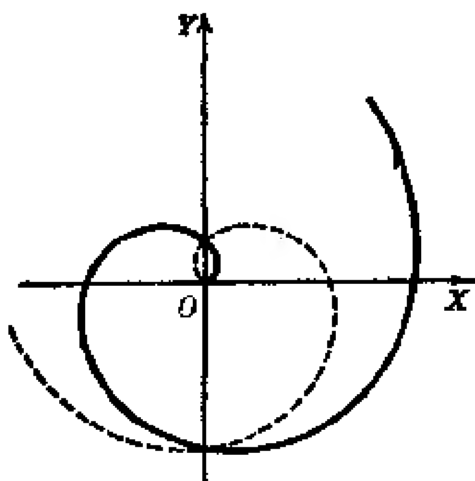
$$r = b - a\cos\theta.$$

(12) 蚌　　线



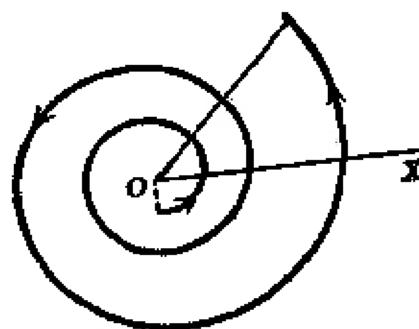
$$x^2y^2 = (y + a)^2(b^2 - y^2),$$
$$r = a\cos\theta + b \quad (b > a).$$

(13) 阿基米德螺线



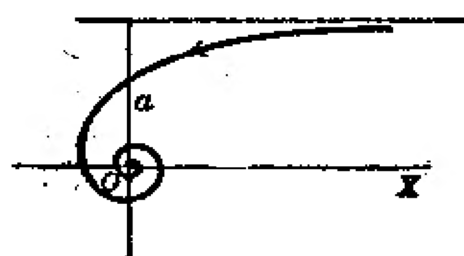
$$r = a\theta.$$

(14) 对数螺线



$$r = e^{a\theta}.$$

(15) 双曲螺线



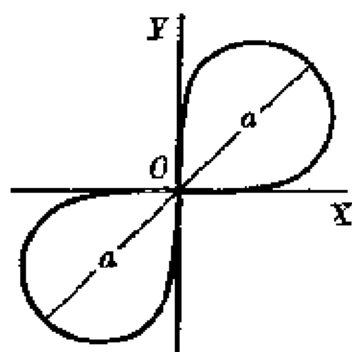
$r\theta = a.$

(16) 连锁螺线



$r^2\theta = a^2.$

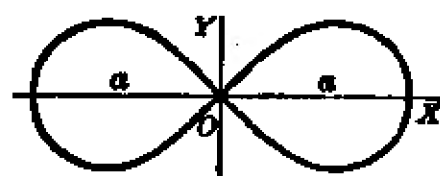
(17) 柏努利双纽线



$(x^2+y^2)^2 = 2a^2xy,$

$r^2 = a^2 \sin 2\theta.$

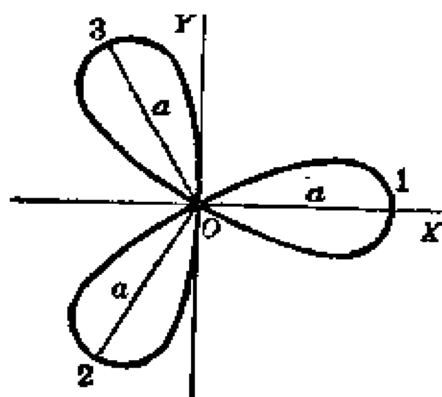
(18) 柏努利双纽线



$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2),$

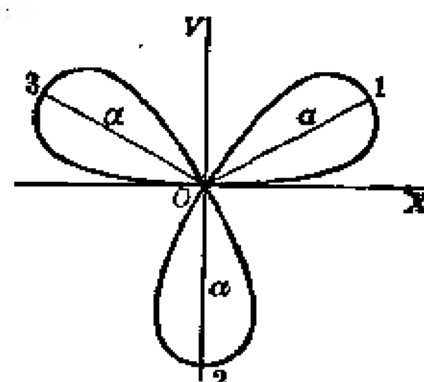
$r^2 = a^2 \cos 2\theta.$

(19) 三叶玫瑰线



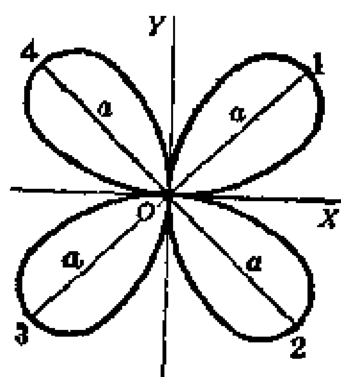
$r = a \cos 3\theta.$

(20) 三叶玫瑰线



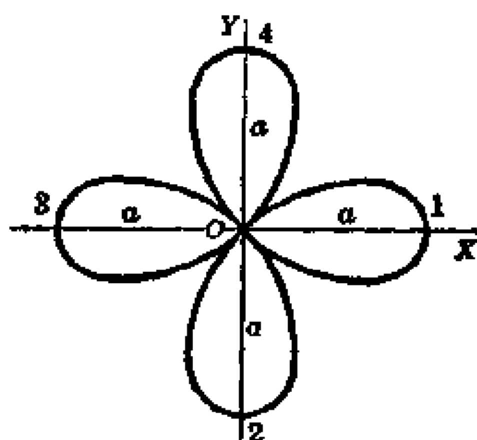
$r = a \sin 3\theta.$

(21) 四叶玫瑰线



$r = a \sin 2\theta$.

(22) 四叶玫瑰线



$r = a \cos 2\theta$.